Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2019

le mercredi 20 novembre 2019
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 21 novembre 2019
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Puisque le triangle ABC est équilatéral, alors $\angle ABC = 60^\circ$. (Le triangle ABC a trois angles isométriques dont les mesures ont une somme de 180°.)
   Puisque le triangle BDC est rectangle en D et a $DB = DC$, alors le triangle BDC est un triangle rectangle isocèle, d'où $\angle DBC = 45^\circ$. (On a $\angle DBC = \angle DCB$ puisque $DB = DC$ et puisque les mesures des deux angles ont une somme de 90°, d'où chacun a une mesure de 45°.)
   Donc, $x^\circ = \angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$, soit $x = 15$.

   Réponse : $x = 15$

2. *Solution 1*
   Les 20 pièces de vingt-cinq cents de Binh valent $20 \times 25 = 500$ cents.
   Les 20 pièces de dix cents d'Abdul valent $20 \times 10 = 200$ cents.
   Puisque Binh et Abdul ont la même somme d'argent, les pièces de vingt-cinq cents d'Abdul valent donc $500 - 200 = 300$ cents.
   Ainsi, Abdul doit avoir $300 \div 25 = 12$ pièces de vingt-cinq cents.

   Solution 2
   Les 20 pièces de vingt-cinq cents de Binh valent $20 \times 25 = 500$ cents.
   Les 20 pièces de dix cents d'Abdul valent $20 \times 10 = 200$ cents.
   Soit x le nombre de pièces de vingt-cinq cents d'Abdul. Ces derniers ont donc une valeur de $25x$ cents.
   Puisque Binh et Abdul ont la même somme d'argent, alors $500 = 200 + 25x$ d'où $25x = 300$ ou $x = \dfrac{300}{25} = 12$.

   Réponse : 12

3. On remarque que

   $$36\,000 = 36 \times 1000 = 6^2 \times 10^3 = (2 \times 3)^2 \times (2 \times 5)^3 = 2^2 \times 3^2 \times 2^3 \times 5^3 = 2^5 \times 3^2 \times 5^3$$

   On appelle ceci la *factorisation première* de 36 000. Il y a maintes manières différentes de parvenir à cette factorisation, or le résultat final sera toujours le même.
   Sachant que $36\,000 = 2^a 3^b 5^c$, et puisque $36\,000 = 2^5 \times 3^2 \times 5^3$, alors $a = 5$, $b = 2$ et $c = 3$.
   Donc, $3a + 4b + 6c = 3 \times 5 + 4 \times 2 + 6 \times 3 = 15 + 8 + 18 = 41$.

   Réponse : 41

4. Ali gagne un total de 12 points pour ses 12 réponses correctes. Afin de déterminer ses scores totaux possibles, il faut déterminer les nombres de points bonus possibles.
   Comme Ali répond incorrectement à 3 questions, ces questions pourraient soit appartenir à une seule catégorie, soit appartenir à 2 catégories différentes (2 questions proviendraient d'une seule catégorie tandis que la troisième question proviendrait d'une autre catégorie), soit appartenir à 3 catégories différentes (les trois questions proviendraient de trois catégories différentes).
   Dans le premier cas, elle répond correctement à toutes les questions dans 4 catégories parmi 5 et gagne donc 4 points bonus. Dans ce cas, son score total serait de $12 + 4 = 16$.
   Dans le deuxième cas, elle répond correctement à toutes les questions dans 3 catégories parmi 5 et gagne donc 3 points bonus. Dans ce cas, son score total serait de $12 + 3 = 15$.
   Dans le troisième cas, elle répond correctement à toutes les questions dans 2 catégories parmi 5 et gagne donc 2 points bonus. Dans ce cas, son score total serait de $12 + 2 = 14$.

Il n'y a pas d'autres possibilités de scores.
Donc, il n'y a que trois scores totaux possibles, soit 14, 15 et 16.

Réponse : 14, 15, 16

5. Puisque $|a|$ est supérieur ou égal à 0, puisque $|b|$ est supérieur ou égal à 0, et puisqu'on a $|a|+|b| \leq 10$, alors $|a|$ est inférieur ou égal à 10 et $|b|$ est inférieur ou égal à 10.
On compte le nombre de couples (a, b) possibles en évaluant chacune des valeurs possibles de $|a|$ de 0 à 10.

Supposons que $|a| = 0$. Donc $a = 0$. On a donc 1 valeur possible de a dans ce cas.
Puisque $|a| = 0$ et $|a| + |b| \leq 10$, alors $|b| \leq 10$, d'où les valeurs possibles de b sont $-10, -9, -8, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 8, 9$ ou 10. Il y a 21 valeurs possibles de b dans ce cas.
Puisqu'il y a 1 valeur possible de a et 21 valeurs possibles de b, alors il y a $1 \times 21 = 21$ couples (a, b) lorsque $|a| = 0$.

Supposons que $|a| = 1$. Donc $a = 1$ ou $a = -1$. On a donc 2 valeurs possibles de a dans ce cas.
Puisque $|a| = 1$ et $|a| + |b| \leq 10$, alors $|b| \leq 9$, d'où les valeurs possibles de b sont $-9, -8, -7, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 7, 8$ ou 9. Il y a 19 valeurs possibles de b dans ce cas.
Puisqu'il y a 2 valeurs possibles de a et 19 valeurs possibles de b, alors il y a $2 \times 19 = 38$ couples (a, b) lorsque $|a| = 1$.

Supposons que $|a| = 2$. Donc $a = 2$ ou $a = -2$. On a donc 2 valeurs possibles de a.
Dans ce cas, $|b| \leq 8$, d'où les valeurs possibles de b sont $-8, -7, -6, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 6, 7$ ou 8. Il y a 17 valeurs possibles de b dans ce cas.
Donc, il y a $2 \times 17 = 34$ couples (a, b) lorsque $|a| = 2$.

Au fur et à mesure que $|a|$ augmente de 2 à 9, la plus grande valeur possible de $|b|$ diminue de 1 à chaque étape. Donc, b aura 2 valeurs possibles de moins d'étape en étape. Puisqu'il y a 2 valeurs possibles de a à chaque étape, alors il y aura $2 \times 2 = 4$ couples (a, b) de moins à chaque étape.

On analyse le cas final $|a| = 10$ afin de vérifier qu'il n'y a aucune inconsistence dans ce dernier.
Supposons que $|a| = 10$. Donc $a = 10$ ou $a = -10$. On a donc 2 valeurs possibles de a.
Dans ce cas, $|b| \leq 0$ d'où 0 est donc la seule valeur possible de b.
Donc, il y a $2 \times 1 = 2$ couples (a, b) lorsque $|a| = 10$.

En tout, il y a donc

$$21 + 38 + 34 + 30 + 26 + 22 + 18 + 14 + 10 + 6 + 2$$

couples (a, b) qui vérifient $|a| + |b| \leq 10$.
On regroupe les 10 derniers nombres en couples en commençant par les nombres aux bouts et en procédant vers le milieu de la liste. On obtient donc

$$21 + (38 + 2) + (34 + 6) + (30 + 10) + (26 + 14) + (22 + 18)$$

qui est égal à $21 + 5 \times 40$, soit 221.
Donc, il y a 221 couples d'entiers (a, b) qui vérifient $|a| + |b| \leq 10$.

Réponse : 221

6. Supposons que le cercle d'origine a un rayon de R.
Donc, ce cercle a une circonférence de $2\pi R$.
Lorsqu'on découpe un secteur du cercle et qu'on enroule les deux morceaux de papier résultants, on obtient deux cônes dont les aires latérales ont un rapport de $2:1$.
Donc, le rapport des aires des deux morceaux de papier est aussi de $2:1$ car les aires latérales des deux cônes proviennent de ces morceaux de papier.
Autrement dit, l'aire du secteur que l'on découpe correspond donc à $\frac{1}{3}$ de l'aire du cercle. Donc, son angle au centre correspond aussi à $\frac{1}{3}$ de l'angle plein autour du centre, soit $\frac{1}{3}\times 360^\circ = 120^\circ$.
Puisque les deux morceaux ont des angles aux centres dont les mesures de 240° et de 120° ont un rapport de $2:1$, la circonférence du cercle est alors divisée en un rapport de $2:1$ lorsque ce dernier est coupé.
Sachant que le cercle d'origine avait une circonférence de $2\pi R$ et que cette dernière a été divisée en un rapport de $2:1$, on a donc $\frac{4}{3}\pi R$ et $\frac{2}{3}\pi R$ comme longueurs des morceaux de la circonférence.
Ces morceaux deviennent alors les circonférences des bases des deux cônes.
Puisque le rapport de la circonférence d'un cercle à son rayon est de $2\pi : 1$, alors les bases des deux cônes ont pour rayons $\dfrac{\frac{4}{3}\pi R}{2\pi} = \frac{2}{3}R$ et $\dfrac{\frac{2}{3}\pi R}{2\pi} = \frac{1}{3}R$.
Puisque le rayon du cercle d'origine devient l'apothème de chaque cône, les cônes ont alors des apothèmes de longueur R.
Le rayon et la hauteur d'un cône sont perpendiculaires. Ces derniers forment un triangle rectangle dont l'hypoténuse est égale à l'apothème du cône.
Donc, la hauteur d'un cône d'apothème R et de rayon $\frac{2}{3}R$ est de

$$\sqrt{R^2 - \left(\tfrac{2}{3}R\right)^2} = \sqrt{R^2 - \tfrac{4}{9}R^2} = \sqrt{\tfrac{5}{9}R^2} = \tfrac{\sqrt{5}}{3}R$$

De plus, la hauteur d'un cône d'apothème R et de rayon $\frac{1}{3}R$ est de

$$\sqrt{R^2 - \left(\tfrac{1}{3}R\right)^2} = \sqrt{R^2 - \tfrac{1}{9}R^2} = \sqrt{\tfrac{8}{9}R^2} = \tfrac{\sqrt{8}}{3}R$$

Le volume d'un cône de rayon $\frac{2}{3}R$ et de hauteur $\frac{\sqrt{5}}{3}R$ est de $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}R\right)$, soit $\frac{4\sqrt{5}}{81}\pi R^3$.
Le volume d'un cône de rayon $\frac{1}{3}R$ et de hauteur $\frac{\sqrt{8}}{3}R$ est de $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{3}R\right)^2\left(\frac{\sqrt{8}}{3}R\right)$, soit $\frac{\sqrt{8}}{81}\pi R^3$.
En divisant le premier volume par le deuxième, on obtient

$$\frac{\frac{4\sqrt{5}}{81}\pi R^3}{\frac{\sqrt{8}}{81}\pi R^3} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{5}\sqrt{2}}{4} = \sqrt{5}\sqrt{2} = \sqrt{10}$$

Donc, le rapport du grand volume au petit volume est de $\sqrt{10}:1$.

RÉPONSE : $\sqrt{10}:1$

Partie B

1. (a) Dans la figure, AC est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les cathètes sont de longueurs 9 et 12.
D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$.
Puisque $AC > 0$, alors $AC = \sqrt{225} = 15$.
Dans la figure, CB est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les cathètes sont de longueurs 3 et 4.
D'après le théorème de Pythagore, $CB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.
Puisque $BC > 0$, alors $CB = \sqrt{25} = 5$.
(On remarque que $AC : CB = 15 : 5 = 3 : 1$.)

(b) À l'aide de ce renseignement, on peut calculer le rapport voulu en calculant le rapport des différences entre les abscisses. On voit que $\dfrac{11-5}{5-1} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.
On aurait pu obtenir ce même résultat à l'aide des ordonnées : $\dfrac{2-5}{5-7} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$.
Donc, le rapport des longueurs $GJ : JH$ est égal à $3 : 2$.

(c) *Solution 1*
Les abscisses de $D(1, 6)$ et de $E(7, 9)$ ont une différence de $7 - 1 = 6$.
En l'écrivant sous la forme $2 + 4$, on sépare cette différence en un rapport de $1 : 2$.
Les ordonnées de $D(1, 6)$ et de $E(7, 9)$ ont une différence de $9 - 6 = 3$.
En l'écrivant sous la forme $1 + 2$, on sépare cette différence en un rapport de $1 : 2$.
Puisque D a pour coordonnées $(1, 6)$, et puisque l'abscisse et l'ordonnée du point E sont supérieurs à ceux du point F, il en découle que F devrait avoir pour coordonnées $(1 + 2,\ 6 + 1)$, soit $(3, 7)$.
En vérifiant les points $D(1, 6)$, $F(3, 7)$ et $E(7, 9)$, on obtient

$$\frac{3-1}{7-3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{7-6}{9-7} = \frac{1}{2}$$

Donc, $F(3, 7)$ divise le segment de droite reliant le point $D(1, 6)$ au point $E(7, 9)$ en deux segments dont les longueurs ont un rapport de $1 : 2$.

Solution 2
Supposons que F a pour coordonnées (a, b).
Puisque $F(a, b)$ divise le segment de droite reliant le point $D(1, 6)$ au point $E(7, 9)$ en deux segments dont les longueurs ont un rapport de $1 : 2$, alors $\dfrac{a-1}{7-a} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{b-6}{9-b} = \dfrac{1}{2}$.
D'après $\dfrac{a-1}{7-a} = \dfrac{1}{2}$, on obtient $2a - 2 = 7 - a$, d'où $3a = 9$ ou $a = 3$.
D'après $\dfrac{b-6}{9-b} = \dfrac{1}{2}$, on obtient $2b - 12 = 9 - b$, d'où $3b = 21$ ou $b = 7$.
Donc, $F(3, 7)$ divise le segment de droite reliant le point $D(1, 6)$ au point $E(7, 9)$ en deux segments dont les longueurs ont un rapport de $1 : 2$.

(d) Sachant que $M(7,5)$ divise le segment de droite reliant le point $K(1,q)$ au point $L(p,9)$ en deux segments dont les longueurs ont un rapport de $3:4$, on peut écrire

$$\frac{7-1}{p-7}=\frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{5-q}{9-5}=\frac{3}{4}$$

Puisque $\dfrac{7-1}{p-7}=\dfrac{6}{p-7}$ et $\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{8}$, alors $\dfrac{6}{p-7}=\dfrac{6}{8}$, d'où $p-7=8$ ou $p=15$.
Puisque $\dfrac{5-q}{9-5}=\dfrac{5-q}{4}$, alors $\dfrac{5-q}{4}=\dfrac{3}{4}$, d'où $5-q=3$ ou $q=2$.
Donc, $M(7,5)$ divise le segment de droite reliant le point $K(1,2)$ au point $L(15,9)$ en deux segments dont les longueurs ont un rapport de $3:4$.

2. (a) Par définition, $\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline 7 & 3 \\ \hline 2 & 7 \\ \hline\end{array} \right\rangle = 73+27+72+37=209$.

(b) On remarque dans un premier temps qu'un nombre à deux chiffres, « mn », est égal à $10m+n$.
Donc,

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} \right\rangle &= \text{« } ab \text{ »} + \text{« } cd \text{ »} + \text{« } ac \text{ »} + \text{« } bd \text{ »} \\ &= (10a+b)+(10c+d)+(10a+c)+(10b+d) \\ &= 20a+11b+11c+2d\end{aligned}$$

d'où

$$\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & b \\ \hline c & 7 \\ \hline\end{array} \right\rangle = 20\times 5+11b+11c+2\times 7 = 11b+11c+114$$

et

$$\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline x & b+1 \\ \hline c-3 & y \\ \hline\end{array} \right\rangle = 20x+11(b+1)+11(c-3)+2y = 20x+11b+11c+2y-22$$

Afin que ces deux grilles soient équivalentes, il faut que $20x+2y-22=114$, d'où $20x+2y=136$ ou $10x+y=68$.
Puisque x et y sont des chiffres, on doit donc avoir $x=6$ et $y=8$. (Il n'y a aucune autres possibilités car x ne peut pas être supérieur ou égal à 7 (puisque y est supérieur ou égal à 0) et x ne peut pas être inférieur ou égal à 5 (puisque y est inférieur ou égal à 9).)

(c) À l'aide de notre travail précédent,

$$\begin{aligned}&\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} \right\rangle - \left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline a+1 & b-2 \\ \hline c-1 & d+1 \\ \hline\end{array} \right\rangle \\ &= (20a+11b+11c+2d)-(20(a+1)+11(b-2)+11(c-1)+2(d+1)) \\ &= (20a+11b+11c+2d)-(20a+11b+11c+2d+20-22-11+2) \\ &= -20+22+11-2 \\ &= 11\end{aligned}$$

Donc, la différence ne peut avoir qu'une seule valeur, soit 11.

(d) D'après notre travail précédent, $\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array} \right\rangle = 20a + 11b + 11c + 2d$.

Donc, il faut déterminer tous les chiffres non nuls a, b, c, d qui vérifient

$$20a + 11b + 11c + 2d = 104$$

On sait que chacun des chiffres b, c et d est un entier supérieur ou égal à 1, alors $11b+11c+2d$ est supérieur ou égal à 24, d'où $20a = 104 - (11b + 11c + 2d)$ est inférieur ou égal à 80.
Puisque $20a$ est inférieur ou égal à 80, alors a est inférieur ou égal à 4.
Puisque a est un entier supérieur ou égal à 1, alors les valeurs possibles de a sont 1, 2, 3 ou 4.

<u>1^er cas : $a = 1$</u>
Dans ce cas, $11b + 11c + 2d = 104 - 20 \times 1 = 84$.
On remarque que $11(b + c) = 11b + 11c = 84 - 2d$ doit être pair car $82 - 2d = 2(42 - d)$.
Puisque $11(b + c)$ est pair, alors $b + c$ est pair.
Puisque $2d$ est positif, alors $11(b + c)$ est inférieur à 84, d'où $b + c$ est inférieur à 8.
Puisque d est inférieur ou égal à 9, alors $2d$ est inférieur ou égal à 18, d'où $11(b+c) = 84-2d$ est supérieur ou égal à $84 - 18 = 66$.
Donc, $b + c$ est supérieur ou égal à 6.
Puisque $b+c$ est pair et est à la fois supérieur ou égal à 6 et inférieur à 8, alors uniquement $b + c = 6$ est possible.
Si $b + c = 6$, alors $11(b + c) = 66$, donc $2d = 84 - 11(b + c) = 18$, d'où $d = 9$.
De plus, lorsque $b + c = 6$, b et c peuvent prendre comme valeurs soit 1 et 5, soit 2 et 4, soit 3 et 3, soit 4 et 2, soit 5 et 1. Étant des chiffres non nuls, b et c ne peuvent pas prendre comme valeurs 6 et 0 ou 0 et 6.
Il y a donc 5 grilles dans ce cas :

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 5 & 9 \\ \hline \end{array}\ , \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 9 \\ \hline \end{array}\ , \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline \end{array}\ , \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 9 \\ \hline \end{array}\ , \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5 \\ \hline 1 & 9 \\ \hline \end{array}$$

<u>2^e cas : $a = 2$</u>
Dans ce cas, $11b + 11c + 2d = 104 - 20 \times 2 = 64$.
Comme dans le 1^er cas, $b + c$ est pair.
Puisque $2d$ est positif, alors $11(b + c)$ est inférieur à 64, d'où $b + c$ est inférieur à 6.
Puisque d est inférieur ou égal à 9, alors $2d$ est inférieur ou égal à 18, d'où $11(b+c) = 64-2d$ est supérieur ou égal à $64 - 18 = 46$.
Donc, $b + c$ est supérieur à 4.
Donc, $b + c$ doit être un entier pair qui est à la fois inférieur à 6 et supérieur à 4.
Puisqu'il n'existe aucun tel entier, ce cas n'a aucune solution.

<u>3^e cas : $a = 3$</u>
Dans ce cas, $11b + 11c + 2d = 104 - 20 \times 3 = 44$.
Comme dans le 1^er cas, $b + c$ est pair.
Puisque $2d$ est positif, alors $11(b + c)$ est inférieur à 44, d'où $b + c$ est inférieur à 4.
Puisque d est inférieur ou égal à 9, alors $2d$ est inférieur ou égal à 18, d'où $11(b+c) = 44-2d$ est supérieur ou égal à $44 - 18 = 26$.
Donc, $b + c$ est supérieur à 2.
Donc, $b + c$ doit être un entier pair qui est à la fois inférieur à 4 et supérieur à 2.
Puisqu'il n'existe aucun tel entier, ce cas n'a aucune solution.

<u>4^e cas : $a = 4$</u>
Dans ce cas, $11b + 11c + 2d = 104 - 20 \times 4 = 24$.
Puisque $b \geq 1$, $c \geq 1$ et $d \geq 1$, alors $11b + 11c + 2d \geq 24$.
Seuls $b = c = d = 1$ satisfont à $11b + 11c + 2d$.
Il y a donc une seule grille dans ce cas : $\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$.

Pour résumer, les grilles qui satisfont à $\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} \right\rangle = 104$ sont

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 5 & 9 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 9 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 9 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5 \\ \hline 1 & 9 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

3. (a) Après que la Personne 4 se soit assise, il y a 1 personne à la table de gauche, 1 personne à la table du milieu et 2 personnes à la table de droite.
On prolonge le tableau :

Gauche		Milieu		Droite	
5		3		6	P1
5	P2	3		3	
$\frac{5}{2}$		3	P3	3	
$\frac{5}{2}$		$\frac{3}{2}$		3	P4
$\frac{5}{2}$	P5	$\frac{3}{2}$		2	
$\frac{5}{3}$		$\frac{3}{2}$		2	P6
$\frac{5}{3}$	P7	$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	

La Personne 5 s'est assise à la table de gauche car $\frac{5}{2} = 2{,}5$ est supérieur à $\frac{3}{2} = 1{,}5$.

La Personne 6 s'est assise à la table de droite car $\frac{5}{3} \approx 1{,}67$ et $\frac{3}{2} = 1{,}5$ sont tous les deux inférieurs à 2.

La Personne 7 s'est assise à la table de gauche car $\frac{5}{3} \approx 1{,}67$ est supérieur à $\frac{3}{2} = 1{,}5$.

Donc, pour récapituler, la Personne 5 s'est assise à la table de gauche, la Personne 6 s'est assise à la table de droite et la Personne 7 s'est assise à la table de gauche.

(b) Supposons qu'il existe des entiers G, M, D qui admettraient l'ordre de choix de tables décrit dans la question.

On construit un tableau similaire à l'aide des renseignements fournis. De plus, on calcule dans chaque rangée les parts de chocolat que reçoit chaque personne en utilisant les renseignements fournis quant aux emplacements des personnes précédentes :

Gauche		Milieu		Droite	
G	P1	M		D	
$\frac{1}{2}G$		M	P2	D	
$\frac{1}{2}G$		$\frac{1}{2}M$		D	P3
$\frac{1}{2}G$	P4	$\frac{1}{2}M$		$\frac{1}{2}D$	
$\frac{1}{3}G$	P5	$\frac{1}{2}M$		$\frac{1}{2}D$	
$\frac{1}{4}G$	P6	$\frac{1}{2}M$		$\frac{1}{2}D$	

Puisque la Personne 1 s'est assise à la table de gauche, alors sa part de chocolat à cette table est supérieure ou égale à celles des tables du milieu ou de droite.

Donc, $G \geq M$ et $G \geq D$.

Puisque la Personne 2 s'est assise à la table du milieu, alors sa part de chocolat à cette table est à la fois supérieure à celle de la table de gauche (on remarque que ces parts ne sont pas égales car la Personne 2 ne s'est pas assise à la table de gauche) et supérieure ou égale à celle de la table de droite.

Donc, $M > \frac{1}{2}G$ et $M \geq D$.

Puisque la Personne 6 s'est assise à la table de gauche, alors sa part de chocolat à cette table est supérieure ou égale à celles des tables du milieu ou de droite.

Donc, $\frac{1}{4}G \geq \frac{1}{2}M$ et $\frac{1}{4}G \geq \frac{1}{2}D$.

On remarque que l'inéquation $\frac{1}{4}G \geq \frac{1}{2}M$ est équivalente à $\frac{1}{2}G \geq M$.

On a donc $M > \frac{1}{2}G$ et $\frac{1}{2}G \geq M$.

Or, ces deux inéquations sont contradictoires et ne peuvent pas être vraies toutes les deux.

Donc il n'y a pas d'entiers G, M, D qui admettraient l'ordre de choix de tables décrit dans la question.

(c) Puisque $G = 9$, la 9e personne à s'asseoir à la table de gauche recevra une part de 1 kg.
Puisque $M = 19$, la 19e personne à s'asseoir à la table du milieu recevra une part de 1 kg.
Puisque $D = 25$, la 25e personne à s'asseoir à la table de droite recevra une part de 1 kg.
On remarque également qu'à chaque fois qu'une personne s'assied à une table, les membres de cette table voient leur part de chocolat diminuer.
Puisque chaque personne décide de s'asseoir à la table où sa part de chocolat sera la plus grande à ce moment précis, il ne peut y avoir 10 personnes à la table de gauche avant qu'il n'y ait 19 personnes à la table du milieu et 25 personnes à la table de droite car la 10e personne à la table de gauche aurait reçu une plus grande part de chocolat en s'asseyant à la table du milieu ou de droite.
De même, il ne peut y avoir 20 personnes à la table du milieu avant qu'il n'y ait 9 personnes à la table de gauche et 25 personnes à la table de droite. De plus, il ne peut y avoir 26 personnes à la table de droite avant qu'il n'y ait 9 personnes à la table de gauche et 19 personnes à la table du milieu.
Autrement dit, il faut qu'il y ait 9 personnes à la table de gauche, 19 personnes à la table du milieu et 25 personnes à la table de droite avant qu'il y ait plus de 9, 19 et 25 personnes aux tables de gauche, du milieu et de droite.
À ce point, $9 + 19 + 25 = 53$ personnes se sont assises au total.
Le plus grand multiple de 53 qui est inférieur à 2019 est $38 \times 53 = 2014$.
On remarque aussi que $38 \times 9 = 342$, que $38 \times 19 = 722$ et que $38 \times 25 = 950$.
La 342e personne à s'asseoir à la table de gauche recevra une part de $\frac{9}{342}$ kg $= \frac{1}{38}$ kg.
La 722e personne à s'asseoir à la table du milieu recevra une part de $\frac{19}{722}$ kg $= \frac{1}{38}$ kg.
La 950e personne à s'asseoir à la table de droite recevra une part de $\frac{25}{950}$ kg $= \frac{1}{38}$ kg.
Selon un argument semblable à celui présenté ci-dessus, il ne peut y avoir plus de 342 personnes à la table de gauche avant qu'il n'y ait 722 personnes à la table du milieu et 950 personnes à la table de droite. De même, il ne peut y avoir plus de 722 personnes à la table du milieu avant qu'il n'y ait 342 personnes à la table de gauche et 950 personnes à la table de droite. Selon le même argument, il ne peut y avoir plus de 950 personnes à la table de droite avant qu'il n'y ait 342 personnes à la table de gauche et 722 personnes à la table du milieu.
Autrement dit, une fois que 2014 personnes se seront assises, il y aura 342 personnes à la table de gauche, 722 personnes à la table du milieu et 950 personnes à la table de droite.
Afin de déterminer à quelle table s'assiéra la Personne 2019, il faut déterminer où seront assises les Personnes 2015, 2016, 2017 et 2018 :

Gauche		Milieu		Droite	
$\frac{9}{343} \approx 0{,}026239$		$\frac{19}{723} \approx 0{,}026279$		$\frac{25}{951} \approx 0{,}026288$	P2015
$\frac{9}{343} \approx 0{,}026239$		$\frac{19}{723} \approx 0{,}026279$	P2016	$\frac{25}{952} \approx 0{,}026261$	
$\frac{9}{343} \approx 0{,}026239$		$\frac{19}{724} \approx 0{,}026243$		$\frac{25}{952} \approx 0{,}026261$	P2017
$\frac{9}{343} \approx 0{,}026239$		$\frac{19}{724} \approx 0{,}026243$	P2018	$\frac{25}{953} \approx 0{,}026233$	
$\frac{9}{343} \approx 0{,}026239$	P2019	$\frac{19}{725} \approx 0{,}026207$		$\frac{25}{953} \approx 0{,}026233$	

Donc, la Personne 2019 s'assiéra à la table de gauche.