Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

le mercredi 20 novembre 2019

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 21 novembre 2019

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

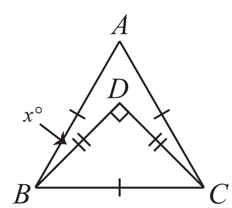
Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

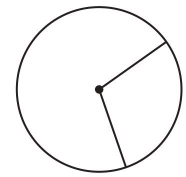
Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est équilatéral. Le point D est situé à l'intérieur du triangle ABC de manière que le triangle BDC soit rectangle en D et que $DB = DC$. Sachant que $\angle ABD = x^\circ$, quelle est la valeur de x ?

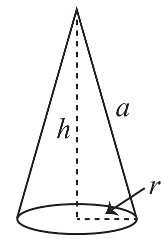


2. Binh a 20 pièces de vingt-cinq cents. Abdul a 20 pièces de dix cents ainsi que quelques pièces de vingt-cinq cents. Sachant que Binh et Abdul ont la même somme d'argent, combien de pièces de vingt-cinq cents Abdul a-t-il ?
3. Soit a, b et c des entiers positifs qui vérifient $2^a 3^b 5^c = 36\,000$. Quelle est la valeur de $3a + 4b + 6c$?
4. Ali joue à un jeu-questionnaire qui comporte 5 catégories. Chacune des catégories comprend 3 questions. Elle gagne 1 point pour chaque bonne réponse. Si elle répond correctement aux 3 questions d'une catégorie, elle gagne 1 point bonus. Ali répond correctement à 12 questions et incorrectement à 3 questions. Quels sont ses scores totaux possibles ?
5. La valeur absolue d'un nombre x est égale à la distance de 0 à x le long d'une droite numérique et est écrite sous la forme $|x|$. Par exemple, $|8| = 8$, $|-3| = 3$ et $|0| = 0$. Combien de couples d'entiers (a,b) vérifient $|a| + |b| \leq 10$?

6. Dans la figure ci-contre, on découpe un secteur d'un cercle en papier. On «enroule» les deux morceaux de papier résultants afin de former deux cônes. La somme des circonférences des bases des deux cônes est égale à la circonférence du cercle en papier d'origine. Sachant que le rapport des aires latérales des cônes est de 2 : 1, quel est le rapport des volumes des cônes ?



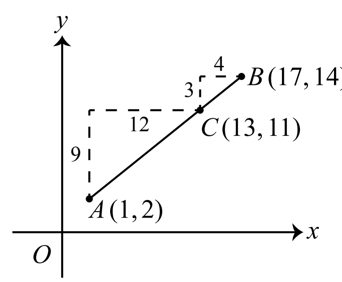
(L'*aire latérale* d'un cône est l'aire de la surface extérieure latérale du cône et exclurait donc l'aire de la base circulaire du cône. Un cône d'apothème a, de rayon r et de hauteur h a une aire latérale égale à πra et un volume égal à $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.)



PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Le point $C(13, 11)$ est situé sur le segment de droite reliant le point $A(1, 2)$ au point $B(17, 14)$. Le point C est tel que le rapport des longueurs $AC : CB$ est égal à 3 : 1 car $\dfrac{13-1}{17-13} = \dfrac{12}{4} = \dfrac{3}{1}$ et $\dfrac{11-2}{14-11} = \dfrac{9}{3} = \dfrac{3}{1}$.



Supposons que le segment de droite AB est ni horizontal ni vertical, que le point C est situé sur AB et que le point C est situé ni au point A ni au point B. Le rapport des longueurs $AC : CB$ est égal à $m : n$ uniquement lorsque l'abscisse du point C divise la distance entre les abscisses des points A et B en deux segments dont les longueurs ont un rapport de $m : n$ et lorsque l'ordonnée du point C divise la distance entre les ordonnées des points A et B en deux segments dont les longueurs ont un rapport de $m : n$.

(a) Dans l'exemple ci-dessus, déterminer la longueur de AC et la longueur de CB.

(b) Le point $J(5, 5)$ est situé sur le segment de droite reliant le point $G(11, 2)$ au point $H(1, 7)$. Déterminer le rapport des longueurs $GJ : JH$.

(c) Le point F est situé sur le segment de droite reliant le point $D(1, 6)$ au point $E(7, 9)$. Déterminer les coordonnées du point F de manière que le rapport des longueurs $DF : FE$ soit égal à 1 : 2.

(d) Le point $M(7, 5)$ est situé sur le segment de droite reliant le point $K(1, q)$ au point $L(p, 9)$ de manière que le rapport des longueurs $KM : ML$ est égal à 3 : 4. Déterminer la valeur de p et de q.

2. Dans le problème suivant, chaque grille 2×2 contient quatre chiffres positifs non nuls. Chaque case dans la grille ne contient qu'un seul chiffre. La somme des quatre entiers positifs à deux chiffres créés par les deux rangées et les deux colonnes d'une grille $\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array}$ est représentée par $\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} \right\rangle$.

Par exemple, $\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 9 & 8 \\ \hline\end{array} \right\rangle = 34 + 98 + 39 + 48 = 219$.

(a) Déterminer la valeur de $\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline 7 & 3 \\ \hline 2 & 7 \\ \hline\end{array} \right\rangle$.

(b) Déterminer tous les couples de chiffres (x, y) pour lesquels $\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline 5 & b \\ \hline c & 7 \\ \hline\end{array} \right\rangle$ équivaut à $\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline x & b+1 \\ \hline c-3 & y \\ \hline\end{array} \right\rangle$.

(c) Déterminer toutes les valeurs possibles de $\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} \right\rangle$ moins $\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline a+1 & b-2 \\ \hline c-1 & d+1 \\ \hline\end{array} \right\rangle$.

(d) Déterminer toutes les grilles pour lesquelles $\left\langle \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline\end{array} \right\rangle$ équivaut à 104, et expliquer pourquoi il n'y a pas plus de grilles de ce type.

3. Il y a trois tables dans une salle. Il y a G kg de chocolat sur la table de gauche, M kg de chocolat sur la table du milieu et D kg de chocolat sur la table de droite, G, M et D étant des entiers positifs. Les gens entrent dans la salle un à la fois. Sachant que le chocolat à chaque table sera partagé de manière égale parmi les gens assis à la table, en entrant, chaque personne se dirige à la table où sa part de chocolat sera la plus grande à ce moment précis. Dans le cas où une personne pourrait obtenir la même part de chocolat à plus d'une seule table, la personne choisira toujours de s'asseoir à la table la plus à gauche.

   Par exemple, supposons que $G = 5$, que $M = 3$ et que $D = 6$. La Personne 1 s'assiéra à la table de droite car sa part de chocolat (6 kg) sera la plus grande à cette table à ce moment précis (tandis qu'aux deux autres tables, elle n'aura que 5 kg ou 3 kg). La Personne 2 s'assiéra ensuite à la table de gauche car sa part de chocolat (5 kg) sera la plus grande à cette table à ce moment précis (tandis qu'aux deux autres tables, elle n'aura que 3 kg à chaque table). Le tableau ci-contre montre les parts possibles en kg et les tables que les quatre premières personnes ont choisies.

Gauche		Milieu		Droite	
5		3		6	P1
5	P2	3		3	
$\frac{5}{2}$		3	P3	3	
$\frac{5}{2}$		$\frac{3}{2}$		3	P4

   (a) Supposons que $G = 5$, que $M = 3$ et que $D = 6$. Supposons aussi qu'un total de 7 personnes entrent dans la salle. Continuer le tableau ci-dessus afin de montrer où les 7 personnes vont s'asseoir et expliquer pourquoi les Personnes 5, 6 et 7 ont choisi de s'asseoir à ces tables-là.

   (b) Expliquer pourquoi il n'y a pas d'entiers positifs G, M et D qui admettraient l'ordre suivant comme choix de tables pour les 6 premières personnes : Gauche, Milieu, Droite, Gauche, Gauche, Gauche.

   (c) Supposons que $G = 9$, que $M = 19$ et que $D = 25$. Déterminer à quelle table s'assiéra la Personne 2019. Justifier son raisonnement.

Concours
canadien de
mathématiques
de niveau
intermédiaire
2019
(français)