Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Pascal 2018

(9^e année – Secondaire III)

le mardi 27 février 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 28 février 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Lorsqu'on place les cinq choix de réponse en ordre croissant, on obtient : 1,2; 1,4; 1,5; 2,0; 2,1. Le plus petit est 1,2.

Réponse : (B)

2. On a $\dfrac{2018 - 18 + 20}{2} = \dfrac{2000 + 20}{2} = \dfrac{2020}{2} = 1010$.

Réponse : (A)

3. Le 14 juillet survient 11 jours après le 3 juillet de la même année.
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine, le 10 juillet et le 3 juillet tombent le même jour de la semaine, soit un mercredi.
Le 14 juillet survient 4 jours après le 10 juillet. Le 14 juillet est donc un dimanche.

Réponse : (C)

4. Puisque la batterie est chargée 3 fois par semaine pendant 52 semaines, elle est chargée 156 fois en tout ($3 \times 52 = 156$).
Puisque chaque charge coute 0,75 \$ et que $156 \times 0{,}78\,\$ = 121{,}68\,\$$, le cout total des charges est de 121,65 \$.

Réponse : (E)

5. Puisque

$$3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 9 = 3 \times 3 \times 7 \times n \times n,$$

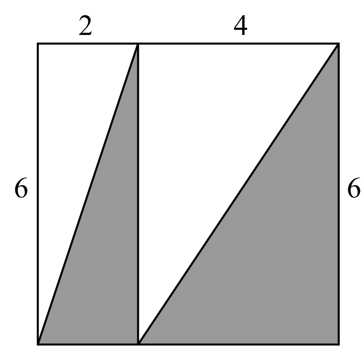
alors :

$$n \times n = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 9}{3 \times 3 \times 7} = 5 \times 5 \times 9 = 5 \times 5 \times 3 \times 3$$

Puisque $n \times n = 5 \times 5 \times 3 \times 3$, alors une valeur possible de n est $n = 5 \times 3$, ou $n = 15$.

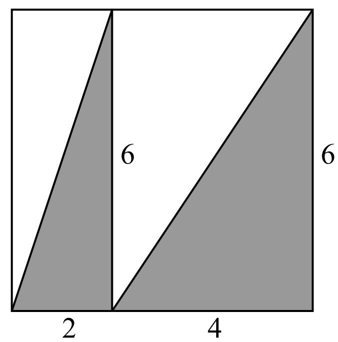
Réponse : (A)

6. *Solution 1*
On considère le carré 6×6 comme la juxtaposition d'un rectangle 2×6 sur la gauche et d'un rectangle 4×6 sur la droite.



Chacun de ces rectangles est divisé en deux parties égales par sa diagonale. La moitié de chaque rectangle est donc ombrée.
Donc, 50 % de la surface du carré est ombrée.

Solution 2
Le carré 6×6 a une aire égale à 6^2, ou 36.
Chaque triangle ombré a une hauteur de 6, soit la hauteur du carré.
Un triangle a une base de 2 et l'autre a une base de 4 :



Le triangle ombré à gauche a une aire égale à $\frac{1}{2} \times 2 \times 6$, ou 6.
Le triangle ombré à droite a une aire égale à $\frac{1}{2} \times 4 \times 6$, ou 12.
La partie ombrée du carré a une aire totale de $6 + 12$, ou 18, soit la moitié (ou 50 %) de l'aire du carré. Elle occupe donc 50 % de la surface du carré.

Réponse : (A)

7. Il y a 20 cravates en tout $(5 + 7 + 8 = 20)$ dans la boite, doit 8 sont roses.
Lorsque Stéphane choisit une cravate au hasard, il y a donc 20 choix équiprobables dont 8 sont favorables. La probabilité de choisir une cravate rose est donc égale à $\frac{8}{20}$, ou $\frac{2}{5}$.

Réponse : (C)

8. La section de la droite numérique de 0 à 5 a une longueur de 5 $(5 - 0 = 5)$.
Puisque la section est divisée en 20 parties égales, chaque partie a une largeur égale à $\frac{5}{20}$, ou $\frac{1}{4}$, ou 0,25.
Puisque S est situé à 5 espaces à la droite de 0, alors $S = 0 + 5 \times 0{,}25$, ou $S = 1{,}25$.
Puisque T est situé à 5 espaces à la gauche de 5, alors $T = 5 - 5 \times 0{,}25$, ou $T = 3{,}75$.
Donc $S + T = 1{,}25 + 3{,}75$, ou $S + T = 5$.

Réponse : (E)

9. Si $\heartsuit = 1$, alors $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 1 \times 1 \times 1 = 1$, ce qui est impossible puisque ∇ et $\heartsuit$ sont deux entiers différents.
Si $\heartsuit = 2$, alors $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 2 \times 2 \times 2 = 8$, ce qui est possible.
Si $\heartsuit = 3$, alors $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 3 \times 3 \times 3 = 27$, ce qui est impossible puisque ∇ doit être inférieur à 20.
Si $\heartsuit$ est supérieur à 3, alors ∇ sera supérieur à 27, ce qui est impossible. Donc, $\heartsuit$ ne peut être supérieur à 3.
On a donc $\heartsuit = 2$ et $\nabla = 8$.
Donc $\nabla \times \nabla = 8 \times 8$, ou $\nabla \times \nabla = 64$.

Réponse : (D)

10. La droite qui passe aux points $(-2, 1)$ et $(2, 5)$ a une pente de $\dfrac{5-1}{2-(-2)}$, ou $\dfrac{4}{4}$, ou 1.
Donc si on se déplace de 1 unité vers la droite sur cette droite, on monte de 1 unité.
Donc si on se déplace de 2 unités vers la droite sur cette droite à partir du point $(-2, 1)$, on monte de 2 unités pour aboutir au point $(-2 + 2, 1 + 2)$, ou $(0, 3)$.

Réponse : (C)

11. Les mesures des angles au centre des trois secteurs ont une somme de 360°.
Le secteur *À jouer* a donc un angle au centre égal à $360^\circ - 130^\circ - 110^\circ$, ou 120°.
Un angle au centre de 120° représente $\frac{120^\circ}{360^\circ}$ ou $\frac{1}{3}$ d'un angle plein.
Donc, le bébé ours polaire a passé $\frac{1}{3}$ de la journée à jouer, ce qui correspond à $\frac{1}{3} \times 24$ heures, ou 8 heures.

Réponse : (C)

12. Parmi les numéros sur les uniformes, on remarque que :
- 11 et 13 sont des nombres premiers
- 16 est un carré parfait
- 12, 14 et 16 sont pairs

Puisque les numéros de Karl et de Liu étaient des nombres premiers, il s'agissait de 11 et de 13 dans un ordre quelconque.
Puisque le numéro de Gina était un carré parfait, il s'agissait de 16.
Puisque Helga et Julie avaient chacune un numéro pair, il s'agissait de 12 et 14 dans un ordre quelconque. (Le numéro 16 est déjà choisi.)
Donc, Ioana portait donc le numéro restant, soit le 15.

Réponse : (D)

13. Puisque le triangle équilatéral a des côtés de longueur 10, il a un périmètre de 3×10, ou 30.
En fonction de x, le rectangle a un périmètre de $x + 2x + x + 2x$, ou $6x$.
Puisque les deux périmètres sont égaux, alors $6x = 30$, d'où $x = 5$.
Or, le rectangle mesure x sur $2x$, ou 5 sur 10.
Il a donc une aire de 5×10, ou 50.

Réponse : (B)

14. La moyenne des quatre nombres $7, 9, 10$ et 11 est égale à $\frac{7+9+10+11}{4}$, ou $\frac{37}{4}$, ou 9,25, ce qui n'est pas égal au cinquième nombre, 18.
La moyenne des quatre nombres $7, 9, 10$ et 18 est égale à $\frac{7+9+10+18}{4}$, ou $\frac{44}{4}$, ou 11, ce qui est égal au cinquième nombre, 11.
On peut vérifier que la moyenne des trois autres combinaisons de quatre nombres n'est pas égale au cinquième nombre.
La réponse est donc 11.
(On remarque que la moyenne des cinq nombres donnés est égale à $\frac{7+9+10+11+18}{5}$, ou $\frac{55}{5}$, ou 11. Or, lorsqu'on enlève un nombre qui est égal à la moyenne d'un ensemble de nombres, la moyenne ne change pas. Pourquoi ?)

Réponse : (D)

15. On cherche la première fois, après 4:56, où les chiffres de l'heure seront consécutifs en ordre croissant.
Il serait bon d'essayer 5:67, mais il ne s'agit pas d'une heure valable.
De même, l'heure ne peut pas commencer par un 6, un 7, un 8 ou un 9.
Une heure qui commence par 10 ou par 11 n'a pas ses chiffres consécutifs en ordre croissant.
Si l'heure commence par 12, on obtient l'heure 12:34. Il s'agit bien de la première fois après 4:56.
On doit déterminer le nombre de minutes entre 4:56 et 12:34.

De 4:56 à 11:56, il y a 7 heures, c'est-à-dire 7×60 minutes, ou 420 minutes.
De 11:56 à 12:00, il y a 4 minutes.
De 12:00 à 12:34, il y a 34 minutes.
Donc de 4:56 à 12:34, il y a 458 minutes ($420 + 4 + 34 = 458$).

Réponse : (A)

16. On sait que $n > 6$, puisque les 6 premières lettres sont des X.
Après avoir lu 6 lettres X et 3 lettres Y, on a lu deux fois plus de X que de Y. Dans ce cas, $n = 6 + 3$, ou $n = 9$.
Après avoir lu 6 lettres X et 12 lettres Y, on a lu deux fois plus de Y que de X. Dans ce cas, $n = 6 + 12$, ou $n = 18$.
Les 12 lettres suivantes sont des Y. Après les avoir lues, on a lu 6 lettres X et 24 lettres Y.
Toutes les 96 lettres suivantes sont des X. Si on lit 6 de ces nouvelles lettres, on aura lu 12 lettres X et 24 lettres Y, soit deux fois plus de Y que de X. Dans ce cas, $n = 24 + 12$, ou $n = 36$.
Si on lit 36 autres lettres X, on aura lu 48 lettres X et 24 lettres Y, soit deux fois plus de X que de Y. Dans ce cas, $n = 24 + 48$, ou $n = 72$.
Selon l'énoncé, il y a quatre valeurs possibles de n. On les a donc toutes déterminées. Leur somme est égale à $9 + 18 + 36 + 72$, ou 135.

Réponse : (C)

17. On sait que $n = p^2q^2 = (pq)^2$.
Puisque $n < 1000$, alors $(pq)^2 < 1000$, d'où $pq < \sqrt{1000} \approx 31{,}6$.
Déterminer le nombre de valeurs possibles de n est donc équivalent à déterminer le nombre d'entiers m ($1 \leq m \leq 31 < \sqrt{1000}$) qui sont le produit de deux nombres premiers différents.
Les nombres premiers inférieurs ou égaux à 31 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 et 31.
Les produits distincts, inférieurs ou égaux à 31, de deux de ces nombres sont :

$$2 \times 3 = 6 \quad 2 \times 5 = 10 \quad 2 \times 7 = 14 \quad 2 \times 11 = 22 \quad 2 \times 13 = 26$$

$$3 \times 5 = 15 \quad 3 \times 7 = 21$$

Tout autre produit est supérieur à 31.
Il y a donc 7 valeurs de n.

Réponse : (E)

18. On considère le triangle PQR.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors :

$$\angle QPR + \angle QRP = 180^\circ - \angle PQR = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Puisque $\angle QPS = \angle RPS$, alors $\angle RPS = \frac{1}{2}\angle QPR$.
Puisque $\angle QRS = \angle PRS$, alors $\angle PRS = \frac{1}{2}\angle QRP$.
Donc :

$$\begin{aligned} \angle RPS + \angle PRS &= \tfrac{1}{2}\angle QPR + \tfrac{1}{2}\angle QRP \\ &= \tfrac{1}{2}(\angle QPR + \angle QRP) \\ &= \tfrac{1}{2} \times 60^\circ \\ &= 30^\circ \end{aligned}$$

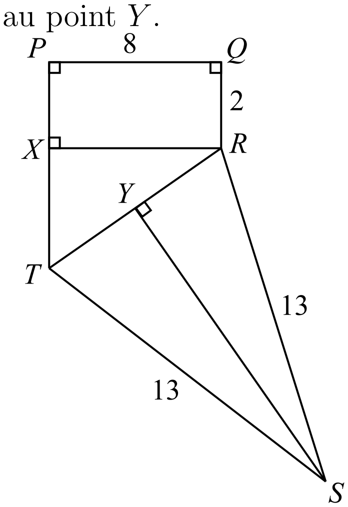
Puisque $\angle PSR = 180^\circ - (\angle RPS + \angle PRS)$, alors $\angle PSR = 180^\circ - 30^\circ$, ou $\angle PSR = 150^\circ$.

Réponse : (E)

19. On rappelle que temps $= \dfrac{\text{distance}}{\text{vitesse}}$. Pour parcourir x km à 90 km/h, il faut $\dfrac{x}{90}$ heures.
Pour parcourir x km à 120 km/h, il faut $\dfrac{x}{120}$ heures.
On sait qu'il y a une différence de 16 minutes entre ces deux intervalles de temps.
Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, 16 minutes correspondent à $\dfrac{16}{60}$ heures.
Puisque le temps écoulé à 120 km/h est 16 minutes de moins que le temps écoulé à 90 km/h, alors $\dfrac{x}{90} - \dfrac{x}{120} = \dfrac{16}{60}$. On utilise un dénominateur commun de 360 ($360 = 4 \times 90 = 3 \times 120$) pour soustraire les fractions du membre de gauche. Le membre de gauche est donc égal à $\dfrac{x}{90} - \dfrac{x}{120}$, ou $\dfrac{4x}{360} - \dfrac{3x}{360}$, ou $\dfrac{x}{360}$. L'équation est donc $\dfrac{x}{360} = \dfrac{16}{60}$.
Puisque $360 = 6 \times 60$, le membre de droite est égal à $\dfrac{16}{60}$, ou $\dfrac{16 \times 6}{360}$, ou $\dfrac{96}{360}$. L'équation est donc $\dfrac{x}{360} = \dfrac{96}{360}$, d'où $x = 96$.

Réponse : (D)

20. Au point R, on abaisse une perpendiculaire jusqu'au point X sur PT. On trace RT et on abaisse une perpendiculaire à RT du point S au point Y.



Puisque le quadrilatère $PQRX$ a trois angles droits (en P, Q et X), son quatrième angle doit être droit. $PQRX$ est donc un rectangle. Son aire est donc égale à 8×2, ou 16.
Le triangle RXT est rectangle en X.
Puisque $PQRX$ est un rectangle, alors $XR = PQ = 8$ et $PX = QR = 2$.
Puisque $PX = 2$ et que $XT = PT - PX$, alors $XT = 8 - 2$, ou $XT = 6$.
L'aire du triangle RXT est égale à $\frac{1}{2} \times XT \times XR$, ou $\frac{1}{2} \times 6 \times 8$, ou 24.
D'après le théorème de Pythagore, $TR = \sqrt{XT^2 + XR^2}$.
Donc $TR = \sqrt{6^2 + 8^2}$, ou $TR = \sqrt{36 + 64}$, ou $T = \sqrt{100}$. Donc $TR = 10$, puisque $TR > 0$.
Puisque le triangle TSR est isocèle ($ST = SR$) et que SY est perpendiculaire à TR, alors Y est le milieu de TR.
Puisque $TY = YR = \frac{1}{2}TR$, alors $TY = YR = 5$.
D'après le théorème de Pythagore, $SY = \sqrt{ST^2 - TY^2}$.
Donc $SY = \sqrt{13^2 - 5^2}$, ou $SY = \sqrt{169 - 25}$, ou $SY = \sqrt{144}$. Donc $SY = 12$, puisque $SY > 0$.
L'aire du triangle STR est égale à $\frac{1}{2} \times TR \times SY$, ou $\frac{1}{2} \times 10 \times 12$, ou 60.
L'aire du pentagone $PQRST$ est égale à la somme des aires de ses morceaux. Elle est donc égale à $60 + 24 + 16$, ou 100.

Réponse : (D)

21. On détermine le nombre de façons de se rendre à chacune des cases blanches du quadrillage en suivant les conditions données.
Dans la première rangée, il y a 1 façon de se rendre à chacune des cases blanches, soit en commençant un trajet dans cette case.
Dans chacune des rangées suivantes, le nombre de façons de se rendre à une case blanche est égal à la somme des façons de se rendre à chacune des cases blanches de la rangée précédente qui est diagonalement en haut à gauche ou en haut à droite de la case donnée. En effet, n'importe quel trajet qui passe par une case blanche doit parvenir d'une de ces cases blanches de la rangée précédente.
Dans la deuxième rangée, il y a 2 façons de se rendre à chacune des cases blanches, soit 1 façon à partir de la case blanche en haut à sa gauche et 1 façon à partir de la case blanche en haut à sa droite.
Dans la troisième rangée, il y a 2 façons de se rendre à la 1$^{\text{re}}$ case blanche, 4 façons de se rendre à la 2$^{\text{e}}$ case blanche et 2 façons de se rendre à la 3$^{\text{e}}$ case blanche.
On continuant de la sorte, on obtient les nombres de façons suivants de se rendre dans les diverses cases blanches :

1		1		1
	2		2	
2		4		2
	6		6	
6		12		6

Puisqu'il y a 6, 12 et 6 façons de se rendre dans les trois cases blanches de la dernière rangée, il y a 24 trajets possibles $(6 + 12 + 6 = 24)$ de la rangée du haut jusqu'à la rangée du bas.
RÉPONSE : (D)

22. Chaque fil a deux extrémités.
Dans un circuit Miniou de 13 788 fils, il y a donc 27 576 extrémités $(13\,788 \times 2 = 27\,576)$.
Dans un circuit Miniou, chaque noeud est relié à exactement trois fils.
Donc, 3 extrémités de fils arrivent à chaque noeud. Il y a donc 9192 noeuds $(27\,576 \div 3 = 9192)$.
RÉPONSE : (B)

23. Le cercle de centre P a un rayon de 1 et passe au point Q. Donc $PQ = 1$.
Le cercle de diamètre PQ a donc un rayon de $\frac{1}{2}$ et une aire égale à $\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2$, ou $\frac{1}{4}\pi$.
Pour déterminer l'aire de la région ombrée, on déterminera l'aire de la partie commune aux deux grands cercles et on soustraira l'aire du cercle de diamètre PQ.
Soit X et Y les points d'intersection des deux cercles.
On trace les segments XY, PQ, PX, PY, QX et QY (Figure 1).
Par symétrie, l'aire de la région ombrée de part et d'autre de XY est la même.
L'aire de la région ombrée à la droite de XY est égale à l'aire du secteur $PXQY$ du cercle gauche moins l'aire du triangle PXY (Figure 2).

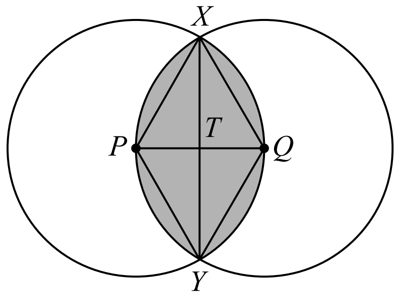


Figure 1

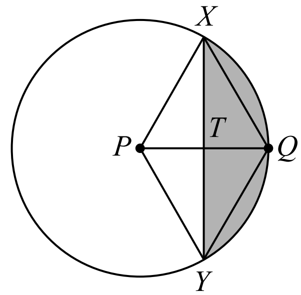


Figure 2

Puisque chaque grand cercle a un rayon de 1, alors $PQ = PX = PY = QX = QY = 1$.
Les triangles XPQ et YPQ sont donc équilatéraux. Donc $\angle XPQ = \angle YPQ = 60^\circ$.
Donc $\angle XPY = 120^\circ$. Puisque $\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$, le secteur $PXQY$ est $\frac{1}{3}$ d'un disque. Son aire est donc égale à $\frac{1}{3}\pi 1^2$, ou $\frac{1}{3}\pi$.
On considère le triangle PXY.
On sait que $PX = PY = 1$ et que $\angle XPQ = \angle YPQ = 60^\circ$.
Puisque le triangle PXY est isocèle et que PQ est la bissectrice de l'angle XPY, PQ est perpendiculaire à XY au point T. Donc $XT = TY$.
Par symétrie, $PT = TQ$. Puisque $PQ = 1$, alors $PT = \frac{1}{2}$.
Le triangle PTX est rectangle en T. D'après le théorème de Pythagore,

$$XT = \sqrt{PX^2 - PT^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

puisque $XT > 0$.
Donc $XY = 2XT = \sqrt{3}$.
L'aire du triangle PXY est égale à $\frac{1}{2}(XY)(PT)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\right)$, ou $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
L'aire de la région ombrée à la droite de XY est donc égale à $\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (la différence entre l'aire du secteur $PXQY$ et celle du triangle PXT).
L'aire de la région ombrée de la figure 1 moins celle du petit cercle de diamètre PQ est donc égale à :

$$2\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{1}{4}\pi = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}443$$

Parmi les choix de réponse, elle est plus près de 0,44.

RÉPONSE : (E)

24. On dira que les élèves qui ont une taille de 1,60 m sont grands et que ceux qui ont une taille de 1,22 m sont petits.
Pour que la taille moyenne de quatre élèves soit supérieure à 1,50 m, la somme de leurs tailles doit être supérieure à 6,00 m ($4 \times 1{,}50$ m $= 6{,}00$ m).
Si on considère 2 grands élèves et 2 petits élèves, la somme de leurs tailles est égale à 5,64 m ($2 \times 1{,}60$ m $+ 2 \times 1{,}22$ m $= 5{,}64$ m), ce qui est insuffisant.
Dans un groupe de 4 élèves consécutifs, il doit donc y avoir plus de grands élèves et moins de petits élèves.
Si on considère 3 grands élèves et 1 petit élève, la somme de leurs tailles est égale à 6,02 m ($3 \times 1{,}60$ m $+ 1 \times 1{,}22$ m $= 6{,}02$ m), ce qui est suffisant.
Dans l'alignement des élèves de madame Wagner, n'importe quel groupe de 4 élèves consécutifs doit donc contenir au moins 3 grands élèves et au plus 1 petit élève. (4 grands élèves et 0 petit élève donnent aussi une moyenne supérieure à 1,50 m.)
Pour que la taille moyenne de 7 élèves soit inférieure à 1,50 m, la somme de leurs tailles doit être inférieure à $7 \times 1{,}50$ m, ou 10,50 m.
On remarque que la somme des tailles de 6 grands élèves et 1 petit élève est égale à $6 \times 1{,}60$ m $+ 1 \times 1{,}22$ m, ou 10,82 m, tandis que celle de 5 grands élèves et 2 petits élèves est égale à $5 \times 1{,}60$ m $+ 2 \times 1{,}22$ m, ou 10,44 m.
Dans l'alignement des élèves de madame Wagner, n'importe quel groupe de 7 élèves consécutifs.doit donc contenir au plus 5 grands élèves et au moins 2 petits élèves
On détermine maintenant la longueur maximale d'un tel alignement. Un grand élève sera représenté par G et un petit élève sera représenté par P.
Après certains tâtonnements, on découvre GGPGGGPGG.
L'alignement GGPGGGPGG a une longueur de 9. Chaque sous-groupe de 4 élèves consécutifs contient exactement 3 G et chaque sous-groupe de 7 élèves consécutifs contient exactement 5 G. Les moyennes sont donc respectées.
On prétend qu'il s'agit de l'alignement le plus long. La réponse est donc 9, ou (D).
Supposons, au contraire, qu'il y a un alignement de longueur supérieure ou égale à 10 et soit $abcdefghjk$ les 10 premières tailles. On considère le tableau suivant de tailles :

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \\ b & c & d & e & f & g & h \\ c & d & e & f & g & h & j \\ d & e & f & g & h & j & k \end{array}$$

Ce tableau démontre qu'il est impossible d'avoir au moins 10 élèves dans l'alignement.
Chaque rangée du tableau est une liste de tailles de 7 élèves consécutifs de l'alignement $abcdefghjk$.
La somme de chaque rangée est donc inférieure à 10,50 m.
Chaque colonne du tableau est une liste de tailles de 4 élèves consécutifs de l'alignement $abcdefghjk$.
La somme de chaque colonne est donc supérieure à 6,00 m.
La somme des nombres du tableau est la somme des nombres des 4 rangées. Elle doit être inférieure à $4 \times 10{,}50$ m, ou 42,00 m.
La somme des nombres du tableau est la somme des nombres des 7 colonnes. Elle doit être supérieure à $7 \times 6{,}00$ m, ou 42,00 m.
Or, la somme ne peut être inférieure et supérieure à 42,00 m.
Notre hypothèse est donc infirmée et il est donc impossible d'avoir un alignement de longueur supérieure ou égale à 10.
(Il existe plus d'une façon de se convaincre qu'il ne peut pas y avoir plus de 9 élèves dans l'alignement.)

Réponse : (D)

25. On suppose que $m = 500$, $1 \leq n \leq 499$, $1 \leq r \leq 15$, $2 \leq s \leq 9$ et $t = 0$.
Puisque $s > 0$, alors selon l'algorithme, t est égal au reste lorsque r est divisé par s.
Puisque $t = 0$, alors r est un multiple de s. Donc $r = as$, a étant un entier strictement positif.
Puisque $r > 0$, alors selon l'algorithme, s est égal au reste lorsque n est divisé par r.
En d'autres mots, $n = br + s$, b étant un entier strictement positif.
Puisque $r = as$, alors $n = bas + s$, ou $n = (ba + 1)s$.
En d'autres mots, n est un multiple de s. On a donc $n = cs$, c étant un entier strictement positif.
Puisque $n > 0$, alors r est égal au reste lorsque m est divisé par n.
En d'autres mots, $m = dn + r$, d étant un entier strictement positif.
Puisque $r = as$ et $n = cs$, alors $m = dcs + as$, ou $m = (dc + a)s$.
En d'autres mots, m est un multiple de s. On a donc $m = es$, e étant un entier strictement positif.
Or $m = 500$ et $2 \leq s \leq 9$.
Puisque m est un multiple de s, alors s est un diviseur de 500. Les valeurs possibles de s sont donc $s = 2, 4, 5$. (Aucun des nombres $1, 3, 6, 7, 8, 9$ n'est un diviseur de 500.)
On sait que r est un multiple de s, que $r > s$ (puisque s est égal au reste lorsque n est divisé par r) et que $1 \leq r \leq 15$.
Si $s = 5$, alors $r = 10$ ou $r = 15$.
Si $s = 4$, alors $r = 8$ ou $r = 12$.
Si $s = 2$, alors $r = 4, 6, 8, 10, 12, 14$.

Supposons que $s = 5$ et $r = 10$.
Puisque $m = dn + r$, alors $500 = dn + 10$, d'où $dn = 490$.
Donc n est un diviseur de 490. Il est un multiple de 5 (puisque $n = cs$) et doit être supérieur à $r = 10$. Il doit aussi être 5 de plus qu'un multiple de 10 (puisque le reste est s lorsque n est divisé par r).
Puisque $490 = 5 \times 2 \times 7^2$, alors les diviseurs de 490 qui sont multiples de 5 sont les nombres $5, 10, 35, 70, 245$ et 490 (ces nombres sont 5 fois les diviseurs de 2×7^2). Parmi ces nombres, ceux qui sont supérieurs à $r = 10$ et qui ont un reste de 5 lorsqu'on les divise par 10 sont 35 et 245. Dans ce cas, les valeurs possibles de n sont 35 et 245.

Pour chaque paire de valeurs de s et de r, on détermine les valeurs de n qui vérifient les conditions suivantes :

- n est un diviseur de $500 - r$,
- n est un multiple de s,
- n est supérieur à r et
- s est le reste lorsque n est divisé par r.

On remplit le tableau suivant :

s	r	$500 - r$	Diviseurs de $500 - r$ qui sont multiples de s	Valeurs possibles de n
5	10	$490 = 5 \times 2 \times 7^2$	$5, 10, 35, 70, 245, 490$	$35, 245$
5	15	$485 = 5 \times 97$	$5, 485$	485
4	8	$492 = 4 \times 3 \times 41$	$4, 12, 164, 492$	$12, 164, 492$
4	12	$488 = 4 \times 2 \times 61$	$4, 8, 244, 488$	244
2	4	$496 = 2 \times 2^3 \times 31$	$2, 4, 8, 16, 62, 124, 248, 496$	62
2	6	$494 = 2 \times 13 \times 19$	$2, 26, 38, 494$	$26, 38, 494$
2	8	$492 = 2 \times 2 \times 3 \times 41$	$2, 4, 6, 12, 82, 164, 246, 492$	82
2	10	$490 = 2 \times 5 \times 7^2$	$2, 10, 14, 70, 98, 490$	Aucune
2	12	$488 = 2 \times 2^2 \times 61$	$2, 4, 8, 122, 244, 488$	122
2	14	$486 = 2 \times 3^5$	$2, 6, 18, 54, 162, 486$	Aucune

Dans chaque rangée, on écrit $500 - r$ en factorisation première dans la troisième colonne, on écrit les diviseurs de $500 - r$ qui sont multiples de s dans la quatrième colonne et on détermine lesquels sont supérieurs à r et donnent un reste égal à s lorsqu'on les divise par r dans la cinquième colonne.

Les valeurs possibles de n sont $35, 245, 485, 12, 164, 492, 244, 62, 26, 38, 494, 82$ et 122.
Il y en a 13.

Réponse : (E)