Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2018

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 16 mai 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 17 mai 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Comité du concours Gauss

7e année

1. Puisque $21 - 13 = 8$, le nombre que l'on doit soustraire de 21 pour obtenir 8 est 13.
Réponse : (B)

2. D'après le diagramme, 20 % des 100 élèves ont choisi la banane.
Puisque 20 % de 100 est 20, alors 20 élèves ont choisi la banane.
Réponse : (D)

3. Il y a 30 minutes entre 8 h 30 et 9 h 00.
Il y a 5 minutes entre 9 h 00 et 9 h 05.
La durée du cours est donc de 35 minutes ($30 + 5 = 35$).
Réponse : (C)

4. Le carré a une aire de 144 cm^2. Puisque $\sqrt{144} = 12$ ($12^2 = 144$), le carré a des côtés de 12 cm.
Réponse : (D)

5. Neuf items à 1 \$ et cinq items à 2 \$ coutent (9 × 1 \$) + (5 × 2 \$), ce qui revient à 9 \$ + 10 \$, ou 19 \$. La bonne réponse est donc (C).
(On peut vérifier que chacun des autres choix de réponse coute moins de 18 \$.)
Réponse : (C)

6. On récrit chaque fraction sous forme d'un nombre fractionnaire.
On obtient $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$, $\frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$, $\frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$ et $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$.
Le nombre situé entre 3 et 4 sur une droite numérique est $3\frac{1}{4}$, ou $\frac{13}{4}$.
Réponse : (D)

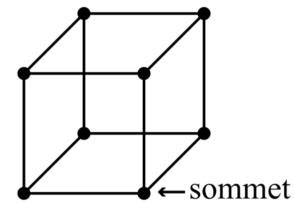
7. Il y a 9 résultats équiprobables possibles en tout ($2+3+4 = 9$), c'est-à-dire 9 graines que Carrie peut retirer. Il y a 2 graines de tournesol, c'est-à-dire 2 résultats favorables.
La probabilité pour Carrie de choisir une graine de tournesol est de $\frac{2}{9}$.
Réponse : (A)

8. Puisque $x = 4$, alors $y = 3 \times 4$, ou $y = 12$.
Réponse : (A)

9. Les mesures des trois angles de n'importe quel triangle ont une somme de 180°.
Si un angle d'un triangle isocèle mesure 50°, les mesures des deux autres angles ont une somme de $180° - 50°$, ou 130°.
Puisque le triangle est isocèle, deux des angles du triangle sont égaux.
Si les deux angles inconnus sont égaux, ils mesurent chacun $130° \div 2$, ou 65°.
Or, 65° et 65° n'est pas un des choix de réponses.
Si les deux angles égaux mesurent chacun 50°, alors le troisième angle mesure $180° - 50° - 50°$, ou 80°.
Donc, les deux angles inconnus du triangle pourraient mesurer 50° et 80°.
Réponse : (C)

10. La lettre qui est à 3 positions de la lettre W, dans le sens des aiguilles d'une montre, est le Z.
Si on continue dans le même sens à partir de Z, l'alphabet recommence à la lettre A.
Donc, la lettre qui est située à 4 positions du W est le A.
La lettre qui est située à 4 positions du I est le M.
La lettre qui est située à 4 positions du N est le R.
Le texte encodé du message WIN est AMR.
Réponse : (C)

11. Chaque cube a 8 sommets, comme on le voit dans la figure ci-contre.



Réponse : (E)

12. La base de 2 cm sur 2 cm du prisme a une aire de 2×2 cm^2, ou 4 cm^2.
La face supérieure du prisme est identique à la base. Elle a donc une aire de 4 cm^2.
Chacune des 4 faces verticales (latérales) du prisme mesure 2 cm sur 1 cm. Chacune a donc une aire de 2×1 cm^2, ou 2 cm^2.
L'aire totale du prisme est donc égale à 2×4 cm^2 $+ 4 \times 2$ cm^2, ou 16 cm^2.

Réponse : (E)

13. Puisque la machine distribue 11 410 kg de riz dans 3260 sacs, chaque sac contient 11 410 kg$\div$3260 de riz, ou 3,5 kg de riz.
Puisqu'une famille utilise 0,25 kg de riz par jour, la famille mettra $3{,}5 \div 0{,}25$ jours, ou 14 jours pour vider un sac de riz.

Réponse : (D)

14. Puisque Dalia célèbre son anniversaire mercredi, alors un nombre exact de semaines plus tard, ce sera aussi un mercredi.
Donc, 8 semaines plus tard, ce sera un mercredi.
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine, alors 56 jours après l'anniversaire de Dalia ($7 \times 8 = 56$), ce sera un mercredi.
Donc 4 jours plus tard (60 jours après l'anniversaire de Dalia), ce sera un dimanche.
Donc, Brice célèbre son anniversaire un dimanche.

Réponse : (E)

15. *Solution 1*
Puisque chaque émeu reçoit 2 friandises et que chaque poule reçoit 4 friandises, chaque oiseau reçoit *au moins* 2 friandises.
Si Karl commence par donner 2 friandises à chacun des 30 oiseaux, il aura remis 30×2 friandises, ou 60 friandises.
Puisque Karl a 100 friandises à distribuer, il lui reste $(100 - 60)$ friandises, ou 40 friandises à remettre.
Or, chaque émeu a déjà reçu ses 2 friandises (puisque les 30 oiseaux ont chacun reçu 2 friandises).
Les 40 friandises qui restent doivent donc être remises aux poules.
Or, chaque poule a reçu 2 friandises, mais doit en recevoir 4.
Donc, chaque poule doit recevoir 2 autres friandises.
Puisqu'il reste 40 friandises et que $40 \div 2 = 20$, Karl a 20 poules.
(On peut vérifier que s'il y a 20 poules, il y a 10 émeus $(30 - 20 = 10)$ et que Karl distribuerait $4 \times 20 + 2 \times 10$ friandises, ou 100 friandises.)

Solution 2
On peut procéder par tâtonnements. Si Karl avait 5 émeus et 25 poules $(30 - 5 = 25)$, il distribuerait $5 \times 2 + 25 \times 4$ friandises, ou 110 friandises.
Puisqu'il n'a que 100 friandises, il doit y avoir moins de poules et plus d'émeus.
On inscrit ce résultat et d'autres essais dans le tableau suivant.

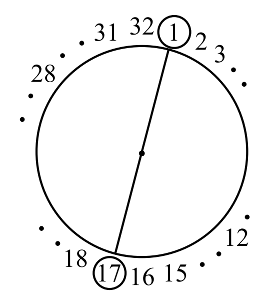
Nombre d'émeus	Nombre de poules	Nombre de friandises aux émeus	Nombre de friandises aux poules	Nombre total de friandises
5	$30 - 5 = 25$	$5 \times 2 = 10$	$25 \times 4 = 100$	$10 + 100 = 110$
7	$30 - 7 = 23$	$7 \times 2 = 14$	$23 \times 4 = 92$	$14 + 92 = 106$
10	$30 - 10 = 20$	$10 \times 2 = 20$	$20 \times 4 = 80$	$20 + 80 = 100$

Donc, Karl a 20 poules.

RÉPONSE : (D)

16. *Solution 1*
Les entiers de 1 à 32 sont écrits en ordre et espacés également à l'extérieur du cercle.
On considère une droite qui passe au centre du cercle et qui joint deux de ces 32 nombres.
Il reste 30 nombres ($32 - 2 = 30$) à joindre de cette façon.
Puisque cette première droite passe au centre du cercle, elle divise le cercle en deux parties égales.
Il y aura donc 15 des 30 entiers qui restent de chaque côté de la droite.
Soit n le nombre qui sera joint à 12.
De chaque côté de la droite qui joint 12 et n, il y a 15 nombres entre 12 et n (en procédant dans un sens ou dans l'autre).
En commençant à 12 et en allant vers 13, les 15 nombres entre 12 et n sont $13, 14, 15, \ldots, 26, 27$.
Le nombre suivant est 28. Donc $n = 28$.
Le nombre qui est joint au nombre 12 est 28.

Solution 2
On écrit les entiers de 1 à 32 en ordre et espacés également, dans le sens des aiguilles d'une montre, à l'extérieur du cercle.
Comme dans la solution 1, on sait qu'il y a 15 nombres de chaque côté de la droite qui passe à 1 et au centre du cercle.
En procédant dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de 1, ces 15 nombres sont $2, 3, 4, \ldots, 15, 16$. Donc, 1 est joint à 17, comme dans la figure ci-contre.
En procédant dans le sens des aiguilles d'une montre, on voit que 2 est joint à 18, 3 est joint à 19 et ainsi de suite.
Puisque le nombre 12 est situé à 11 positions du nombre 1, le nombre qui est joint à 12 est situé à 11 positions du nombre 17.
Le nombre qui est joint au nombre 12 est 28 ($17 + 11 = 28$).



RÉPONSE : (A)

17. On suppose que le plus petit cercle a une aire de 1.
Puisque l'aire de l'anneau ombré est 6 fois l'aire du plus petit cercle, elle est égale à 6.
Puisque l'aire de l'anneau extérieur est 12 fois l'aire du plus petit cercle, elle est égale à 12.
L'aire du plus grand cercle est égale à la somme des aires du plus petit cercle et des deux anneaux. Elle est donc égale à $1 + 6 + 12$, ou 19.
Donc, l'aire du plus petit cercle est $\frac{1}{19}$ de l'aire du plus grand cercle.
Remarque : On a supposé que le plus petit cercle avait une aire de 1, mais on aurait pu choisir n'importe quelle aire. Par exemple, si on suppose qu'il a une aire de 5 et qu'on résout de nouveau, quelle réponse obtient-on ?

RÉPONSE : (E)

18. Si deux entiers ont un produit égal à 1, ils doivent tous deux être 1 ou tous deux être -1.
De même, si le produit de six entiers est égal à 1, chacun des entiers doit être 1 ou -1.
De plus, le nombre de facteurs -1 doit être pair, car le produit d'un nombre impair de facteurs -1 est négatif. Il doit donc y avoir 2, 4 ou 6 facteurs -1 parmi les 6 entiers.
On examine les possibilités au moyen d'un tableau.

N^bre^ de -1	Produit des six entiers	Somme des six entiers
0	$(1)(1)(1)(1)(1)(1) = 1$	$1+1+1+1+1+1 = 6$
2	$(-1)(-1)(1)(1)(1)(1) = 1$	$(-1)+(-1)+1+1+1+1 = 2$
4	$(-1)(-1)(-1)(-1)(1)(1) = 1$	$(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+1+1 = -2$
6	$(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = 1$	$(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1) = -6$

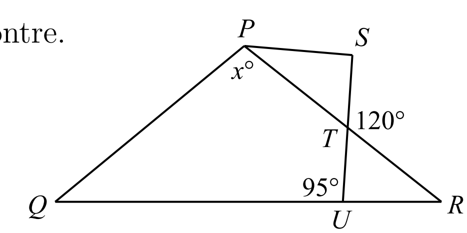
Le choix de réponse qui ne peut pas être la somme des six entiers est 0.

Réponse : (C)

19. Les tailles des 4 premières athlètes sont différentes. Si Laurissa avait une taille différente des 4 autres tailles, il y aurait 5 modes.
Pour qu'il n'y ait qu'un seul mode, la taille de Laurissa doit être la même que celle d'une autre athlète. Ceci élimine le choix de réponse (E).
Si Laurissa avait une taille de 135 cm, les 5 tailles auraient un mode de 135 cm et une médiane de 160 cm. Or, on sait que le mode est égal à la médiane et à la moyenne.
Si Laurissa avait une taille de 175 cm, les 5 tailles auraient un mode de 175 cm et une médiane de 170 cm, ce qui n'est pas le cas, car le mode et la médiane doivent être égaux.
Donc, Laurissa doit avoir une taille de 160 cm ou de 170 cm. Dans un cas comme dans l'autre, le mode sera égal à la médiane.
Si Laurissa avait une taille de 170 cm, les 5 athlètes auraient une taille moyenne de $\dfrac{135+160+170+170+175}{5}$ cm, ou 162 cm. Or, le mode et la médiane sont de 170 cm.
Si Laurissa avait une taille de 160 cm, les 5 athlètes auraient une taille moyenne de $\dfrac{135+160+160+170+175}{5}$ cm, ou 160 cm. Dans ce cas, les tailles des 5 athlètes, en centimètres, sont : 135, 160, 160, 170, 175.
Lorsque Laurissa a une taille de 160 cm, le mode, la médiane et la moyenne des tailles sont de 160 cm.

Réponse : (B)

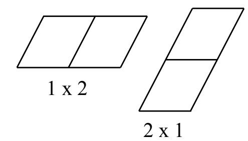
20. On nomme les points S, T et U, comme dans la figure ci-contre.



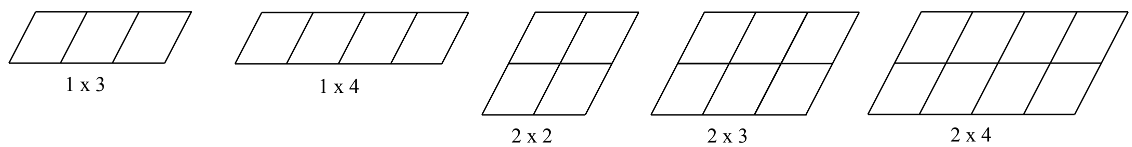
Since S, T et U sont alignés, $\angle STU = 180°$.
Donc $\angle RTU = 180° - \angle STR$, d'où $\angle RTU = 180° - 120°$, ou $\angle RTU = 60°$.
De même, puisque Q, U et R sont alignés, $\angle QUR = 180°$.
Donc $\angle TUR = 180° - \angle TUQ$, d'où $\angle TUR = 180° - 95°$, ou $\angle TUR = 85°$.
Les mesures des angles du triangle TUR ont une somme de $180°$.
Donc $\angle TRU = 180° - \angle RTU - \angle TUR$, d'où $\angle TRU = 180° - 60° - 85°$, ou $\angle TRU = 35°$.
Puisque le triangle PQR est isocèle et que $PQ = PR$, alors $\angle PQR = \angle PRQ = 35°$.
Puisque les mesures des angles du triangle PQR ont une somme de $180°$, alors $x° = 180° - \angle PQR - \angle PRQ$, d'où $x° = 180° - 35° - 35°$, ou $x = 110$.

Réponse : (A)

21. Lorsqu'on considère la figure formée par deux petits parallélogrammes contigus, on obtient un parallélogramme.
Par exemple, les deux figures ci-contre sont des parallélogrammes.
En effet, on obtient un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles et de même longueur. De même, on peut utiliser plus de 2 petits parallélogrammes pour former de nouveaux parallélogrammes. On écrira $a \times b$ pour indiquer que la nouvelle figure a a rangées de petits parallélogrammes et b colonnes de petits parallélogrammes.



En plus des petits parallélogrammes (1×1) et des parallélogrammes 1×2 et 2×1 ci-dessus, on peut voir dans la figure donnée des parallélogrammes de dimensions suivantes.



Le tableau ci-dessous indique le nombre de parallélogrammes de chaque grandeur.

Grandeur	1×1	1×2	2×1	1×3	1×4	2×2	2×3	2×4
Nombre de parallélogrammes	8	6	4	4	2	3	2	1

Le nombre de parallélogrammes qui paraissent dans la figure est égal à $8+6+4+4+2+3+2+1$, ou 30.

Réponse : (B)

22. *Solution 1*
Le nombre de pièces de 10 ¢ dans le bocal est un de plus que le nombre de pièces de 5 ¢.
Si on enlève une pièce de 10 ¢ du bocal, il y aura 49 pièces de monnaie dans le bocal ($50 - 1 = 49$) qui ont une valeur totale de 4,90 \$ (5,00 \$ − 0,10 \$ = 4,90 \$).
Maintenant, le nombre de pièces de 5 ¢ dans le bocal est égal au nombre de pièces de 10 ¢ et le nombre de pièces de 5 ¢ dans le bocal est trois fois le nombre de pièces de 25 ¢ dans le bocal.
Donc pour chaque pièce de 25 ¢ dans le bocal, il y a 3 pièces de 5 ¢ et 3 pièces de 10 ¢.
On forme des groupes contenant chacun 1 pièce de 25 ¢, 3 pièces de 5 ¢ et 3 pièces de 10 ¢.
Chaque groupe compte 7 pièces d'une valeur totale de 0,25 \$ + 3 × 0,05 \$ + 3 × 0,10 \$, ou 0,25 \$ + 0,15 \$ + 0,30 \$, ou 0,70 \$.
Puisqu'il reste 49 pièces dans le bocal avec une valeur totale de 4,90 \$, il doit y avoir 7 groupes de 7 pièces (puisque $7 \times 7 = 49$).
(On peut vérifier que 7 groupes de pièces, avec chacun une valeur de 0,70 \$, ont une valeur totale de 7 × 0,70 \$, ou 4,90 \$.)
Il y a donc 7 pièces de 25 ¢ dans le bocal.

Solution 2
Pour déterminer nombre de pièces de 25 ¢ dans le bocal, il suffit de se concentrer sur le nombre de pièces (50) ou sur la valeur total des pièces (5,00 \$).
Dans la solution qui suit, on considère chacun de ces aspects pour montrer que chacun mène à la même réponse.
On procède par essais systématiques.
Supposons qu'il y a 5 pièces de 25 ¢ dans le bocal (le plus petit choix de réponse donné).
Ces 5 pièces ont une valeur de 5 × 25 ¢, ou 125 ¢.
Puisque le nombre de pièces de 5 ¢ est trois fois le nombre de pièces de 25 ¢, il y aurait 15 pièces

de 5 ¢ ($3 \times 5 = 15$) dans le bocal.
Ces 15 pièces de 5 ¢ auraient une valeur de 75 ¢ (15×5 ¢ $= 75$ ¢).
Puisque le nombre de pièces de 10 ¢ dans le bocal est un de plus que le nombre de pièces de 5 ¢, il y aurait 16 pièces de 10 ¢ dans le bocal ($15 + 1 = 16$).
Ces 16 pièces de 10 ¢ auraient une valeur de 160 ¢ (16×10 ¢ $= 160$ ¢).
Donc s'il y avait 5 pièces de 25 ¢ dans le bocal, il y aurait 36 pièces en tout ($5 + 15 + 16 = 36$) et comme on sait qu'il y a 50 pièces dans le bocal, il doit y avoir plus de 5 pièces de 25 ¢.
De même, s'il y avait 5 pièces de 25 ¢ dans le bocal, la valeur totale des pièces dans le bocal serait égale à 290 ¢ (125 ¢ + 75 ¢ + 160 ¢ = 360 ¢).
Comme on sait que la valeur totale des pièces est de 5,00 \$, ou 500 ¢ il doit y avoir plus de 5 pièces de 25 ¢ dans le bocal.
On résume les résultats des deux essais suivants dans un tableau.

Nombre de pièces de 25 ¢	Valeur des pièces de 25 ¢	Nombre de de pièces de 5 ¢	Valeur des pièces de 5 ¢	Nombre de de pièces de 10 ¢	Valeur des pièces de 10 ¢	Valeur totale des pièces
6	150 ¢	18	90 ¢	19	190 ¢	430 ¢
7	175 ¢	21	105 ¢	22	220 ¢	500 ¢

Lorsqu'il y a 7 pièces de 25 ¢ dans le bocal, il y a 50 pièces dans le bocal, ce qu'il fallait ($7 + 21 + 22 = 50$).
Lorsqu'il y a 7 pièces de 25 ¢ dans le bocal, les pièces dans le bocal ont une valeur totale de 500 ¢ ($175 + 105 + 220 = 500$), ou 5,00 \$, ce qu'il fallait.
Dans les deux cas, il y a 7 pièces de 25 ¢ dans le bocal.

Réponse : (A)

23. Dans chaque bloc $1223334444 \cdots 999999999$, il y a 1 chiffre 1, 2 chiffres 2, 3 chiffres 3 et ainsi de suite. Chaque bloc contient 45 chiffres ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$).
Lorsqu'on divise $1953 \div 45$, on obtient un quotient de 43 et un reste de 18 (c'est-à-dire que $1953 = 45 \times 43 + 18$).
Puisque chaque bloc contient 45 chiffres, alors 43 blocs contiennent 1935 chiffres ($43 \times 45 = 1935$).
Puisque $1953 - 1935 = 18$, alors le 18^{e} chiffre que l'on écrira dans le bloc suivant (le 44^{e} bloc) sera le 1953^{e} chiffre écrit depuis le début.
On écrit les 18 premiers chiffres du bloc suivant, 122333444455555666, pour constater que le 1953^{e} chiffre écrit depuis le début est un 6.

Réponse : (C)

24. Un entier strictement positif est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9.
Dans ce problème, on veut compter le nombre de nombres de six chiffres qui incluent les chiffres 2018 et qui sont divisibles par 9.
On cherche donc deux chiffres manquants qui, avec 2018, formeront un entier positif de six chiffres divisible par 9.
Les chiffres de 2018 ont une somme de 11 ($2 + 0 + 1 + 8 = 11$).
On suppose que les deux autres chiffres sont a et b. Le nombre de six chiffres peut donc être $ab2018$, $ba2018$, $a2018b$, $b2018a$, $2018ab$ ou $2018ba$.
Lorsqu'on additionne a et b à 11, on doit obtenir une somme divisible par 9.
Donc, $a + b + 11$ doit être divisible par 9.
La plus petite valeur possible de a et de b est 0, ce qui indique que la plus petite valeur possible de $a + b + 11$ est 11 ($0 + 0 + 11 = 11$).

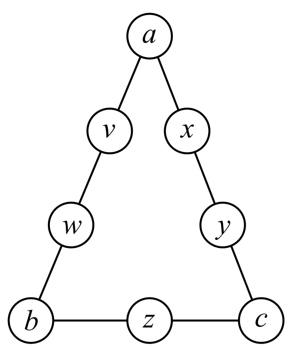
La plus grande valeur possible de a et de b est 9, ce qui indique que la plus grande valeur possible de $a + b + 11$ est 29 $(9 + 9 + 11 = 29)$.
Or, les seuls entiers de 11 à 29 qui sont divisibles par 9 sont 18 et 27.
Donc $a + b = 7$ $(18 - 11 = 7)$ ou $a + b = 16$ $(27 - 11 = 16)$.
Si $a + b = 7$, alors les chiffres a et b sont 0 et 7, 1 et 6, 2 et 5 ou 3 et 4, dans un ordre quelconque.
Si $a = 1$ et $b = 6$, les entiers possibles de six chiffres sont $162\,018, 612\,018, 120\,186, 620\,181, 201\,816$, et $201\,861$. Dans ce cas, il y en a six.

De même, si $a = 2$ et $b = 5$, il y a 6 entiers possibles de 6 chiffres.
De même, si $a = 3$ et $b = 4$, il y a 6 entiers possibles de 6 chiffres.
Si $a = 0$ et $b = 7$, les entiers possibles de 6 chiffres sont $702\,018, 720\,180, 201\,870$ et $201\,807$, puisque ces entiers ne peuvent pas commencer par un 0.
Dans ce cas, il y a 4 entiers possibles de 6 chiffres.
Donc lorsque a et b ont une somme de 7, il y a 22 entiers possibles de 6 chiffres $(6+6+6+4 = 22)$.

On considère maintenant le cas où a et b ont une somme de 16.
Si $a + b = 16$, les chiffres a et b sont 7 et 9 ou bien 8 et 8.
Si $a = 7$ et $b = 9$, il y a 6 entiers possibles de 6 chiffres $(792\,018, 972\,018, 720\,1869, 920\,187, 201\,879$ et $201\,897)$.
Si $a = 8$ et $b = 8$, il y a 3 entiers possibles de 6 chiffres $(882\,018, 820\,188$ et $201\,888)$.
Donc lorsque a et b ont une somme de 16, il y a 9 entiers possibles de 6 chiffres $(6 + 3 = 9)$.
En tout, il y a 31 entiers possibles de 6 chiffres $(22 + 9 = 31)$.
On remarque que ces 31 entiers de 6 chiffres sont tous différents les uns des autres et que ce sont les seuls entiers de 6 chiffres qui satisfont aux conditions.
Il y a donc 31 entiers de 6 chiffres qui incluent les chiffres 2018 ensemble dans cet ordre et qui sont divisibles par 9.

Réponse : (C)

25. Les nombres sont a, b, c, x, y, z, w et v, comme dans la figure :



Puisque la somme des nombres sur chaque côté est égale au même nombre S, alors :

$$S = a + v + w + b \qquad S = a + x + y + c \qquad S = b + z + c$$

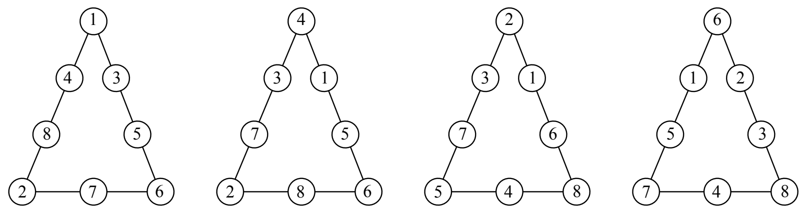
Lorsqu'on additionne les nombres sur les trois côtés, les nombres a, b et c sont comptés deux fois. On a :

$$S+S+S = (a+v+w+b)+(a+x+y+c)+(b+z+c) = (a+v+w+b+z+c+y+x)+a+b+c$$

Or, les nombres a, v, w, b, z, c, y, x sont les nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ dans un ordre quelconque.
Donc $a + v + w + b + z + c + y + x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$.
Donc :

$$3S = 36 + a + b + c$$

Puisque $3S$ est un multiple de 3 et que 36 est un multiple de 3, alors $a + b + c$ (qui est égal à $3S - 36$) doit aussi être un multiple de 3.
On considère les nombres qui seront placés dans les cercles. On voit que la plus petite valeur possible de $a + b + c$ est 6 $(1 + 2 + 3 = 6)$ et dans ce cas, on a $3S = 36 + 6$, ou $3S = 42$, d'où $S = 14$. Puisque $a + b + c$ ne peut avoir une valeur inférieure à 6 et que $3S = 36 + a + b + c$, $3S$ ne peut avoir une valeur inférieure à 42 et S ne peut donc avoir une valeur inférieure à 14.
On considère les nombres qui seront placés dans les cercles. On voit que la plus grande valeur possible de $a + b + c$ est 21 $(6 + 7 + 8 = 21)$ et dans ce cas, on a $3S = 36 + 21$, ou $3S = 57$, d'où $S = 19$. Puisque $a + b + c$ ne peut avoir une valeur supérieure à 21, $3S$ ne peut avoir une valeur supérieure à 57 et S ne peut donc avoir une valeur supérieure à 19.
Parmi les nombres 14, 15, 16, 17, 18 et 19, quelles valeurs S peut-elle prendre ?
Les figures suivantes montrent comment placer les nombres pour obtenir $S = 15, 16, 17, 19$:



Pour trouver ces exemples, on procède par raisonnement et par tâtonnements.
Prenons par exemple le cas où $S = 15$.
Puisque $3S = 36 + a + b + c$ et que $S = 15$, alors $a + b + c = 3 \times 15 - 36$, ou $a + b + c = 9$.
Dans l'exemple ci-haut, on a choisi $a = 1$, $b = 2$ et $c = 6$.
Puisque le côté du bas $(b + z + c)$ contient le plus petit nombre de cercles, on place les deux plus grands des trois nombres 1, 2 et 6 sur ce côté, soit $b = 2$ et $c = 6$. Donc $z = 15 - b - c$, ou $z = 7$.
On poursuit par tâtonnements pour attribuer les valeurs à u, v, x et y de manière à obtenir la même somme sur les deux autres côtés.
Il existe d'autres valeurs possibles de a, b et c pour que $a+b+c = 9$ (p. ex., $1, 3, 5$ et $2, 3, 4$). Or, aucun de ces choix ne peut donner $S = 15$.
On procède de la même manière pour obtenir les résultats ci-haut pour $S = 16, 17, 19$.

Pour compléter la solution, on montre qu'il est impossible d'obtenir $S = 14$ et $S = 18$.
Supposons que $S = 14$.
Puisque $a + b + c = 3S - 36$, alors $a + b + c = 3 \times 14 - 36$, ou $a + b + c = 6$.
Les seules valeurs possibles de a, b, c , parmi $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, sont $1, 2, 3$.
Le côté du bas donne $b + z + c = 14$.
Puisque les valeurs de a, b, c sont $1, 2, 3$, dans un ordre quelconque, alors la valeur maximale de $b + c$ est 5 $(2 + 3 = 5)$. Puisque le nombre le plus grand est 8, la valeur maximale de z est 8.
La valeur maximale de $b + z + c$ est donc 13 $(5 + 8 = 13)$ et $b + z + c$ ne peut donc pas égaler 14.
Il est donc impossible d'obtenir $S = 14$.
Supposons que $S = 18$.
Puisque $a + b + c = 3S - 36$, alors $a + b + c = 3 \times 18 - 36$, ou $a + b + c = 18$.
Les valeurs possibles de a, b, c sont $3, 7, 8$ et $4, 6, 8$ et $5, 6, 7$.
On considère le côté du bas avec $b + z + c = 18$. On a donc $a + b + c = 18$ et $b + z + c = 18$.
Puisque ces deux sommes contiennent b et c et qu'elles ont le même total, on doit avoir $a = z$, ce qui n'est pas permis.
Il est donc impossible d'obtenir $S = 18$.

Les valeurs possibles de S sont $15, 16, 17$ et 19.
Ces valeurs ont une somme de 67.

Réponse : (E)

8^e^ année

1. Puisqu'un melon coute 3 \$, alors 6 melons coutent 18 \$ ($6 \times 3\,\$ = 18\,\$$).

   RÉPONSE : (C)

2. La partie de la droite numérique donnée a une longueur de 1 ($1 - 0 = 1$).
   Elle est divisée en 10 parties égales et chaque partie a donc une longueur de 0,1 ($1 \div 10 = 0{,}1$).
   Le P est situé à 2 espaces avant le 1. P a donc une valeur de $1 - (2 \times 0{,}1)$, ou $1 - 0{,}2$, ou 0,8.
   (OU P est situé à 8 positions après le 0. P a donc une valeur de $8 \times 0{,}1$, ou 0,8.)

   RÉPONSE : (D)

3. Selon la priorité des opérations, on a $(2+3)^2 - (2^2 + 3^2) = 5^2 - (4+9) = 25 - 13 = 12$.

   RÉPONSE : (B)

4. Puisque Lakshmi parcourt 50 km dans une heure, alors dans une demi-heure (30 minutes), elle parcourt $50\,\text{km} \div 2$, ou 25 km.

   RÉPONSE : (C)

5. Evgeny a 15 fleurs ($3 + 2 + 4 + 6 = 15$) dont 2 sont des tulipes.
   Il y a donc 2 choix favorables parmi 15 choix équiprobables.
   La probabilité de choisir une tulipe est donc égale à $\frac{2}{15}$.

   RÉPONSE : (E)

6. L'étendue des tailles est égale à la différence entre la plus grande taille et la plus petite.
   D'après le diagramme, Emma est la plus grande avec une taille d'environ 175 cm.
   Kim est la plus petite avec une taille d'environ 100 cm.
   L'étendue des tailles est plus près de 75 cm ($175 - 100 = 75$).

   RÉPONSE : (A)

7. *Solution 1*
   La circonférence d'un cercle est égale à π fois son diamètre. On a donc $C = \pi \times d$, C étant la circonférence et d, le diamètre.
   Puisque ce cercle a un diamètre de 1 cm, on a $C = \pi \times 1$ cm, ou $C = \pi$ cm.
   Puisque π vaut environ 3,14, alors la circonférence est entre 3 cm et 4 cm.

   Solution 2
   La circonférence d'un cercle est donnée par la formule $C = 2 \times \pi \times r$, C étant la circonférence et r, le rayon.
   Puisque le cercle a un diamètre de 1 cm, alors $r = \frac{1}{2}$ cm. On a donc $C = 2 \times \pi \times \frac{1}{2}$, ou $C = \pi$ cm.
   Puisque π vaut environ 3,14, alors la circonférence est entre 3 cm et 4 cm.

   RÉPONSE : (B)

8. Le rapport de la quantité de gâteau qu'Alice a mangée à la quantité que Boris a mangée est de 3 : 1.
   Si on coupe le gâteau en 4 parties égales, alors Alice a mangé 3 morceaux et Boris a mangé 1 morceau. Boris a donc mangé $\frac{1}{4}$ de gâteau.
   Puisque $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\,\%$, Boris a mangé 25 % du gâteau.

   RÉPONSE : (D)

9. La lettre qui est à 3 positions de la lettre W, dans le sens des aiguilles d'une montre, est le Z.
Si on continue dans le même sens à partir de Z, l'alphabet recommence à la lettre A.
Donc, la lettre qui est située à 4 positions du W est le A.
La lettre qui est située à 4 positions du I est le M.
La lettre qui est située à 4 positions du N est le R.
Le texte encodé du message WIN est AMR.

Réponse : (C)

10. Le plus petit des trois entiers pairs consécutifs est 2 de moins que le nombre du milieu.
Le plus grand des trois entiers pairs consécutifs est 2 de plus que le nombre du milieu.
Donc, la somme des trois nombres est égale à trois fois le nombre du milieu.
(Pour le voir, on imagine soustraire 2 du plus grand nombre et l'ajouter au plus petit.
On n'a rien enlevé à la somme et maintenant, les trois nombres sont égaux, chacun étant égal au nombre du milieu.)
Puisque les trois nombres ont une somme de 312 et que $312 \div 3 = 104$, le nombre du milieu est donc 104.
Le plus grand des trois nombres est donc 106 ($104 + 2 = 106$).
(On peut vérifier que $102 + 104 + 106 = 312$.)

Réponse : (B)

11. Puisque $4x + 12 = 48$, alors $4x = 36$ car $36 + 12 = 48$.
Puisque $4x = 36$, alors $x = 9$, car $4 \times 9 = 36$.

Réponse : (E)

12. L'heure de Vancouver est 3 heures de moins que l'heure de Toronto.
Donc, quand il est 18 h 30 à Toronto, il est 15 h 30 à Vancouver.

Réponse : (C)

13. *Solution 1*
Mateo reçoit 20 \$ par heure pendant une semaine.
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée et que $24 \times 20\,\$ = 480\,\$$, il reçoit 480 \$ par semaine.
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine et que $7 \times 480\,\$ = 3360\,\$$, Mateo reçoit 3360 \$ dans une semaine.
Silviane reçoit 400 \$ par jour pendant une semaine.
Puisqu'il y a 7 jours dans une semaine et que $7 \times 400\,\$ = 2800\,\$$, elle reçoit 2800 \$ dans une semaine.
La différence entre les deux sommes d'argent est de 560 \$ ($3360\,\$ - 2800\,\$ = 560\,\$$).

Solution 2
Mateo reçoit 20 \$ par heure pendant une semaine.
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée et que $24 \times 20\,\$ = 480\,\$$, il reçoit 480 \$ par semaine.
Silviane reçoit 400 \$ par jour pendant une semaine. Mateo reçoit donc 80 \$ de plus que Silviane ($480\,\$ - 400\,\$ = 80\,\$$) à chaque jour.
Puisqu'il y a 7 jours par semaine, la différence entre les deux sommes qu'ils reçoivent par semaine est de 560 \$ ($80\,\$ \times 7 = 560\,\$$).

Réponse : (A)

14. Puisque $2018 = 2 \times 1009$ et que 2 et 1009 sont des nombres premiers, la réponse est $2 + 1009$, ou 1011.
Remarque : Dans la question, on affirme que 2018 a exactement deux diviseurs qui sont des nombres premiers. Puisque 2 est un diviseur premier de 2018, l'autre nombre premier doit être 1009, autrement 1009 aurait plus d'un diviseur premier et ainsi 2018 aurait plus de deux diviseurs premiers.

Réponse : (B)

15. Le premier prix peut être attribué à n'importe quel des 5 camarades.
Une fois que ce prix est attribué, le deuxième prix peut être attribué à n'importe quel des 4 autres camarades (puisque le deuxième prix ne peut être attribué au gagnant du premier prix).
Donc pour chacun des 5 choix pour le premier prix, il y a 4 choix pour le deuxième prix. Il y a donc 5×4 façons d'attribuer les deux premiers prix.
Une fois que les premier et deuxième prix sont attribués, le troisième prix peut être attribué à n'importe quel des 3 autres camarades (puisque le troisième prix ne peut être attribué aux gagnants des premier et deuxième prix).
Ainsi pour chacune des 5×4 façons d'attribuer les deux premiers prix, il y a 3 façons d'attribuer le troisième prix.
Il y a donc $5 \times 4 \times 3$ façons, ou 60 façons d'attribuer les trois premiers prix.

Réponse : (B)

16. Si deux entiers ont un produit égal à 1, ils doivent tous deux être 1 ou tous deux être -1.
De même, si le produit de six entiers est égal à 1, chacun des entiers doit être 1 ou -1.
De plus, le nombre de facteurs -1 doit être pair, car le produit d'un nombre impair de facteurs -1 est négatif. Il doit donc y avoir 2, 4 ou 6 facteurs -1 parmi les 6 entiers.
On examine les possibilités au moyen d'un tableau.

N^bre de -1	Produit des six entiers	Somme des six entiers
0	$(1)(1)(1)(1)(1)(1) = 1$	$1+1+1+1+1+1 = 6$
2	$(-1)(-1)(1)(1)(1)(1) = 1$	$(-1)+(-1)+1+1+1+1 = 2$
4	$(-1)(-1)(-1)(-1)(1)(1) = 1$	$(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+1+1 = -2$
6	$(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = 1$	$(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1) = -6$

Le choix de réponse qui ne peut pas être la somme des six entiers est 0.

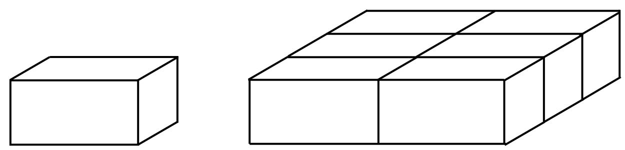
Réponse : (C)

17. *Solution 1*
Après chaque translation, l'abscisse de l'image est 5 unités de plus que celle du point qui subit la translation et l'ordonnée de l'image est 3 unités de plus que celle du point qui subit la translation.
Après la 1^re translation, l'image du point $A(-3,2)$ est $B(-3+5, 2+3)$, ou $B(2,5)$.
Après la 2^e translation, l'image du point $B(2,5)$ est $C(2+5, 5+3)$, ou $C(7,8)$.
Après la 3^e translation, l'image du point $C(7,8)$ est $D(7+5, 8+3)$, ou $D(12,11)$.
Après la 4^e translation, l'image du point $D(12,11)$ est $E(12+5, 11+3)$, ou $E(17,14)$.
Après la 5^e translation, l'image du point $E(17,14)$ est $F(17+5, 14+3)$, ou $F(22,17)$.
Après la 6^e translation, l'image du point $F(22,17)$ est $G(22+5, 17+3)$, ou $G(27,20)$.
L'image finale est le point $(27,20)$. Donc $x + y = 27 + 20$, ou $x + y = 47$.

Solution 2
Au départ, la somme $x + y$ des coordonnées de A est égale à -1.
Après chaque translation, l'abscisse est augmentée de 5 et l'ordonnée est augmentée de 3.
Ainsi après chaque translation, la valeur de $x + y$ est augmentée de $5 + 3$, ou 8.
Après 6 translations, la valeur de $x + y$ aura augmenté de 6×8, ou 48.
Elle sera donc égalle à $-1 + 48$, ou 47.

Réponse : (D)

18. *Solution 1*
Dans la figure suivante, la longueur du prisme à gauche est doublée et sa largeur est triplée. On obtient le prisme à droite.



On voit que le prisme à gauche fait 6 fois (2×3 fois) dans le deuxième. Le volume du deuxième prisme est donc 6 fois celui du premier. Il est donc égal à $6 \times 30\,\text{cm}^3$, ou $180\,\text{cm}^3$.
De même, si on divise la hauteur du deuxième prisme par 4, on obtient $\frac{1}{4}$ du prisme précédent. Le volume sera donc divisé par 4. Il sera égal à $45\,\text{cm}^3$ $(180 \div 4 = 45)$.
Si on double la longueur d'un prisme, qu'on triple sa largeur et qu'on divise sa hauteur par 4, le volume du nouveau prisme sera égal à $45\,\text{cm}^3$.

Solution 2
On obtient le volume d'un prisme droit à base rectangulaire en multipliant sa longueur, sa largeur et sa hauteur.
Lorsqu'on double la longueur du prisme, ce produit est doublé, c'est-à-dire que le volume est doublé. Puisque le prisme initial a un volume de 30 cm^3, le nouveau prisme a un volume de $30\,\text{cm}^3 \times 2$, ou 60 cm^3.
Lorsque la largeur de ce nouveau prisme est triplée, le produit de la longueur, de la largeur et de la hauteur est triplé, c'est-à-dire que le volume précédent est triplé. Puisque le volume était de 60 cm^3, le nouveau volume sera de $60\,\text{cm}^3 \times 3$, ou 180 cm^3.
Lorsque la hauteur de ce nouveau prisme est divisée par 4, le produit de la longueur, de la largeur et de la hauteur est divisé par 4, c'est-à-dire que le volume est divisé par 4. Puisque le volume du prisme précédent était de 180 cm^3, le nouveau prisme a un volume de $180\,\text{cm}^3 \div 4$, ou 45 cm^3.

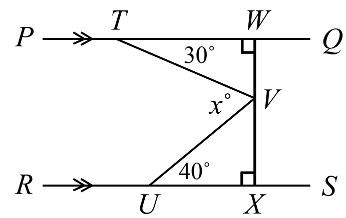
Solution 3
Le volume d'un prisme droit à base rectangulaire est égal au produit de la longueur L, de sa largeur l et de la hauteur h. Il est donc égal à Llh.
Lorsqu'on double la longueur L du premier prisme, la nouvelle longueur est $2L$.
Lorsqu'on triple la largeur l du premier prisme, la nouvelle largeur est $3l$ et lorsqu'on divise la hauteur h du premier prisme par 4, la nouvelle hauteur est $\frac{1}{4}h$.
Le volume du nouveau prisme est égal au produit de la longueur $2L$, de la largeur $3l$ et de la hauteur $\frac{1}{4}h$, ce qui est égal à $(2L)(3l)(\frac{1}{4}h)$, ou $\frac{3}{2}Llh$.
Le volume du nouveau prisme est donc $\frac{3}{2}$ fois plus grand que celui du prisme initial.
Puisque celui-ci a un volume de 30 cm^3, alors en doublant la longueur, en triplant sa largeur et en divisant la hauteur par 4, on obtient un volume de $30\,\text{cm}^3 \times \frac{3}{2}$, ou 45 cm^3.

Réponse : (E)

19. La taille moyenne d'un groupe d'enfants est égale à la somme des tailles divisée par le nombre d'enfants.
Si 12 enfants mesuraient 8 cm de plus, cela augmenterait la somme des tailles de 12×8 cm, ou 96 cm. Cette augmentation totale augmenterait en moyenne la taille de chaque élève de la classe de 6 cm.
On a donc $96 \div (\text{nombre d'élèves}) = 6$. Or, on sait que $96 \div 16 = 6$.
Il y a donc 16 élèves dans la classe.

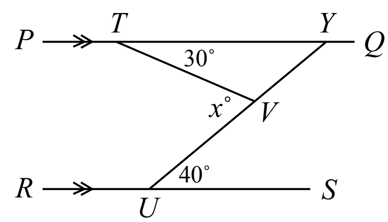
Réponse : (A)

20. *Solution 1*
Au point V, on construit un segment WX perpendiculaire à PQ.
Puisque RS est parallèle à PQ, alors WX est perpendiculaire à RS.
Dans le triangle TWV, $\angle TWV = 90°$ et $\angle WTV = 30°$.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de $180°$, alors $\angle TVW = 180° - 30° - 90°$, ou $\angle TVW = 60°$.
De même, dans le triangle UXV, $\angle UXV = 90°$ et $\angle VUX = 40°$.
Donc $\angle UVX = 180° - 40° - 90°$, ou $\angle UVX = 50°$.



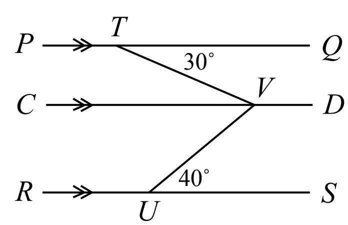
Puisque WX est un segment de droite, $\angle TVW + \angle TVU + \angle UVX = 180°$.
Donc $60° + \angle TVU + 50° = 180°$, ou $\angle TVU = 180° - 60° - 50°$, ou $\angle TVU = 70°$. Donc $x = 70$.

Solution 2
On prolonge le segment UV jusqu'au point Y sur PQ.
Puisque RS est parallèle à PQ, les angles alternes-internes TYV et VUS sont égaux. Donc $\angle TYV = \angle VUS = 40°$.
Dans le triangle TYV, $\angle TYV = 40°$ et $\angle YTV = 30°$.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de $180°$, alors $\angle TVY = 180° - 40° - 30°$, ou $\angle TVY = 110°$.



Puisque UY est un segment de droite, $\angle TVU + \angle TVY = 180°$.
Donc $\angle TVU + 110° = 180°$, ou $\angle TVU = 180° - 110°$, ou $\angle TVU = 70°$. Donc $x = 70$.

Solution 3
Au point V, on construit un segment CD parallèle à PQ et à RS.
Puisque CD est parallèle à PQ, les angles alternes-internes QTV et TVC sont égaux. Donc $\angle TVC = \angle QTV = 30°$.
De même, puisque CD est parallèle à RS, les angles alternes-internes CVU et VUS sont égaux. Donc $\angle CVU = \angle VUS = 40°$.
Puisque $\angle TVU = \angle TVC + \angle CVU$, alors $\angle TVU = 30° + 40°$, ou $\angle TVU = 70°$. Donc $x = 70$.



Réponse : (D)

21. *Solution 1*
On suppose qu'il y a 100 billes dans le sac.
La probabilité de choisir une bille brune est de 0,3. Il y a donc 30 billes brunes dans le sac, puisque $\frac{30}{100} = 0{,}3$.
Il y a trois fois plus de chances de choisir une bille brune que de choisir une bille mauve. Il y a donc 10 billes mauves dans le sac ($30 \div 3 = 10$).
Il y a autant de chances de choisir une bille verte qu'une bille mauve. Il y a donc 10 billes vertes dans le sac.
Puisqu'il y a 30 billes brunes, 10 billes mauves et 10 billes vertes dans le sac, il reste 50 billes

qui doivent être rouges ou jaunes ($100 - 30 - 10 - 10 = 50$).
Puisqu'il y a autant de chances de choisir une bille rouge qu'une bille jaune, il y a 25 billes rouges et 25 billes jaunes dans le sac ($50 \div 2 = 25$).
Parmi les 100 billes du sac, il y en a 35 ($25 + 10 = 35$) qui sont rouges ou vertes.
La probabilité de choisir une bille qui est rouge ou verte est égale à $\frac{35}{100}$, ou 0,35.

Solution 2
La probabilité de choisir une bille brune est de 0,3.
Il y a trois fois plus de chances de choisir une bille brune que de choisir une bille mauve. La probabilité de chosir une bille mauve est donc égale à $0{,}3 \div 3$, ou 0,1.
Il y a autant de chances de choisir une bille verte qu'une bille mauve. Il y a donc une probabilité de 0,1 de choisir une bille verte.
Soit p la probabilité de chosir une bille rouge.
Il y a autant de chances de choisir une bille rouge qu'une bille jaune. La probabilité de choisir une bille jaune est donc égale à p.
La somme des probabilités de choisir une bille est égale à 1.
Donc $0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}1 + p + p = 1$, ou $0{,}5 + 2p = 1$, ou $2p = 0{,}5$. Donc $p = 0{,}25$.
La probabilité de choisir une bille rouge est de 0,25 et celle de choisir une bille verte est de 0,1.
La probabilité de choisir une bille qui est rouge ou verte est égale à $0{,}25 + 0{,}1$, ou 0,35.

Réponse : (C)

22. L'aire du carré $PQRS$ est égale à 30×30, ou 900.
Chacune des 5 régions a la même aire. Cette aire est donc égale à $900 \div 5$, ou 180.
L'aire du triangle SPT est égale à $\frac{1}{2}(PS)(PT)$, ou $\frac{1}{2}(30)(PT)$, ou $15(PT)$. Elle est égale à 180.
Donc $15(PT) = 180$, d'où $PT = 180 \div 15$, ou $PT = 12$.
L'aire du triangle STU est égale à 180.
On considère la base UT du triangle STU.
La hauteur correspondante du triangle STU est PS, puisque PS est abaissé du sommet S perpendiculairement au prolongement de la base UT.
L'aire du triangle STU est égale à $\frac{1}{2}(PS)(UT)$, ou $\frac{1}{2}(30)(UT)$, ou $15(UT)$. Elle est égale à 180.
Donc $15(UT) = 180$, d'où $UT = 180 \div 15$, ou $UT = 12$.
Dans le triangle SPT, $\angle SPT = 90°$.
D'après le théorème de Pythagore, $ST^2 = PS^2 + PT^2$. Donc $ST^2 = 30^2 + 12^2$, ou $ST^2 = 900 + 144 = 1044$, ou $ST = \sqrt{1044}$ (puisque $ST > 0$).
Dans le triangle SPU, $\angle SPU = 90°$ et $PU = PT + UT$, ou $PU = 12 + 12$, ou $PU = 24$.
D'après le théorème de Pythagore, $SU^2 = PS^2 + PU^2$. Donc $ST^2 = 30^2 + 24^2$, ou $SU^2 = 900 + 576 = 1476$, ou $SU = \sqrt{1476}$ (puisque $SU > 0$).
Donc $\dfrac{SU}{ST} = \dfrac{\sqrt{1476}}{\sqrt{1044}}$, ce qui est à peu près égal à 1,189.
Parmi les choix de réponse, $\dfrac{SU}{ST}$ est plus près de 1,19.

Réponse : (B)

23. *Solution 1*

On remplit un tableau donnant les valeurs de $n(n+1)(n+2)$ pour les valeurs de n de 1 à 10 :

n	$n(n+1)(n+2)$
1	$1 \times 2 \times 3 = 6$
2	$2 \times 3 \times 4 = 24$
3	$3 \times 4 \times 5 = 60$
4	$4 \times 5 \times 6 = 120$
5	$5 \times 6 \times 7 = 210$
6	$6 \times 7 \times 8 = 336$
7	$7 \times 8 \times 9 = 504$
8	$8 \times 9 \times 10 = 720$
9	$9 \times 10 \times 11 = 990$
10	$10 \times 11 \times 12 = 1320$

On voit que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5 lorsque $n = 3, 4, 5, 8, 9, 10$.

De façon générale, puisque 5 est un nombre premier, $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5 lorsqu'un de ses facteurs $n, n+1, n+2$ est un multiple de 5.

Un entier positif est un multiple de 5 lorsque son chiffre des unités est un 0 ou un 5.

On remplit ensuite un tableau qui donne le chiffre des unités de $n+1$ et celui de $n+2$ selon le chiffre des unités de n :

Chiffre des unités de n	Chiffre des unités de $n+1$	Chiffre des unités de $n+2$
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	6
5	6	7
6	7	8
7	8	9
8	9	0
9	0	1
0	1	2

D'après ce tableau, un des trois facteurs a un chiffre des unités égal à 0 ou à 5 lorsque le chiffre des unités de n est $3, 4, 5, 8, 9$ ou 0. (On remarque que ceci concorde avec le premier tableau.)

Dans chaque bloc de 10 valeurs consécutives de n dont la dernière est un multiple de 10, il y a 6 valeurs de $n(n+1)(n+2)$ qui sont des multiples de 5.

On cherche la 2018$^{\text{e}}$ valeur de n pour laquelle $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5.

Or $2018 = 336 \times 6 + 2$.

Cela nous dit que parmi les 3360 premières valeurs de n ($336 \times 10 = 3360$), il y a 2016 valeurs de n ($336 \times 6 = 2016$) pour lesquelles $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5. (Six entiers sur dix vérifient cette propriété.)

Il nous faut deux autres valeurs de n, dans la liste, qui vérifient cette propriété.

Les deux valeurs suivantes de n pour lesquelles $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5 auront 3 et 4 pour chiffre des unités. Ce sont donc 3363 et 3364.

Donc, 3364 est le 2018$^{\text{e}}$ entier de la liste.

Solution 2

On remplit un tableau donnant les valeurs de $n(n+1)(n+2)$ pour les valeurs de n de 1 à 10 :

n	$n(n+1)(n+2)$
1	$1 \times 2 \times 3 = 6$
2	$2 \times 3 \times 4 = 24$
3	$3 \times 4 \times 5 = 60$
4	$4 \times 5 \times 6 = 120$
5	$5 \times 6 \times 7 = 210$
6	$6 \times 7 \times 8 = 336$
7	$7 \times 8 \times 9 = 504$
8	$8 \times 9 \times 10 = 720$
9	$9 \times 10 \times 11 = 990$
10	$10 \times 11 \times 12 = 1320$

D'après le tableau, on voit que la valeur de $n(n+1)(n+2)$ n'est pas un multiple de 5 lorsque $n = 1$ ou lorsque $n = 2$, mais qu'elle est un multiple de 5 lorsque $n = 3, 4, 5$.

De même, la valeur de $n(n+1)(n+2)$ n'est pas un multiple de 5 lorsque $n = 6, 7$, mais qu'elle est un multiple de 5 lorsque $n = 8, 9, 10$.

Si on considère des groupes de 5 valeurs consécutives de n en commençant par $n = 1$, il semble que pour les deux premiers entiers de chaque groupe, la valeur de $n(n+1)(n+2)$ n'est pas un multiple de 5 et que pour les trois derniers entiers du groupe, la valeur de $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5.

Cette régularité continue-t-elle ?

Puisque 5 est un nombre premier, alors pour chaque valeur de $n(n+1)(n+2)$ qui est un multiple de 5, au moins un des facteurs $n, n+1$ ou $n+2$ doit être divisible par 5.

(On remarque aussi que pour chaque valeur de $n(n+1)(n+2)$ qui n'est pas un multiple de 5, chaque facteur n, $n+1$ et $n+2$ n'est pas divisible par 5.)

Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles au moins un des facteurs n, $n+1$ ou $n+2$ est divisible par 5 et ainsi $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5 ?

Lorsque n est un multiple de 5, la valeur de $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5.

Lorsque n est 1 de moins qu'un multiple de 5, alors $n+1$ est un multiple de 5 et $n(n+1)(n+2)$ est ainsi divisible par 5.

Lorsque n est 2 de moins qu'un multiple de 5, alors $n+2$ est un multiple de 5 et ainsi $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5.

De plus, lorsque n est 3 de moins qu'un multiple de 5, aucun des facteurs n, $n+1$ (qui est 2 de moins qu'un multiple de 5) et $n+2$ (qui est 1 de moins qu'un multiple de 5) n'est divisible par 5 et ainsi $n(n+1)(n+2)$ n'est pas divisible par 5.

De même, lorsque n est 4 de moins qu'un multiple de 5, aucun des facteurs n, $n+1$ (qui est 3 de moins qu'un multiple of 5) et $n+2$ (qui est 2 de moins qu'un multiple of 5) n'est divisible par 5 et ainsi $n(n+1)(n+2)$ n'est pas divisible par 5.

On a montré que la valeur de $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 5 lorsque n est un multiple de 5 ou 1 de moins qu'un multiple de 5 ou 2 de moins qu'un multiple de 5.

On a aussi montré que la valeur de $n(n+1)(n+2)$ n'est pas un multiple de 5 lorsque n est 3 de moins qu'un multiple de 5 ou 4 de moins qu'un multiple de 5.

Puisque tout entier positif est un multiple of 5 ou 1 de moins, 2 de moins, 3 de moins ou 4 de moins qu'un multiple de 5, on a tenu compte des valeurs de $n(n+1)(n+2)$ pour tous les entiers strictement positifs n.

On peut résumer au moyen du tableau suivant :

La valeur de l'expression $n(n+1)(n+2)$ est-elle divisible par 5 ?

Non	Non	Oui	Oui	Oui
$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$n=11$	$n=12$	$n=13$	$n=14$	$n=15$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dans ce tableau, il y a 3 valeurs de n par ligne pour lesquelles l'expression $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5. On remarque que le dernier nombre de la $k^{\text{ième}}$ ligne est $5k$.
On cherche le 2018e tel entier de cette liste.
Puisque $2018 \div 3 = 672{,}666\cdots$, les 672 premières rangées nous donnent les 2016 premières valeurs de n pour lesquelles l'expression $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5 (car $672 \times 3 = 2016$).
La 2018e valeur de n est dans la rangée suivante.
Or, le dernier terme de la 672e rangée est 5×672, ou 3360. Voici donc les 672e et 673e rangées du tableau :

Non	Non	Oui	Oui	Oui
$n=3356$	$n=3357$	$n=3358$	$n=3359$	$n=3360$
$n=3361$	$n=3362$	$n=3363$	$n=3364$	$n=3365$

La valeur $n = 3360$ est donc la 2016e valeur de n pour laquelle l'expression $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 5.
La 2017e telle valeur de n est dans la rangée suivante, soit $n = 3363$.
La 2018e telle valeur de n est donc $n = 3364$.

Réponse : (E)

24. Soit a, b, c et d les quatre chiffres distincts choisis parmi les chiffres de 1 à 9.
On peut placer ces quatre chiffres en ordres différents de 24 façons de manière à former 24 entiers distincts de quatre chiffres.
On procède en trois étapes.

1re étape : On détermine le nombre de fois que chacun des chiffres a, b, c et d parait dans la colonne des unités, dans la colonne des dizaines, dans la colonne des centaines et dans la colonne des milliers, parmi les 24 nombres de 4 chiffres.

Si un des 24 nombres de 4 chiffres a a pour chiffre des milliers, les trois autres chiffres peuvent paraitre de 6 façons, soit bcd, bdc, cbd, cdb, dbc ou dcb.
Il y a donc 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des milliers est a.
Si un des 24 nombres de 4 chiffres a b pour chiffre des milliers, les trois autres chiffres peuvent être placés de 6 façons différentes pour former 6 entiers de 4 chiffres dont le chiffre des milliers est b.
De même, il y a 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des milliers est c et 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des milliers est d.
On peut utiliser le même raisonnement pour montrer qu'il y a 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des centaines est a, 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des centaines est b, 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des centaines est c et 6 entiers de quatre chiffres dont le chiffre des centaines est d.
De fait, on peut généraliser pour montrer que chacun des chiffres a, b, c et d, parait 6 fois dans la colonne des milliers, 6 fois dans la colonne des centaines, 6 fois dans la colonne des dizaines et 6 fois dans la colonne des unités.

2$^{\text{e}}$ étape : On détermine N, la somme des 24 entiers de 4 chiffres.

Puisque chacun des chiffres a, b, c et d parait 6 fois comme chiffre des unités dans les 24 entiers de 4 chiffres, la somme des chiffres des unités des 24 entiers de 4 chiffres est égale à $6a+6b+6c+6d$, ou $6 \times (a+b+c+d)$.
Puisque chacun des chiffres a, b, c et d parait 6 fois comme chiffre des dizaines dans les 24 entiers de 4 chiffres, la somme des chiffres des dizaines des 24 entiers de 4 chiffres est égale à $10 \times 6 \times (a+b+c+d)$.
On continue de la même façon pour la somme des chiffres des centaines et des milliers pour obtenir :

$$\begin{aligned} N &= 1000 \times 6 \times (a+b+c+d) + 100 \times 6 \times (a+b+c+d) + 10 \times 6 \times (a+b+c+d) \\ &\quad + 6 \times (a+b+c+d) \\ &= 6000 \times (a+b+c+d) + 600 \times (a+b+c+d) + 60 \times (a+b+c+d) + 6 \times (a+b+c+d) \end{aligned}$$

On pose $s = a+b+c+d$. Donc $N = 6000s + 600s + 60s + 6s$, ou $N = 6666s$.

3$^{\text{e}}$ étape : On détermine la plus grande somme des diviseurs premiers de $N = 6666s$

On écrit 6666 en factorisation première : $6666 = 6 \times 1111 = 2 \times 3 \times 11 \times 101$.
On a donc $N = 2 \times 3 \times 11 \times 101 \times s$. La somme des diviseurs premiers de N est donc égale à $2+3+11+101$ plus les diviseurs premiers de s qui sont différents de $2, 3, 11$ et 101.
Pour déterminer la plus grande somme des diviseurs premiers de N, il suffit donc de déterminer la plus grande somme des diviseurs premiers de s qui n'égalent pas $2, 3, 11$ ou 101.
Or, $s = a+b+c+d$ et la valeur de s est calculée pour chaque choix de a, b, c et d parmi les chiffres de 1 à 9. La plus grande valeur de s est donc $9+8+7+6$, ou 30 et sa plus petite valeur est $1+2+3+4$, ou 10.
Si $s = 29$ (on obtient cette valeur lorsque a, b, c et d égalent $9, 8, 7$ et 5 dans un ordre quelconque), alors $N = 2 \times 3 \times 11 \times 101 \times 29$ et la somme des diviseurs premiers de N est égale à $2+3+11+101+29$, ou 146 (puisque 29 est un nombre premier).
Si s prend une autre valeur de 10 à 30, la somme de ses diviseurs est inférieure à 29.
(On peut s'en convaincre ou faire une liste des diviseurs premiers des entiers de 10 à 30 pour vérifier que 29 est bien la plus grande somme.)
Donc, la plus grande somme des diviseurs premiers de N est 146.

Réponse : (D)

25. Puisque le quadrillage a une hauteur de 2, il n'y a que deux longueurs possibles pour les flèches verticales, soit 1 ou 2.
Puisque toutes les flèches d'un chemin doivent être de longueurs distinctes, il peut y avoir un maximum de deux flèches verticales dans n'importe quel chemin.
Il ne peut donc y avoir plus de 3 flèches horizontales dans un chemin. (S'il y avait 4 flèches horizontales ou davantage, il faudrait au moins 3 flèches verticales, car deux flèches consécutives doivent être perpendiculaires. Cela contredirait l'énoncé précédent.)
On peut conclure qu'un chemin est formé d'un maximum de 5 flèches.

On utilise le fait que les flèches qui composent un chemin doivent être de longueurs distinctes pour déterminer les combinaisons possibles de longueurs de flèches horizontales et verticales qui permettent de se rendre de A à F.
Lorsqu'on aura déterminé les combinaisons possibles de flèches verticales et de flèches horizontales, on tentera de les placer en ordres différents.
On considère d'abord les flèches verticales.
Le quadrillage a une hauteur de 2 et A est 1 unité dessous F. Donc n'importe quelle combinaison

de flèches verticales doit avoir pour résultat 1 unité vers le haut.
On utilise H pour « vers le haut » et B pour « vers le bas ».
Les combinaisons possibles sont :

H1 (flèche vers le haut de longueur 1)
B1, H2 (flèche vers le bas de longueur 1, flèche vers le haut de longueur 2)

On considère ensuite les flèches horizontales.
Le quadrillage a une longueur de 12. Il y a une distance de 9 unités entre A de F. Donc, n'importe quelle combinaison de flèches horizontales doit avoir pour résultat 9 vers la droite.
On utilise D pour « droite » et G pour « gauche ».
Plusieurs de ces combinaisons peuvent être placées dans des ordres différents. On en tiendra compte plus loin.
On traite de chemins de 1 flèches, puis de chemins de 2 flèches, puis de chemins de 3 flèches.
On remarque que toute combinaison de flèches verticales contient une flèche de longueur 1. Puisque les flèches d'un chemin ont des longueurs distinctes, il n'y aura aucune flèche horizontale de longueur 1.
Aussi, toute combinaison de 3 flèches horizontales doit être combinée avec 2 flèches verticales, qui seront de longueurs 1 et 2. Il n'y aura donc aucune combinaison de 3 flèches horizontales avec une flèche horizontale de longueur 1 et/ou une flèche horizontale de longueur 2.

a) D9
b) D2, D7
c) D3, D6
d) D4, D5
e) G2, D11
f) G3, D12
g) G3, D4, D8
h) G3, D5, D7
i) G4, D3, D10
j) G4, D5, D8
k) G4, D6, D7
l) G5, D3, D11
m) G5, D4, D10
n) G5, D6, D8
o) G6, D3, D12
p) G6, D4, D11
q) G6, D5, D10
r) G6, D7, D8
s) G7, D4, D12
t) G7, D5, D11
u) G7, D6, D10
v) G8, D5, D12
w) G8, D6, D11
x) G8, D7, D10
y) G9, D6, D12
z) G9, D7, D11
aa) G9, D8, D10
ab) G10, D7, D12
ac) G10, D8, D11
ad) G11, D8, D12

Il y a une seule combinaison contenant 1 flèche horizontale.
Les combinaisons de 2 flèches horizontales indiquent d'abord celles de deux flèches vers la droite (en ordre croissant selon la longueur de la première flèche) et ensuite celles formées d'une flèche vers la gauche suivie de flèches vers la droite (en ordre croissant selon la longueur de la première flèche).
Les combinaisons de 3 flèches sont plus difficiles à inscrire au complet.
Il n'y a aucune combinaison utile qui inclut 3 flèches vers la droite ou 2 flèches vers la gauche, puisqu'au moins une de ces flèches serait de longueur 1 ou 2.
On a inscrit les combinaisons avec G3 (flèche vers la gauche de longueur 3), puis celles avec G4, et ainsi de suite.

On combine maintenant les flèches horizontales et verticales pour former les chemins.
Chaqque combinaison de flèches de diverses directions et longueurs peut être reproduite pour former un chemin.
La combinaison H1 peut seulement être utilisée avec les déplacements horizontaux de a) à f) dans la liste, puisqu'il ne peut pas être utilisé avec trois flèches horizontales.
a) Il y a deux chemins : H1/D9 et D9/H1.

b) Il y a deux chemins : D2/H1/D7 et D7/H1/D2.

c) De même, il y a deux chemins.

d) De même, il y a deux chemins.

e) Il y a un chemin : G2/H1/D11. En effet, on doit alterner horizontal, vertical, horizontal et on ne peut terminer par une flèche vers la gauche.

f) De même, il y a un chemin.

Jusqu'à présent, on a 10 chemins.
La combinaison B1, H2 peut être combinée avec des flèches horizontales de longueurs 1, 2 ou 3.

a) Il y a 1 chemin : B1/D9/H2. En effet, on ne peut terminer par une flèche vers la gauche.

b) Impossible, car on aurait deux flèches de longueur 2.

c) Il y a 4 chemins : D3/B1/D6/H2, D6/B1/D3/H2, B1/D3/H2/D6, B1/D6/H2/D3. On peut remplacer D3 et D6 l'un pour l'autre et choisir de commencer par une flèche verticale ou horizontale.

d) De même, il y a 4 chemins.

e) Impossible, car on aurait deux flèches de longueur 2.

f) Il y a 2 chemins : G3/B1/D12/H2 et B1/G3/H2/D12.

g) Il y a 4 chemins : G3/B1/D4/H2/D8, D4/B1/G3/H2/D8, G3/B1/D8/H2/D4, D8/B1/G3/H2/D4. Dans chaque cas, on doit commencer par une flèche horizontale et terminer par une flèche vers la droite. En plus, la flèche vers le bas doit précéder la flèche vers le haut.

h) De même, il y a 4 chemins.

i) Il y a 1 chemin : D3/B1/G4/H2/D10. On ne peut commencer par D10 ou G4, puisqu'on sortirait du quadrillage. On doit aussi terminer par une flèche vers la droite.

j, k) Il y a 2 chemins dans chaque cas. Par exemple, dans le cas j), on a D5/B1/G4/H2/D8 et D8/B1/G4/H2/D5.

l, m) Comme dans le cas i), il y a 1 chemin dans chaque cas.

n) Comme dans le cas j), il y a 2 chemins.

o, p, q) Comme dans le cas i), il y a 1 chemin dans chaque cas.

r) Comme dans le cas j), il y a 2 chemins.

s) à ad) Dans chacun de ces 12 cas, il y a 1 chemin comme dans le cas i).

En incluant les 10 chemins déjà comptés qui utilisent H1 seulement, le nombre total de chemins de A à F est égal à :

$$10 + 1 + 4 + 4 + 2 + 4 + 4 + 1 + 2(2) + 2(1) + 2 + 3(1) + 2 + 12(1) = 55$$

Réponse : (B)