Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
***cemc.uwaterloo.ca***

# *Concours Galois 2018*

**le jeudi 12 avril 2018**
**(Amérique du Nord et Amérique du Sud)**

**le vendredi 13 avril 2018**
**(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)**

*Solutions*

1. (a) On a $\dfrac{12x^2}{3x} = 4x$ $(x \neq 0)$.

   (b) Puisque $\dfrac{12x^2}{3x} = 4x$, la valeur de l'expression $\dfrac{12x^2}{3x}$ est la même que celle de l'expression $4x$ pour toutes les valeurs de $x$ $(x \neq 0)$.
   Lorsque $x = 5$, cette valeur est égale à $4(5)$, ou 20.

   (c) On simplifie l'expression : $\dfrac{8mn}{3m^2} = \dfrac{8n}{3m}$ $(m \neq 0)$.
   La valeur de l'expression $\dfrac{8mn}{3m^2}$ est la même que celle de l'expression $\dfrac{8n}{3m}$ pour toutes les valeurs de $m$ et de $n$ $(m \neq 0)$.
   On reporte $n = 2m$ dans l'expression $\dfrac{8n}{3m}$. On obtient $\dfrac{8(2m)}{3m} = \dfrac{16m}{3m} = \dfrac{16}{3}$.
   Lorsque $n = 2m$ et que $m \neq 0$, l'expression $\dfrac{8mn}{3m^2}$ a une valeur de $\dfrac{16}{3}$.

   (d) On simplifie l'expression : $\dfrac{8p^2q}{5pq^2} = \dfrac{8p}{5q}$ $(p \neq 0)$, $(q \neq 0)$
   Lorsque $q = 6$, l'expression est égale à $\dfrac{8p}{5q} = \dfrac{8p}{5(6)} = \dfrac{8p}{30} = \dfrac{4p}{15}$.
   Donc lorsque $q = 6$ (et $p \neq 0$) l'expression $\dfrac{8p^2q}{5pq^2}$ est équivalente à l'expression $\dfrac{4p}{15}$.
   L'inéquation $3 \leq \dfrac{8p^2q}{5pq^2} \leq 4$ est donc équivalente à l'inéquation $3 \leq \dfrac{4p}{15} \leq 4$.
   L'inéquation $3 \leq \dfrac{4p}{15} \leq 4$ devient $45 \leq 4p \leq 60$, ou $\dfrac{45}{4} \leq p \leq \dfrac{60}{4}$, ou $11{,}25 \leq p \leq 15$.
   Puisque $p$ est un entier positif, alors $p = 12, 13, 14, 15$.

   Remarque : Dans les parties (b), (c) et (d), on a choisi de simplifier l'expression avant de procéder par substitution. On aurait pu procéder par substitution avant de simplifier.

2. (a) Le triangle $ABC$ est rectangle en $B$.
   D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Donc $AC^2 = 8^2 + 15^2$, d'où $AC = \sqrt{64 + 225}$ (puisque $AC > 0$), ou $AC = 17$.

   (b) Dans la figure 2, $EF$ est un diamètre. Sa longueur est donc le double de celle du rayon. Il a donc une longueur de 26.
   D'après la deuxième propriété des cercles, $\angle EDF = 90°$.
   D'après le théorème de Pythagore, $DF^2 = EF^2 - DE^2$. Donc $DF^2 = 26^2 - 24^2$, d'où $DF = \sqrt{676 - 576}$ (puisque $DF > 0$), ou $DF = \sqrt{100}$, ou $DF = 10$ .

   (c) Puisque $SQ$ est un diamètre, alors $\angle SPQ = \angle SRQ = 90°$.
   Puisque $SP = PQ$, le triangle $SPQ$ est isocèle.
   Donc $\angle PQS = \angle PSQ = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45°$.
   Puisque $\angle RQP = 80°$ et que $\angle RQO = \angle RQP - \angle PQS$, alors $\angle RQO = 80° - 45°$, ou $\angle RQO = 35°$.
   Dans le triangle $ROQ$, $OR = OQ$ (ce sont des rayons). Donc $\angle QRO = \angle RQO = 35°$ et $\angle ROQ = 180° - 2 \times 35°$, ou $\angle ROQ = 110°$.
   Dans le triangle $SRQ$, on a $\angle RSQ = 180° - \angle SRQ - \angle RQS$.
   Donc $\angle RSQ = 180° - 90° - 35°$, ou $\angle RSQ = 55°$.

3. (a) Le volume d'un cylindre de rayon $r$ et de hauteur $h$ est égal à $\pi r^2 h$.
Le cylindre A a un rayon de 12 et une hauteur de 25. Son volume est égal à $\pi(12)^2(25)$, ou $3600\pi$.
Avant d'abaisser le cylindre B dans le cylindre A, l'eau dans le cylindre A était à une profondeur de 19. Le volume initial de l'eau dans le cylindre A était donc de $\pi(12)^2(19)$, ou $2736\pi$.
La hauteur du cylindre B (30) est supérieure à celle du cylindre A. Il est donc impossible pour l'eau de verser du cylindre A dans le cylindre B.
Lorsqu'on abaisse le cylindre B jusqu'au fond du cylindre A, la partie du cylindre B qui est à l'intérieur du cylindre A a un rayon de 9 et une hauteur de 25 (la hauteur du cylindre A). Donc, le volume occupé par le cylindre B à l'intérieur du cylindre A est égal à $\pi(9)^2(25)$, ou $2025\pi$.
Puisque l'eau ne peut pas se déverser dans le cylindre B, l'espace disponible pour l'eau dans le cylindre A (et à l'extérieur du cylindre B) est égal à la différence entre le volume du cylindre A et le volume de la partie du cylindre B à l'intérieur du cylindre A, c'est-à-dire à $3600\pi - 2025\pi$, ou $1575\pi$.
Le volume initial de l'eau dans le cylindre A était de $2736\pi$. Lorsque le cylindre B est abaissé jusqu'au fond du cylindre A, l'espace disponible pour l'eau dans le cylindre A est de $1575\pi$.
Donc, le volume d'eau qui se déverse du cylindre A sur le sol est égal à $2736\pi - 1575\pi$, ou $1161\pi$.

(b) Lorsque le cylindre B est abaissé dans le cylindre A, de l'eau se déverse du cylindre A sur le sol lorsque :

(i) le volume de l'eau dans le cylindre A dépasse le volume de l'espace à l'intérieur du cylindre A, mais à l'extérieur du cylindre B et

(ii) le haut du cylindre B est plus haut que celui du cylindre A.
(Voir la figure 1 qui accompagne la question.)

Lorsque le cylindre B est abaissé dans le cylindre A, de l'eau se déverse du cylindre A dans le cylindre B lorsque :

(i) le haut du cylindre B est plus bas que celui du cylindre A et

(ii) le volume de l'eau dans le cylindre A (et à l'extérieur du cylindre B) dépasse le volume de l'espace à l'intérieur du cylindre qui est au-dessous du haut du cylindre B et à l'extérieur du cylindre B et

(iii) le cylindre B n'est pas rempli d'eau.
(Voir la figure 2 qui accompagne la question.)

Dans la figure 3 ci-contre, on a abaissé le cylindre B jusqu'à ce que le haut du cylindre B soit au même niveau que celui du cylindre A.
À ce point, le volume de l'espace à l'intérieur du cylindre A et à l'extérieur du cylindre B est égal à $\pi(12)^2(25) - \pi(9)^2(20)$, ou $3600\pi - 1620\pi$, ou $1980\pi$.
Le volume initial d'eau dans le cylindre A était de $2736\pi$. À ce point, le volume de l'eau qui s'est déversée du cylindre A sur le sol est donc égal à $2736\pi - 1980\pi$, ou $756\pi$.

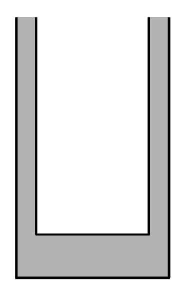
Figure 3

(Puisque le haut du cylindre B n'est pas au-dessous du haut du cylindre A, aucune eau ne s'est encore déversée du cylindre A dans le cylindre B.)
À mesure que le cylindre B est abaissé plus bas, à partir de ce point, de l'eau sera déversée dans le cylindre B. Combien d'eau sera déversée dans le cylindre B ?

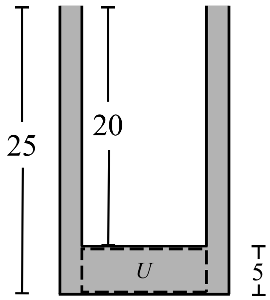

Figure 4

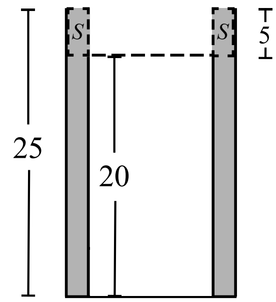

Figure 5

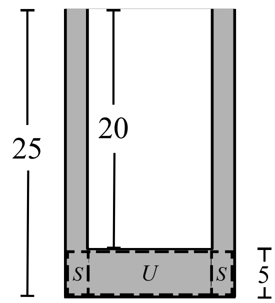

Figure 6

Dans la figure 4, l'eau qui est située sous le cylindre B (indiquée par $U$) sera déplacée par le cylindre B lorsqu'il sera abaissé jusqu'au fond du cylindre A.
Cette eau sera déversée dans le cylindre B (puisque le haut du cylindre B sera plus bas que le haut du cylindre A).
La partie $U$ a la forme d'un cylindre de rayon 9 (celui du cylindre B) et de hauteur 5 ($25 - 20 = 5$).
La partie $U$ a donc un volume égal à $\pi(9)^2(5)$, ou $405\pi$.
De plus, l'eau dans la partie $S$, dans la figure 5, sera aussi déversée dans le cylindre B à mesure que le cylindre B est abaissé jusqu'au fond du cylindre A.
La partie $S$ a la forme d'un anneau cylindrique à l'intérieur du cylindre A et à l'extérieur du cylindre B, avec une hauteur de 5 ($25 - 20 = 5$). Cette partie $S$ a donc un volume égal à $\pi(12)^2(5) - \pi(9)^2(5)$, ou $315\pi$.
Le volume de l'eau qui est déversée du cylindre A dans le cylindre B est égal à $405\pi + 315\pi$, ou $720\pi$.
La profondeur $p$ de l'eau dans le cylindre B, lorsqu'il se trouve au fond du cylindre A, est obtenue au moyen de l'équation $\pi(9)^2(p) = 720\pi$, d'où $p = \dfrac{720\pi}{81\pi}$, ou $p = \dfrac{80}{9}$.

Remarque : On aurait pu déterminer le volume de l'eau qui est déversée dans le cylindre B en remarquant que le volume de la partie $S$ (dans la figure 5), est égal au volume de l'eau qui entoure la section $U$ (voir la figure 6).
Puisque la section $U$ et la section $S$ ont la même hauteur de 5, leur volume total est celui d'un cylindre de rayon 12 et hauteur 5. Ce volume est égal à $\pi(12)^2(5)$, ou $720\pi$, comme dans le premier calcul.

(c) *Solution 1*

On détermine d'abord les valeurs de $h$ pour lesquelles une certaine quantité d'eau est déversée du cylindre A lorsque le cylindre B est abaissé jusqu'au fond du cylindre A.
On considère qu'on abaisse le cylindre B dans le cylindre A jusqu'à ce que le niveau de l'eau atteigne le haut du cylindre A, comme dans la figure 7 (on sait que cela arrive pour certaines valeurs de $h$, puisque ça s'est produit dans la partie (a)).
Soit $y$ la hauteur entre les fonds des cylindres. La distance entre le haut du cylindre A et le fond du cylindre B est donc égale à $25 - y$.

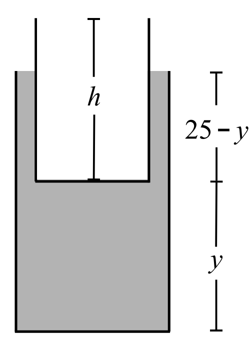

Figure 7

Le volume $V_e$ de l'eau est égal au volume de la partie du cylindre A située plus bas que le fond du cylindre B, soit $\pi(12)^2(y)$, plus le volume à l'intérieur du cylindre A et à l'extérieur du cylindre B entre le haut du cylindre A et le fond du cylindre B, ou $\pi(12)^2(25 - y) - \pi(9)^2(25 - y)$, ou $\pi(12^2 - 9^2)(25 - y)$.
Donc, $V_e = \pi(12)^2(y) + \pi(12^2 - 9^2)(25 - y)$, ou $V_e = 144\pi y + 63\pi(25 - y)$, ou $V_e = 81\pi y + 1575\pi$.

D'après la partie (a), le volume initial de l'eau est égal à $2736\pi$.
On a donc $81\pi y + 1575\pi = 2736\pi$, ou $81\pi y = 1161\pi$, d'où $y = \frac{43}{3}$.
Donc lorsque $h > 25 - y$, c'est-à-dire lorsque $h > 25 - \frac{43}{3}$, ou $h > \frac{32}{3}$, l'eau sera déversée du cylindre A sur le sol.
Qu'arrive-t-il lorsque $h \leq \frac{32}{3}$ ?
Lorsque $h \leq \frac{32}{3}$, le cylindre B peut être abaissé jusqu'à ce que son haut soit au même niveau que le haut du cylindre A sans que de l'eau ne soit déversée du cylindre sur le sol. Dans ce cas, lorsque $h \leq \frac{32}{3}$, on a $y \geq 25 - \frac{32}{3}$, ou $y \geq \frac{43}{3}$, et ainsi $y > h$.
C'est-à-dire que lorsque le cylindre B est abaissé jusqu'à ce que son haut soit au même niveau que le haut du cylindre A, le volume d'eau qui se trouve directement en dessous du cylindre B est supérieur au volume du cylindre B et le cylindre B sera donc complètement rempli d'eau lorsqu'il sera rendu au fond du cylindre A.
Dans cette question, le cylindre B ne doit pas être plein. Il faut donc que $h > \frac{32}{3}$ et de l'eau sera déversée du cylindre A au sol avant que le haut du cylindre B n'atteigne le niveau du haut du cylindre A.

Ensuite, on restreint davantage les valeurs de $h$ de manière que lorsque le cylindre B atteint le fond du cylindre A, il y aura de l'eau dans le cylindre B sans qu'il soit plein.
On abaisse le cylindre B jusqu'à ce que les hauts des deux cylindres soient au même niveau (on aura donc $h \leq 25$).
Or, de l'eau a déjà été déversée du cylindre A.
Lorsque le cylindre B est abaissé plus bas que ce point (il faut alors que $h < 25$), de l'eau sera déversée du cylindre A dans le cylindre B (et non pas sur le sol).

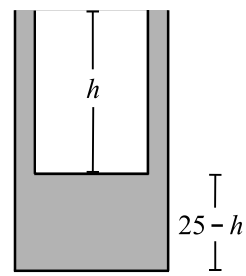

Figure 8

Dans la partie (b), on a vu que lorsque le cylindre B est abaissé jusqu'au fond du cylindre A, le volume de l'eau qui est déversée du cylindre A dans le cylindre B est égal au volume de l'eau dans le cylindre A située au-dessous du cylindre B (comme dans la figure 8).
Elle forme un cylindre de rayon 12 et de hauteur $25 - h$ et elle a donc un volume égal à $\pi(12)^2(25 - h)$.
On suppose que l'eau qui a été déversée dans le cylindre B occupe une profondeur $d$ dans ce cylindre.
Une fois que le cylindre B a été abaissé jusqu'au fond du cylindre A, le volume d'eau dans le cylindre B, soit $\pi(9)^2(d)$, doit être égal à $\pi(12)^2(25 - h)$.
On a donc $81\pi d = 144\pi(25 - h)$, ou $d = \dfrac{3600 - 144h}{81}$, ou $d = \dfrac{400 - 16h}{9}$.
La profondeur de l'eau dans le cylindre B doit être inférieure à la hauteur du cylindre B (le cylindre B ne peut pas être plein). On a donc $d < h$, ou $\dfrac{400 - 16h}{9} < h$, ou $400 - 16h < 9h$, ou $400 < 25h$, ou $16 < h$.
On a vu, ci-haut, que l'eau ne peut être déversée dans le cylindre B à moins que la hauteur du cylindre B soit inférieure à celle du cylindre A. On a donc $h < 25$.
Lorsque le cylindre est abaissé jusqu'au fond du cylindre A, il y a de l'eau dans le cylindre B, sans qu'il soit plein, lorsque $16 < h < 25$.

*Solution 2*
Soit $V_A$ le volume du cylindre A, $V_B$ le volume du cylindre B et $V_E$ le volume initial de l'eau.
Comme dans la solution 1, on a $V_A = 3600\pi$, $V_B = 81\pi h$ et $V_E = 2736\pi$.

Si $V_E + V_B > V_A$, l'eau est déversée du cylindre A sur le sol.
Cela se produit lorsque $2736\pi + 81\pi h > 3600\pi$, ou $81\pi h > 864\pi$, ou $h > \frac{32}{3}$.
Si $\frac{32}{3} < h < 25$, l'eau est déversée sur le sol, puis dans le cylindre B. (Si $h \leq \frac{32}{3}$, B sera alors rempli d'eau, puisqu'aucune quantité d'eau n'est déversée sur le sol et la hauteur de B est inférieure à la profondeur initiale de l'eau.)
Supposons que $\frac{32}{3} < h < 25$.
Le volume de l'eau qui est déversée du cylindre A sur le sol sera égal à :

$$V_{\text{eau au sol}} = V_E + V_B - V_A = 81\pi h - 864\pi$$

Lorsque les hauts des cylindres sont au même niveau (figure 9), aucune quantité d'eau n'a été déversée dans le cylindre B. Le volume de l'eau dans le cylindre A est alors égal au volume initial de l'eau moins le volume de l'eau déversée sur le sol.

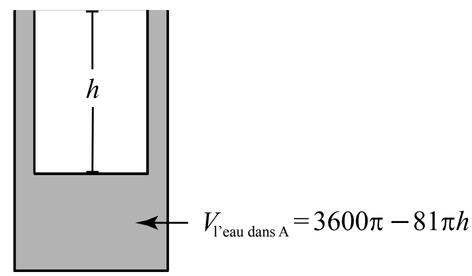

Figure 9

Donc :

$$V_{\text{eau dans A}} = 2736\pi - V_{\text{eau au sol}} = 2736\pi - (81\pi h - 864\pi) = 3600\pi - 81\pi h$$

À partir de ce point, toute l'eau reste dans le cylindre B ou dans le cylindre A.
Lorsque le cylindre B arrive au fond du cylindre A (figure 10), le volume de l'eau à l'extérieur du cylindre B (mais à l'intérieur du cylindre A), est le volume de la partie du cylindre A située plus bas que le haut du cylindre B moins le volume du cylindre B.

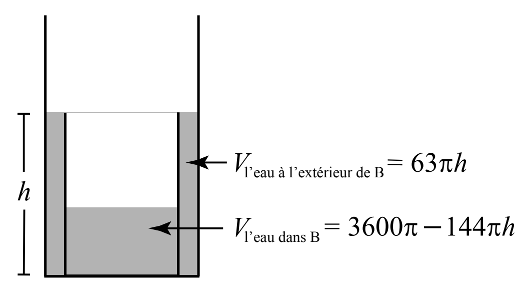

Figure 10

Donc :

$$V_{\text{eau hors de B}} = \pi(12^2)h - \pi(9^2)h = 63\pi h$$

De plus, le volume d'eau dans le cylindre A, soit $3600\pi - 81\pi h$, doit être égal au volume d'eau à l'extérieur de B plus le volume d'eau dans le cylindre B.
Donc :

$$\begin{aligned}
V_{\text{eau dans A}} &= V_{\text{eau hors de B}} + V_{\text{eau dans B}} \\
V_{\text{eau dans B}} &= V_{\text{eau dans A}} - V_{\text{eau hors de B}} \\
&= 3600\pi - 81\pi h - 63\pi h \\
&= 3600\pi - 144\pi h
\end{aligned}$$

Le volume de l'eau dans le cylindre B doit être inférieur au volume du cylindre B.
Donc $3600\pi - 144\pi h < 81\pi h$, ou $3600\pi < 225\pi h$, ou $16 < h$.
Lorsque le cylindre est abaissé jusqu'au fond du cylindre A, il y a de l'eau dans le cylindre B, sans qu'il soit plein, lorsque $16 < h < 25$.

4. (a) On peut exprimer 45 comme somme de un ou de plusieurs entiers consécutifs strictement positifs comme suit :

$45$, $22+23$, $14+15+16$, $7+8+9+10+11$, $5+6+7+8+9+10$, et $1+2+3+4+5+6+7+8+9$

Il n'y a aucune autre façon de le faire.
Donc $C(45) = 6$.

(b) La somme des entiers de 1 à $n$ est égale à $\frac{1}{2}n(n+1)$.
La somme des entiers de 4 à $n$ ($n \geq 4$) est égale à la somme des entiers de 1 à $n$ moins celle des entiers de 1 à 3. Cette dernière est égale à 6 ($1+2+3=6$).
Donc :

$$\begin{aligned} m &= 4+5+6+\cdots+n \\ &= \tfrac{1}{2}n(n+1)-6 \\ &= \tfrac{1}{2}(n(n+1)-12) \\ &= \tfrac{1}{2}(n^2+n-12) \\ &= \tfrac{1}{2}(n-3)(n+4). \end{aligned}$$

Puisque $m = \frac{1}{2}(n+a)(n+b)$ ($a < b$), alors $a = -3$ et $b = 4$.

(c) Si $m = (a+1)+(a+2)+\cdots+n$, ($a \geq 0$ et $n \geq a+1$), alors $m$ est égal à la somme des entiers de 1 à $n$ moins la somme des entiers de 1 à $a$.
Donc $m = \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}a(a+1)$.
On transforme pour obtenir :

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{1}{2}n(n+1)-\tfrac{1}{2}a(a+1) \\ &= \tfrac{1}{2}(n^2+n-a^2-a) \\ &= \tfrac{1}{2}(n^2-a^2+n-a) \\ &= \tfrac{1}{2}((n-a)(n+a)+n-a) \\ &= \tfrac{1}{2}(n-a)(n+a+1) \end{aligned}$$

Chaque couple d'entiers $(a, n)$ ($a \geq 0$ et $n \geq a+1$) pour lequel $m = \frac{1}{2}(n-a)(n+a+1)$ donne une somme unique d'un ou plusieurs entiers de $a+1$ à $n$ dont la somme est égale à $m$.
On doit déterminer le nombre de tels couples $(a, n)$, sachant que $m = 2 \times 3^4 \times 5^6$.
Puisque $m = \frac{1}{2}(n-a)(n+a+1)$, alors $2m = (n-a)(n+a+1)$.
Donc, $2m$ peut être exprimé comme produit de deux entiers strictement positifs, $n+a+1$ et $n-a$.
La différence de ces deux entiers est égale à $(n+a+1)-(n-a)$, ou $2a+1$, qui est un entier impair pour tous entiers $a$ ($a \geq 0$).
Puisque la différence de $n+a+1$ et $n-a$ est impaire, un de ces deux entiers doit être pair et l'autre doit être impair (on dit qu'ils sont de *parités* différentes).
Donc, l'évaluation de $C(m)$ semble équivalente au problème de compter le nombre de couples de facteurs de $2m$ ($n+a+1$ et $n-a$) qui ont une parité différente.
On a montré que chaque couple d'entiers $(a, n)$ ($a \geq 0$ et $n \geq a+1$) pour lequel $m = \frac{1}{2}(n-a)(n+a+1)$ nous donne un couple d'entiers de parités différentes.
On doit démontrer que la proposition réciproque est vraie, c'est-à-dire que chaque couple de facteurs de parités différentes donne un couple unique $(a, n)$.
Supposons que $2m = d \cdot e$, $d$ étant un entier positif impair et $e$ étant un entier pair strictement positif.

On montre que ces deux entiers donneront un couple $(a, n)$.
Si $d > e$, soit $d = n + a + 1$ et $e = n - a$ (puisque $n + a + 1 > n - a$).
On additionne les équations $n+a+1 = d$ et $n-a = e$, membre par membre, pour obtenir $2n + 1 = d + e$, ou $n = \frac{1}{2}(d + e - 1)$.
On soustrait les deux mêmes équations, membre par membre, pour obtenir $2a+1 = d-e$, ou $a = \frac{1}{2}(d - e - 1)$.
Puisque $d$ et $e$ sont de parités différentes, alors $d + e$ et $d - e$ sont impairs. Donc $d + e - 1$ et $d - e - 1$ sont pairs.
Donc, $n = \frac{1}{2}(d + e - 1)$ et $a = \frac{1}{2}(d - e - 1)$ sont des entiers et $n > a$.
(En supposant que $d < e$, un argument semblable montre qu'il existe des entiers $a$ et $n$ $(n > a)$.)
En d'autres mots, chaque couple de facteurs $(d, e)$ de parités différentes donne un couple unique $(a, n)$ $(n > a)$.
Ceci confirme que l'évaluation de $C(m)$ est équivalente au problème de compter le nombre de couples de facteurs de $2m$ de parités différentes.

Avant d'évaluer $C(2 \times 3^4 \times 5^6)$, on utilise ce résultat à la partie (a) pour confirmer que $C(45) = 6$ et pour démontrer que pour chaque facteur impair de $2 \times 45$, il existe une liste unique correspondante d'entiers consécutifs strictement positifs avec une somme de 45.

Puisque $m = 45 = 3^2 \times 5$, alors $2m = 2 \times 3^2 \times 5$. Les facteurs impairs de $2 \times 3^2 \times 5$ doivent être de la forme $3^i \times 5^j$ $(0 \leq i \leq 2$ et $0 \leq j \leq 1)$, car les nombres impairs doivent n'avoir que des diviseurs impairs.
Puisqu'il y a 3 choix pour $i$ (0, 1 ou 2) et 2 choix pour $j$ (0 ou1), il y a 6 facteurs impairs $(3 \times 2 = 6)$ de $2 \times 3^2 \times 5$ (ce sont $1, 3, 5, 9, 15$ et $45$).
On démontre ensuite que chacun de ces facteurs impairs correspond à un couple unique $(a, n)$ tel que :

(i) $(n - a)(n + a + 1) = 2 \times 45$ et

(ii) $n + a - 1$ et $n - a$ sont de parités différentes et

(iii) $(a + 1) + (a + 2) + \cdots + n = 45$.

Les facteurs impairs $1, 3, 5, 9, 15$ et $45$ donnent les couples $(1, 90), (3, 30), (5, 18), (9, 10), (15, 6)$ et $(45, 2)$ (on remarque que les deux nombres de chaque couple sont bien de parités différentes).
On remarque aussi que puisque $a \geq 0$, alors $n + a + 1 > n - a$. Ainsi, par exemple avec le couple (5,18), on a $n - a = 5$ et $n + a + 1 = 18$.
L'addition de ces deux équations, membre par membre, donne $2n + 1 = 23$, d'où $n = 11$ et $a = 6$.
Ce couple $(6, 11)$ donne la somme $7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 45$.
On résume ces résultats dans le tableau suivant en utilisant les autres couples.

| Couple | $a - n$ | $a + n + 1$ | $n$ | $a$ | $(a + 1) + (a + 2) + \cdots + n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1, 90)$ | 1 | 90 | 45 | 44 | 45 |
| $(3, 30)$ | 3 | 30 | 16 | 13 | $14 + 15 + 16 = 45$ |
| $(5, 18)$ | 5 | 18 | 11 | 6 | $7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 45$ |
| $(9, 10)$ | 9 | 10 | 9 | 0 | $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ |
| $(15, 6)$ | 6 | 15 | 10 | 4 | $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$ |
| $(45, 2)$ | 2 | 45 | 23 | 21 | $22 + 23 = 45$ |

En comparant le tableau et la réponse de la partie (a), on voit bien que pour chaque facteur impair de $2 \times 45$, il existe une liste unique d'entiers consécutifs strictement positifs ayant une somme de 45.

On évalue maintenant $C(2 \times 3^4 \times 5^6)$, c'est-à-dire qu'on compte le nombre de facteurs impairs de $2^2 \times 3^4 \times 5^6$.
Les facteurs impairs de $2^2 \times 3^4 \times 5^6$ sont de la forme $3^i \times 5^j$ ($0 \leq i \leq 4$ et $0 \leq j \leq 6$).
Puisqu'il y a 5 choix pour $i$ et 7 choix pour $j$, il y a 35 facteurs impairs ($5 \times 7 = 35$) de $2^2 \times 3^4 \times 5^6$. Donc $C(2 \times 3^4 \times 5^6) = 35$.

(d) On cherche le plus petit entier strictement positif $k$ pour lequel $C(k) = 215 = 5 \times 43$ (5 et 43 sont des nombres premiers).
Si $k = 2^a$, $a$ étant un entier non négatif, alors $C(k) = 1$ et $k$ doit donc avoir des facteurs premiers impairs $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Pourquoi ?
Ainsi $k = 2^a \cdot p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdots p_n^{q_n}$ $p_i$ ($1 \leq i \leq n$) étant des nombres premiers distincts et $q_j$ ($1 \leq j \leq n$) des entiers positifs.
D'après la partie (c), on sait que $C(k) = (q_1 + 1)(q_2 + 1) \cdots (q_n + 1)$.
Puisque $C(k) = 5 \times 43 = (q_1 + 1)(q_2 + 1) \cdots (q_n + 1)$, posons $n = 2$ et $q_1 + 1 = 5$, c'est-à-dire $q_1 = 4$ et $q_2 + 1 = 43$, ou $q_2 = 42$.
Pour que $k$ soit un minimum, posons $a = 0$ et on choisit le plus petit des facteurs premiers impairs $p_1 = 5$ et $p_2 = 3$ ($p_1 = 3$ et $p_2 = 5$ donnent $k = 3^4 \times 5^{42}$, ce qui est une valeur beaucoup plus grande de $k$).
Le plus petit entier strictement positif $k$ for pour lequel $C(k) = 215$ est $k = 5^4 \times 3^{42}$.