Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2018

(11e année – Secondaire V)

le mardi 27 février 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 28 février 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a :

$$\begin{aligned} 2016 - 2017 + 2018 - 2019 + 2020 &= 2016 + (2018 - 2017) + (2020 - 2019) \\ &= 2016 + 1 + 1 \\ &= 2018 \end{aligned}$$

Réponse : (D)

2. Puisque la températire maximale était de 14 °C et que la température minimale était de −11 °C, l'étendue des températures était de 14 °C − (−11 °C), ou 25 °C.

Réponse : (B)

3. L'expression $(3x + 2y) - (3x - 2y)$ est égale à $3x + 2y - 3x + 2y$, ou $4y$.
Lorsque $x = -2$ et $y = -1$, cette expression a une valeur de $4(-1)$, ou -4.

Réponse : (A)

4. La fraction $\frac{5}{7}$ est entre 0 et 1.
La fraction $\frac{28}{3}$ est équivalente à $9\frac{1}{3}$. Elle est donc entre 9 et 10.
Les entiers supérieurs à $\frac{5}{7}$ et inférieurs à $\frac{28}{3}$ sont donc $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9. Il y en a 9.

Réponse : (B)

5. Si $\heartsuit = 1$, alors $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 1 \times 1 \times 1 = 1$, ce qui est impossible puisque ∇ et $\heartsuit$ sont deux entiers différents strictement positifs.
Si $\heartsuit = 2$, alors $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 2 \times 2 \times 2 = 8$, ce qui est possible.
Si $\heartsuit = 3$, alors $\nabla = \heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = 3 \times 3 \times 3 = 27$, ce qui est impossible puisque ∇ doit être inférieur à 20.
Si $\heartsuit$ est supérieur à 3, alors ∇ sera supérieur à 27, ce qui est impossible. Donc, $\heartsuit$ ne peut être supérieur à 3.
On a donc $\heartsuit = 2$ et $\nabla = 8$. Donc $\nabla \times \nabla = 8 \times 8$, ou $\nabla \times \nabla = 64$.

Réponse : (D)

6. Puisque $\angle QRT = 158°$, et que $\angle QRP = 180° - \angle QRT$, alors $\angle QRP = 180° - 158°$, ou $\angle QRP = 22°$.
Puisque $\angle PRS = \angle QRS$ et que $\angle QRP = \angle PRS + \angle QRS$, alors $\angle QRS = \frac{1}{2}\angle QRP$.
Donc $\angle QRS = \frac{1}{2}(22°)$, ou $\angle QRS = 11°$.
Puisque le triangle QSR est rectangle en Q, alors $\angle QSR = 180° - 90° - \angle QRS$.
Donc $\angle QSR = 90° - 11°$, ou $\angle QSR = 79°$.

Réponse : (E)

7. Puisque Bev a parcouru 312 km et qu'il lui reste 858 km à parcourir, la distance de Waterloo à Marathon est de 312 km + 858 km, ou 1170 km.
Le point à mi-chemin entre Waterloo et Marathon est à $\frac{1}{2}$(1170 km) de Waterloo, ou 585 km de Waterloo.
Pour atteindre ce point, il lui reste 273 km à parcourir (585 km − 312 km = 273 km).

Réponse : (B)

8. Un segment est parallèle à l'axe des abscisses lorsque ses extrémités ont la même ordonnée.
La droite est donc parallèle à l'axe des abscisses lorsque $2k + 1 = 4k - 5$, ou $6 = 2k$, ou $k = 3$.
(On peut vérifier que lorsque $k = 3$, les points ont pour coordonnées $(3, 7)$ et $(8, 7)$.)
Réponse : (A)

9. Puisque le rectangle $PQRS$ a une aire de 180 et que $SR = 15$, alors $PS = 12$ ($PS = \frac{180}{15} = 12$).
Puisque $PS = 12$, que $US = 4$ et que $PU = PS - US$, alors $PU = 12 - 4$, ou $PU = 8$.
Le triangle PUT est rectangle en U. D'après le théorème de Pythagore,

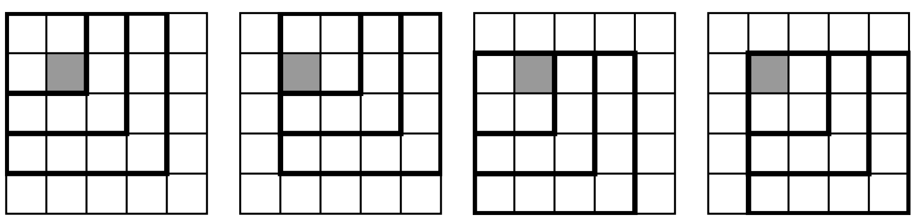
$$TU = \sqrt{PT^2 - PU^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$$

puisque $TU > 0$. Dans le triangle PTS, soit PS la base et TU la hauteur correspondante.
L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(PS)(TU)$, ou $\frac{1}{2}(12)(6)$, ou 36.
Réponse : (B)

10. Pour tout nombre réel x non nul, on a $x^2 > 0$.
Puisque $-1 < x < 0$, alors $x^2 < (-1)^2$, d'où $x^2 < 1$. Donc $0 < x^2 < 1$.
Parmi les choix de réponse, C est le seul nombre entre 0 et 1.
Réponse : (C)

11. Puisque $\frac{5}{6}$ des boules dans le sac sont blanches et que toutes les autres boules sont rouges, alors $\frac{1}{6}$ des boules sont rouges.
Puisque 8 boules rouges représentent $\frac{1}{6}$ de toutes les boules du sac et que $\frac{5}{6} = 5 \cdot \frac{1}{6}$, alors le nombre de boules blanches dans le sac est égal à $5 \cdot 8$, ou 40.
Réponse : (C)

12. Il y a 1 carré 1×1 qui contient le carré ombré, soit ce carré lui-même.
Il y a 4 carrés 2×2, 4 carrés 3×3 et 4 carrés 4×4 qui contiennent le carré ombré.



Il y a 1 carré 5×5 qui contient le carré ombré, soit le quadrillage 5×5 lui-même.
En tout, il y a 14 carrés qui contiennent le carré ombré ($1 + 4 + 4 + 4 + 1 = 14$).
Réponse : (E)

13. On cherche la première fois, après 4:56, où les chiffres de l'heure seront consécutifs en ordre croissant.
Il serait bon d'essayer 5:67, mais il ne s'agit pas d'une heure valable.
De même, l'heure ne peut pas commencer par un 6, un 7, un 8 ou un 9.
Une heure qui commence par 10 ou par 11 n'a pas ses chiffres consécutifs en ordre croissant.
Si l'heure commence par 12, on obtient l'heure 12:34. Il s'agit bien de la première fois après 4:56.
On doit déterminer le nombre de minutes entre 4:56 et 12:34.
De 4:56 à 11:56, il y a 7 heures, c'est-à-dire 7×60 minutes, ou 420 minutes.
De 11:56 à 12:00, il y a 4 minutes. De 12:00 à 12:34, il y a 34 minutes.
Donc de 4:56 à 12:34, il y a 458 minutes ($420 + 4 + 34 = 458$).
Réponse : (A)

14. La droite d'équation $y = x$ a une pente de 1 et elle passe au point $(0, 0)$.
Lorsqu'on lui fait subir une translation, la pente n'est pas changée.
Lorsque la droite subit une translation de 3 unités vers la droite et de 2 unités vers le bas, tous les points de la droite subissent cette translation. L'image du point $(0, 0)$ est donc $(3, -2)$.
L'image de la droite a donc une pente de 1 et elle passe au point $(3, -2)$.
Elle a donc pour équation $y - (-2) = 1(x - 3)$, ou $y + 2 = x - 3$, ou $y = x - 5$.
Cette droite a pour ordonnée à l'origine -5.

Réponse : (C)

15. Chaque nombre dans une case doit être un diviseur du produit des nombres de sa rangée et un diviseur du produit des nombres de sa colonne.

			56
			135
	N		48
21	108	160	

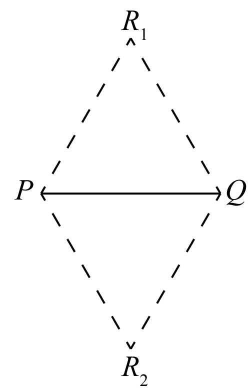
Deux seuls produits sont des multiples de 5, soit 160 et 135.
Donc, 5 doit paraitre dans la 3e case de la 2e rangée.
Donc, les deux autres nombres de la 2e rangée ont un produit de 27 $(135 \div 5 = 27)$.
Puisque tous les nombres dans les cases sont des entiers de 1 à 9, les deux autres nombres de la 2e rangée doivent être 3 et 9.
Puisque 9 n'est pas un diviseur 21, 9 doit être placé dans la 2e colonne.
Donc, les deux autres nombres de la colonne du milieu doivent avoir un produit de 12 $(108 \div 9 = 12)$.
Donc, les deux autres nombres de cette colonne doivent être 3 et 4, ou 2 et 6. (Ce sont les deux paires de nombres de la liste qui ont un produit de 12.)
Puisque 3 parait déjà dans le tableau, les nombres doivent être 2 et 6.
Puisque 6 n'est pas un diviseur de 56, alors 6 ne peut pas paraitre dans la 1re rangée.
Donc, 6 doit paraitre dans la 3e rangée. Donc $N = 6$.
On peut alors remplir le quadrillage comme suit :

7	2	4	56
3	9	5	135
1	6	8	48
21	108	160	

Réponse : (D)

16. *Solution 1*

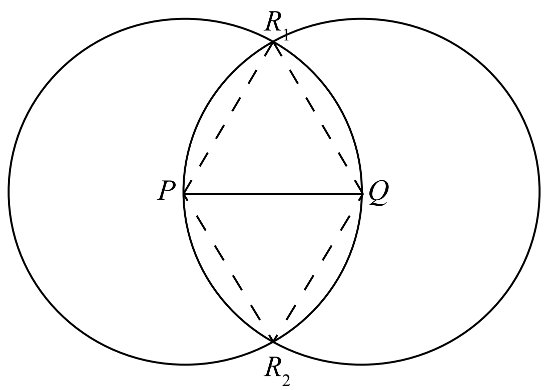
Si on place un point R de manière que $PQ = QR = PR$, on obtient un triangle équilateral PQR. Puisque les points P et Q sont fixes, il n'y a que deux triangles équilatéraux possibles avec PQ comme côté PQ, soit un de chaque côté de PQ.



On peut aussi le voir en constatant qu'il n'y a que deux droites possibles qui passent au point P et qui forment un angle de 60° avec PQ.

Solution 2

On considère le segment PQ. On trace un cercle de centre P qui passe au point Q et un cercle de centre Q qui passe au point P.



Supposons que le point R satisfait à $PQ = QR = PR$.
Puisque $PQ = QR$, alors P et R sont à la même distance du point Q. Donc, R est situé sur le cercle de centre Q qui passe au point P.
Puisque $PQ = PR$, alors R est situé sur le cercle de centre P qui passe au point Q.
En d'autres mots, le point R est situé sur les deux cercles.
Puisque ces deux cercles se coupent en exactement deux points, il y a deux seuls endroits possibles pour R.

Réponse : (C)

17. Le carré a des côtés de longueur 2 et M et N sont des milieux de côtés.
Donc $SM = MR = QN = NR = 1$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PSM, $PM = \sqrt{PS^2 + SM^2}$.
Donc $PM = \sqrt{2^2 + 1^2}$ ou $PM = \sqrt{5}$ puisque $PM > 0$.
De même, $PN = \sqrt{5}$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle MNR, $MN = \sqrt{MR^2 + NR^2}$.
Donc $MN = \sqrt{1^2 + 1^2}$, ou $MN = \sqrt{2}$ puisque $MN > 0$.
D'après la loi du cosinus dans le triangle PMN :
$$\begin{aligned} MN^2 &= PM^2 + PN^2 - 2(PM)(PN)\cos(\angle MPN) \\ 2 &= 5 + 5 - 2(\sqrt{5})(\sqrt{5})\cos(\angle MPN) \\ 2 &= 10 - 10\cos(\angle MPN) \\ 10\cos(\angle MPN) &= 8 \\ \cos(\angle MPN) &= \tfrac{8}{10} = \tfrac{4}{5} \end{aligned}$$
Réponse : (A)

18. Supposons que $\sqrt{7 + \sqrt{48}} = m + \sqrt{n}$.
On élève chaque membre au carré pour obtenir $7 + \sqrt{48} = (m + \sqrt{n})^2$.
Puisque $(m + \sqrt{n})^2 = m^2 + 2m\sqrt{n} + n$, l'équation devient $7 + \sqrt{48} = (m^2 + n) + 2m\sqrt{n}$.
On suppose que $m^2 + n = 7$ et que $2m\sqrt{n} = \sqrt{48}$.
On élève au carré chaque membre de cette dernière équation pour obtenir $4m^2n = 48$, ou $m^2n = 12$.
On a donc $m^2 + n = 7$ et $m^2n = 12$.
On voit peut-être que $m = 2$ et $n = 3$ est une solution.
Sinon, on peut reporter $n = 7 - m^2$ dans la dernière équation pour obtenir $m^2(7 - m^2) = 12$, ou $m^4 - 7m^2 + 12 = 0$.
On factorise le membre de gauche pour obtenir $(m^2 - 3)(m^2 - 4) = 0$.
Puisque m est un entier, alors $m^2 \neq 3$.
Donc $m^2 = 4$, d'où $m = \pm 2$. Puisque m est un entier positif, alors $m = 2$.
Puisque $m = 2$ et $n = 7 - m^2$, alors $n = 3$.
On a donc $m = 2$ et $n = 3$, d'où $m^2 + n^2 = 13$.
On peut vérifier que $m + \sqrt{n} = 2 + \sqrt{3}$ et que $(2 + \sqrt{3})^2 = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + \sqrt{48}$, ce qui vérifie la condition du problème. Ceci confirme que même si la supposition que l'on a faite au début n'est pas appuyée, elle a tout de même mené à une réponse.
Réponse : (E)

19. *Solution 1*
Pendant les 3 premières minutes de la course, Pierre a parcouru 48 m de plus que Radford.
Voici pourquoi :

> Au temps 0 minute, Radford était à la ligne de 30 m.
> En parcourant d m pendant ces 3 minutes, Radford arrive à la ligne de $(d + 30)$ m après 3 minutes.
> Puisque Pierre est à 18 m devant Radford après 3 minutes, il est à la ligne de $(d + 30 + 18)$ m.
> Pendant ces 3 minutes, Pierre a donc parcouru $(d + 48)$ m, c'est-à-dire 48 m de plus que les d m de Radford.

Puisque chacun court à une vitesse constante, Pierre court 16 m/min plus vite que Radford ($\dfrac{48 \text{ m}}{3 \text{ min}} = 16$ m/min).

Puisque Pierre termine la course après exactement 7 minutes, Pierre a couru 4 minutes de plus. Pendant ces 4 minutes, il a parcouru 64 m de plus que Radford ((4 min) $\cdot$ (16 m/min) = 64 m). Après 3 minutes, Pierre était 18 m devant Radford.
Donc, après 7 minutes, Pierre était 82 m devant Radford (18 m + 64 m = 82 m). Donc lorsque Pierre a terminé, Radford était à 82 m de la ligne d'arrivée.

Solution 2
Comme dans la solution 1, on suppose que Radford a parcouru d m pendant les 3 premières minutes et que Pierre a donc parcouru $(d+48)$ m pendant ces 3 minutes.
Puisque sa vitesse est constante, Pierre parcourt $\frac{4}{3}(d+48)$ m pendant les 4 minutes suivantes.
Puisque sa vitesse est constante, Radford parcourt $\frac{4}{3}d$ m pendant ces 4 minutes.
Pierre parcourt donc un total de $(d+48)$ m + $\frac{4}{3}(d+48)$ m, ou $\frac{7}{3}(d+48)$ m.
Radford est à $(30+d+\frac{4}{3}d)$ m de la ligne de départ après 7 minutes, puisqu'il avait une avance de 30 m au départ.
Donc lorsque Pierre a gagné, Radford était à la distance suivante de la ligne d'arrivée, en mètres :

$$\tfrac{7}{3}(d+48) - (30+d+\tfrac{4}{3}d) = \tfrac{7}{3}d + 112 - 30 - d - \tfrac{4}{3}d = 82$$

Réponse : (D)

20. On comptera séparément le nombre de valeurs entières de x pour lesquelles le produit x

$$(x-2)(x-4)(x-6)\cdots(x-2016)(x-2018) \qquad (*)$$

est égal à 0 et pour lesquelles le produit est inférieur à 0.
Le produit $(*)$ est égal à 0 lorsque l'un des facteurs est égal à 0 et seulement dans ce cas.
Cela se produit lorsque x est égal à $2, 4, 6, \ldots, 2016$ ou 2018.
Ces valeurs de x sont les entiers pairs de 2 à 2018. Il y a 1009 telles valeurs ($\frac{2018}{2} = 1009$).
Le produit $(*)$ est inférieur à 0 lorsqu'aucun de ses facteurs n'est nul et qu'un nombre impair de ses facteurs ont des valeurs négatives.
On remarque que pour toute valeur entière de x, on a :

$$x-2 > x-4 > x-6 > \cdots > x-2016 > x-2018$$

Lorsque $x=1$, on a $x-2=-1$ et tous les 1009 autres facteurs sont négatifs, ce qui rend l'expression $(*)$ négative.
Lorsque $x=3$, on a $x-2=1$, $x-4=-1$ et tous les 1008 autres facteurs sont négatifs, ce qui donne un produit positif.
Lorsque $x=5$, on a $x-2=3$, $x-4=1$ et $x-6=-1$ et les 1007 autres facteurs sont négatifs, ce qui donne un produit négatif.
Cette régularité continue, donnant une valeur négative à l'expression $(*)$ lorsque $x = 1, 5, 9, 13, \ldots,$ $2013, 2017$.
Il y a 505 telles valeurs de x ($1 + \frac{2017-1}{4} = 505$). (Elles commencent à 1 et se présentent à tous les 4 entiers).
Lorsque $x \geq 2019$, chaque facteur et positif et l'expression $(*)$ est positive.
Il y a donc 1514 valeurs positives de x ($1009 + 505 = 1514$) pour lesquelles la valeur de l'expression $(*)$ est inférieure ou égale à 0.

On peut justifier davantage la régularité mentionnée ci-haut.
Supposons que $x = 4n+1$ lorsque $n = 0, 1, 2, \ldots, 504$. (Il s'agit des entiers $1, 5, 9, 13, \ldots, 2017$.)
L'expression $(*)$ devient :

$$(4n-1)(4n-3)(4n-5)\cdots(4n-2015)(4n-2017)$$

Le $2k^{\text{ième}}$ facteur est $(n-(4k-1))$. Lorsque $n=4k$, ce facteur est positif et le facteur suivant est négatif.
En d'autres mots, lorsque $n=2k$, les $2k$ premiers facteurs sont positifs et les autres sont négatifs.
Lorsque $n=2k$, il y a donc un nombre pair de facteurs positifs.
Puisqu'il y a un nombre impair de facteurs en tout, soit 1009, le nombre de facteurs négatifs est impair et le produit est négatif.
De même, on peut démontrer que lorsque $x=4n+3$ $(n=0,1,2,\ldots,503)$, le produit est positif.
Il s'agit des valeurs de x égales à $3,7,11,\ldots,2011,2015$).
Ceci confirme que la régularité continue.

Réponse : (C)

21. On reporte $n=1$ dans l'équation $a_{n+1}=a_n+a_{n+2}-1$ pour obtenir $a_2=a_1+a_3-1$.
Puisque $a_1=x$ et $a_3=y$, alors $a_2=x+y-1$.
On récrit l'équation donnée sous forme $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n+1$ $(n\geq 1)$.
Donc :

$$\begin{aligned}
a_4&=a_3-a_2+1=y-(x+y-1)+1=2-x\\
a_5&=a_4-a_3+1=(2-x)-y+1=3-x-y\\
a_6&=a_5-a_4+1=(3-x-y)-(2-x)+1=2-y\\
a_7&=a_6-a_5+1=(2-y)-(3-x-y)+1=x\\
a_8&=a_7-a_6+1=x-(2-y)+1=x+y-1
\end{aligned}$$

Puisque $a_7=a_1$ et $a_8=a_2$ et que chaque terme dépend seulement des deux termes précédents, les termes de la suite se répètent à tous les 6 termes.
(Par exemple, $a_9=a_8-a_7+1=a_2-a_1+1=a_3$ et ainsi de suite.)
Or

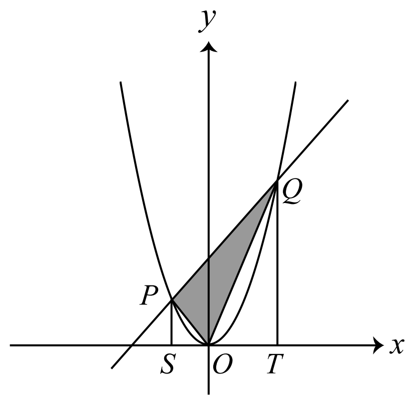
$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=x+(x+y-1)+y+(2-x)+(3-x-y)+(2-y)=6$$

et ainsi, la somme des 6 termes suivants est aussi égale à 6 et ainsi de suite.
Puisque $2016=6\cdot 336$ et que le 2016^e terme est le dernier d'un groupe de 6 termes, alors la somme des 2016 premiers termes de la suite est égale à $6\cdot 336$, ou 2016.
On a $a_{2017}=a_1=x$ et $a_{2018}=a_2=x+y-1$.
La somme des 2018 premiers termes de sa suite est égale à $2016+x+(x+y-1)$, ou $2x+y+2015$.

Réponse : (E)

22. On détermine d'abord les coordonnées des points P et Q en fonction de k. Puisque les coordonnées des points d'intersection de la droite et de la parabole satisfont aux équations $y=x^2$ et $y=3kx+4k^2$, la valeur de y à ces points est la même pour les deux équations.
On a donc $x^2=3kx+4k^2$, ou $x^2-3kx-4k^2=0$.
On récrit le membre de gauche sous la forme $x^2-4kx+kx+(-4k)(k)=0$, ce qui nous permet de le factoriser. On obtient $(x-4k)(x+k)=0$, d'où $x=4k$ ou $x=-k$.
Puisque $k>0$, P est situé dans le deuxième quadrant et Q est situé dans le premier quadrant.
Donc P a pour abscisse $-k$ (un nombre négatif).
Puisque P est situé sur la parabole d'équation $y=x^2$, son ordonnée est égale à $(-k)^2$, ou k^2.
P a donc pour coordonnées $(-k,k^2)$.
Puisque Q a pour abscisse $4k$ et qu'il est situé sur la parabole d'équation $y=x^2$, son ordonnée est égale à $(4k)^2$, ou $16k^2$. Q a donc pour coordonnées $(4k,16k^2)$.
On détermine maintenant l'aire du triangle OPQ en fonction de k.

Puisque l'aire du triangle OPQ est égale à 80, ceci nous donnera une équation en fonction de k. Sa solution nous donnera la pente de la droite.
Pour déterminer l'aire du triangle OPQ en fonction de k, on abaisse des perpendiculaires à l'axe des abscisses aux points P et Q jusqu'aux points respectifs S et T.



L'aire du triangle OPQ est égale à l'aire du trapèze $PSTQ$ moins l'aire des triangles PSO et QTO.
Le trapèze $PSTQ$ a pour bases parallèles SP et TQ et pour hauteur ST.
Puisque P a pour coordonnées $(-k, k^2)$, alors $SP = k^2$.
Puisque Q a pour coordonnées $(4k, 16k^2)$, alors $TQ = 16k^2$.
De plus, $ST = 4k - (-k)$, ou $ST = 5k$.
L'aire du trapèze $PSTQ$ est égale à $\frac{1}{2}(SP + TQ)(ST)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(k^2 + 16k^2)(5k)$, ou $\frac{85}{2}k^3$.
Le triangle PSO est rectangle en S et son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(SP)(SO)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(k^2)(0 - (-k))$, ou $\frac{1}{2}k^3$.
Le triangle QTO est rectangle en T et son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(TQ)(TO)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(16k^2)(4k - 0)$, ou $32k^3$.
L'aire du triangle POQ est égale à $\frac{85}{2}k^3 - \frac{1}{2}k^3 - 32k^3$, ou $10k^3$.
Puisque cette aire est égale à 80, alors $10k^3 = 80$, ou $k^3 = 8$, ou $k = 2$.
Puisque la droite a une pente de $3k$, cette pente est égale à 6.

Réponse : (D)

23. On doit avoir $(x - a)(x - 6) + 3 = (x + b)(x + c)$ pour tous les nombres réels x.
En particulier, cela doit être vrai lorsque $x = 6$.
On reporte $x = 6$ dans l'équation pour obtenir $(6-a)(6-6)+3 = (6+b)(6+c)$, ou $3 = (6+b)(6+c)$.
Puisque b et c sont des entiers, alors $6 + b$ et $6 + c$ sont des entiers. Donc, $6 + b$ est un diviseur de 3.
Les valeurs possibles de $6 + b$ sont $3, 1, -1$ et -3.
Les valeurs correspondantes de b sont $-3, -5, -7$ et -9.
On doit vérifier si ces valeurs de b donnent des valeurs entières de a et de c.
Si $b = -3$, alors $6 + b = 3$. D'après l'équation $3 = (6 + b)(6 + c)$, on a $6 + c = 1$, d'où $c = -5$.
Lorsque $b = -3$ et $c = -5$, l'équation initiale devient $(x - a)(x - 6) + 3 = (x - 3)(x - 5)$.
On développe le membre de droite pour obtenir $(x - a)(x - 6) + 3 = x^2 - 8x + 15$, ou $(x - a)(x - 6) = x^2 - 8x + 12$.
Le membre de droite $x^2 - 8x + 12$ se factorise pour devenir $(x - 2)(x - 6)$. Puisque cette équation est une identité pour toutes valeurs réelles de x, alors $a = 2$.
De même, si $b = -5$, alors $c = -3$ et $a = 2$. (Il fallait s'y attendre, puisque b et c peuvent être changés l'un pour l'autre dans l'équation initiale.)

De même, lorsque $b = -7$, alors $c = -9$ et $a = 10$.
De même, lorsque $b = -9$, alors $c = -7$ et $a = 10$.
Les valeurs possibles de b sont $b = -3, -5, -7$ et -9.
Leur somme est égale à $(-3) + (-5) + (-7) + (-9)$, ou -24.

Réponse : (B)

24. On utilise la notation $a/b/c$ pour représenter a rondelles dans un seau, b rondelles dans un deuxième seau et c rondelles dans le troisième seau, tout en omettant l'ordre des seaux.

Seaux jaunes
1/0/0 : Puisqu'on ne distribue qu'une rondelle, la distribution sera toujours 1/0/0.

Seaux bleus
On distribue 2 rondelles dans 3 seaux. Il y a 9 façons de le faire ($3^2 = 9$). (On peut placer une rondelle dans n'importe quel seau et dans chaque cas, la deuxième rondelle peut être placée dans n'importe quel seau.)
2/0/0 : Il y a 3 façons de distribuer les rondelles dans un même seau (1 façon par seau). La probabilité de le faire est de $\frac{3}{9}$.
1/1/0 : Il y a 6 façons ($9 - 3 = 6$) de distribuer 1 rondelle dans un seau et 1 rondelle dans un autre seau. La probabilité de le faire est de $\frac{6}{9}$.

Seaux rouges
Il y a 27 façons ($3^3 = 27$) de distribuer 3 rondelles dans 3 seaux.
3/0/0 : Il y a 3 façons de distribuer les rondelles dans un même seau (1 façon par seau). La probabilité de le faire est de $\frac{3}{27}$.
1/1/1 : Il y a 6 façons ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$) de distribuer les 3 rondelles dans 3 seaux (3 façons pour la première, 2 façons pour la deuxième et 1 façon pour la troisième). La probabilité de le faire est de $\frac{6}{27}$.
2/1/0 : Il y a 18 façons ($27 - 3 - 6 = 18$) de distribuer les rondelles de manière qu'il y ait 2 rondelles dans un seau, 1 rondelle dans un autre seau et 0 rondelle dans un troisième seau. La probabilité de le faire est de $\frac{18}{27}$.

Seaux verts
Il y a 81 façons ($3^4 = 81$) de distribuer 4 rondelles dans 3 seaux.
4/0/0 : Il y a 3 façons de distribuer les rondelles dans un même seau (1 façon par seau). La probabilité de le faire est de $\frac{3}{81}$.
3/1/0 : Il y a 24 façons ($4 \times 3 \times 2 = 24$) de distribuer les rondelles de manière qu'il y ait 3 rondelles dans un seau et 1 rondelle dans un deuxième seau (4 façons de choisir la rondelle seule, 3 façons de choisir le seau pour cette rondelle et 2 façons de choisir le seau pour les 3 autres rondelles). La probabilité de le faire est de $\frac{24}{81}$.
2/1/1 : Il y a 6 façons de choisir 2 des 4 rondelles. (Si elles se nomment W, X, Y, Z, on peut choisir WX, WY, WZ, XY, XZ, ou YZ.) Il y a 36 façons ($6 \times 3 \times 2 = 36$) de distribuer les rondelles de manière qu'il y ait 2 rondelles dans un seau et 1 rondelle dans chaque autre seau (6 façons de choisir les 2 rondelles qui vont ensemble, 3 façons de choisir leur seau et 2 façons de placer les 2 autres rondelles dans les 2 autres seaux). La probabilité de le faire est de $\frac{36}{81}$.
2/2/0 : Il y a 18 façons ($81 - 3 - 24 - 36 = 18$) de distribuer les 4 rondelles de manière qu'il y ait 2 rondelles dans un seau et 2 rondelles dans un autre seau. La probabilité de le faire est de $\frac{18}{81}$.

Un seau vert contient plus de rondelles que chacun des 11 autres seaux si une des distributions existe. On indique la probabilité dans chaque cas :

Vert	Rouge	Bleu	Jaune	Probabilité
4/0/0 ($p = \frac{3}{81}$)	N'importe quelle ($p = 1$)	N'importe quelle ($p = 1$)	N'importe quelle ($p = 1$)	$\frac{3}{81}$
3/1/0 ($p = \frac{24}{81}$)	N'importe quelle sauf 3/0/0 ($p = 1 - \frac{3}{27}$)	N'importe quelle ($p = 1$)	N'importe quelle ($p = 1$)	$\frac{24}{81} \cdot \frac{24}{27}$
2/1/1 ($p = \frac{36}{81}$)	1/1/1 ($p = \frac{6}{27}$)	1/1/0 ($p = \frac{6}{9}$)	N'importe quelle ($p = 1$)	$\frac{36}{81} \cdot \frac{6}{27} \cdot \frac{6}{9}$

Une distribution 2/2/0 de rondelles parmi les seaux verts ne peut satisfaire aux conditions, puisqu'il n'y aurait pas un seul seau vert ayant plus de rondelles que n'importe quel autre seau, puisqu'il y aurait deux seaux verts avec le même nombre de rondelles.
La probabilité que l'on cherche est donc égale à $\frac{3}{81} + \frac{24}{81} \cdot \frac{24}{27} + \frac{36}{81} \cdot \frac{6}{27} \cdot \frac{6}{9}$, ou $\frac{1}{27} + \frac{8}{27} \cdot \frac{8}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3}$, ou $\frac{9}{243} + \frac{64}{243} + \frac{16}{243}$, ou $\frac{89}{243}$.

Réponse : (B)

25. Soit C un chiffre et k un entier strictement positif. Alors

$$C_{(k)} = \underbrace{CC\cdots CC}_{k \text{ fois}} = C \cdot \underbrace{11\cdots 11}_{k \text{ fois}} = C \cdot \tfrac{1}{9} \cdot \underbrace{99\cdots 99}_{k \text{ fois}} = C \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (1\underbrace{00\cdots 00}_{k \text{ fois}} - 1) = C \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (10^k - 1)$$

Les équations suivantes sont donc équivalentes :

$$\begin{aligned}
P_{(2k)} - Q_{(k)} &= \left(R_{(k)}\right)^2 \\
P \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (10^{2k} - 1) - Q \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (10^k - 1) &= \left(R \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (10^k - 1)\right)^2 \\
P \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (10^{2k} - 1) - Q \cdot \tfrac{1}{9} \cdot (10^k - 1) &= R^2 \cdot \tfrac{1}{81} \cdot (10^k - 1)^2 \\
9P \cdot (10^{2k} - 1) - 9Q \cdot (10^k - 1) &= R^2 \cdot (10^k - 1)^2 \\
9P \cdot (10^k - 1)(10^k + 1) - 9Q \cdot (10^k - 1) &= R^2 \cdot (10^k - 1)^2 \\
9P \cdot (10^k + 1) - 9Q &= R^2 \cdot (10^k - 1) \qquad \text{(puisque } 10^k - 1 \neq 0\text{)} \\
9P \cdot 10^k + 9K - 9Q &= R^2 \cdot 10^k - R^2 \\
9P - 9Q + R^2 &= 10^k(R^2 - 9P)
\end{aligned}$$

On considère trois cas : $3 \leq k \leq 2018$, $k = 1$ et $k = 2$.

1er cas : $3 \leq k \leq 2018$
Supposons que $R^2 - 9P \neq 0$.
Puisque $k \geq 3$, alors $10^k(R^2 - 9P) > 1000$ lorsque $R^2 - 9P > 0$ et $10^k(R^2 - 9P) < -1000$ lorsque $R^2 - 9P < 0$.
Puisque P, Q, R sont des chiffres, la valeur maximale possible de $9P - 9Q + R^2$ est égale à $9(9) - 9(0) + 9^2$, ou 162 et sa valeur minimale possible est égale à $9(0) - 9(9) + 0^2$, ou -81.
Ainsi si $R^2 - 9P \neq 0$, on ne peut pas avoir $9P - 9Q + R^2 = 10^k(R^2 - 9P)$ puisque les valeurs du membre de gauche sont entre -81 et 162, tandis que celles du membre de droite sont supérieures à 1000 ou inférieures à -1000.
Donc si $3 \leq k \leq 2018$, on doit avoir $R^2 - 9P = 0$ et l'équation devient $9P - 9Q + R^2 = 0$.
Puisque $R^2 = 9P$, alors R^2 est un multiple de 3 et R est alors un multiple de 3.
Puisque R est un chiffre strictement positif, alors $R = 3$ ou $R = 6$ ou $R = 9$.

Si $R = 3$, alors $9P = R^2 = 9$, d'où $P = 1$.
Puisque $9P - 9Q + R^2 = 0$, alors $9Q = 9(1) + 9$, ou $9Q = 18$, d'où $Q = 2$.
Si $R = 6$, alors $9P = R^2$, ou $9P = 36$, d'où $P = 4$.
Puisque $9P - 9Q + R^2 = 0$, alors $9Q = 9(4) + 36$, ou $9Q = 72$, d'où $Q = 8$.
Si $R = 9$, alors $9P = R^2$, d'où $9P = 81$, ou $P = 9$.
Puisque $9P - 9Q + R^2 = 0$, alors $9Q = 9(9) + 81$, ou $9Q = 162$ et Q ne peut donc pas être un chiffre.
Donc dans le cas où $3 \leq k \leq 2018$, on obtient les quadruplets $(P, Q, R, k) = (1, 2, 3, k)$ et $(P, Q, R, k) = (4, 8, 9, k)$.
Puisqu'il existe 2016 valeurs possibles de k ($2018 - 3 + 1 = 2016$), il y a 4032 quadruplets dans ce 1[er] cas ($2 \cdot 2016 = 4032$).

2[e] cas : $k = 1$
L'équation $9P-9Q+R^2 = 10^k(R^2-9P)$ devient $9P-9Q+R^2 = 10R^2-90P$, ou $99P = 9R^2+9Q$, ou $11P = R^2 + Q$.
Pour chaque valeur possible de P de 1 à 9, on détermine les valeurs possibles de Q et de R en cherchant des carrés parfaits qui sont au plus 9 de moins que $11P$.
$P = 1$: On a $11P = 11$, ce qui est près des carrés 4 et 9. On obtient $(R, Q) = (2, 7)$ et $(R, Q) = (3, 2)$.
$P = 2$: On a $11P = 22$, ce qui est près du carré 16. On obtient $(R, Q) = (4, 6)$.
$P = 3$: On a $11P = 33$, ce qui est près du carré 25. On obtient $(R, Q) = (5, 8)$.
$P = 4$: On a $11P = 44$, ce qui est près du carré 36. On obtient $(R, Q) = (6, 8)$.
$P = 5$: On a $11P = 55$, ce qui est près du carré 49. On obtient $(R, Q) = (7, 6)$.
$P = 6$: On a $11P = 66$, ce qui est près du carré 64. On obtient $(R, Q) = (8, 2)$.
$P = 7$: Il n'y a aucun carré parfait de 68 à 76.
$P = 8$: On a $11P = 88$, ce qui est près du carré 81. On obtient $(R, Q) = (9, 7)$.
$P = 9$: Il n'y a aucun carré parfait de 90 à 98.
Puisque $k = 1$ dans chacun de ces cas, on obtient 8 quadruplets de plus.

3[e] cas : $k = 2$
L'équation $9P - 9Q + R^2 = 10^k(R^2 - 9P)$ devient $9P - 9Q + R^2 = 100R^2 - 900P$, ou $909P = 99R^2 + 9Q$, ou $101P = 11R^2 + Q$.
Lorsque P prend des valeurs de 1 à 9, les valeurs de $101P$ sont $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808$ et 909.
Lorsque R prend des valeurs de 1 à 9, les valeurs de $11R^2$ sont $11, 44, 99, 176, 275, 396, 539, 704$ et 891.
Les éléments des deux listes qui diffèrent de 9 ou moins sont :

(i) 101 et 99 (qui donnent $(P, Q, R) = (1, 2, 3)$),
(ii) 404 et 396 (qui donnent $(P, Q, R) = (4, 8, 6)$) et
(iii) 707 et 704 (qui donnent $(P, Q, R) = (7, 3, 8)$).

Puisque $k = 2$ dans chacun de ces cas, on obtient 3 quadruplets de plus.

En tout, il y a 4043 quadruplets ($N = 4032 + 8 + 3 = 4043$).
La somme des chiffres de N est égale à 11 ($4 + 0 + 4 + 3 = 11$).

Réponse : (C)