



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le mardi 27 février 2018

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 28 février 2018

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 60 minutes

©2017 University of Waterloo

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable, telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera, (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

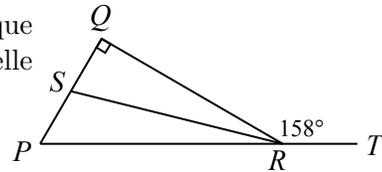
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

- Quelle est la valeur de $2016 - 2017 + 2018 - 2019 + 2020$?
(A) 2012 (B) 2014 (C) 2016 (D) 2018 (E) 2020
- Lundi, la température minimale à Fermatville était de -11°C et la température maximale était de 14°C . Quelle était l'étendue des températures à Fermatville lundi ?
(A) 3°C (B) 25°C (C) 14°C (D) 11°C (E) 23°C
- Si $x = -2$ et $y = -1$, quelle est la valeur de l'expression $(3x + 2y) - (3x - 2y)$?
(A) -4 (B) 12 (C) 0 (D) 4 (E) 8
- Combien d'entiers sont supérieurs à $\frac{5}{7}$ et inférieurs à $\frac{28}{3}$?
(A) 1 (B) 9 (C) 5 (D) 7 (E) 3
- Les signes \heartsuit et \blacktriangledown représentent deux entiers différents strictement positifs et inférieurs à 20. Sachant que $\heartsuit \times \heartsuit \times \heartsuit = \blacktriangledown$, quelle est la valeur de $\blacktriangledown \times \blacktriangledown$?
(A) 12 (B) 16 (C) 36 (D) 64 (E) 81

- Dans la figure ci-contre, les points R et S sont situés sur les segments respectifs PT et PQ . Sachant que $\angle PQR = 90^\circ$, $\angle QRT = 158^\circ$ et $\angle PRS = \angle QRS$, quelle est la mesure de l'angle QSR ?

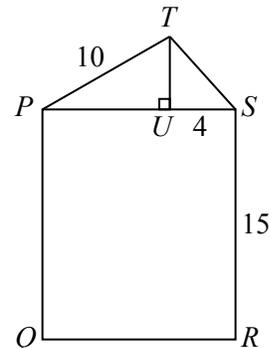
- (A) 34° (B) 22° (C) 68°
(D) 11° (E) 79°



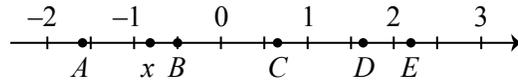
- Bev conduit de Waterloo ON à Marathon ON. Elle a déjà parcouru 312 km. Il lui reste encore 858 km à parcourir. Combien lui reste-t-il à parcourir avant d'être à mi-chemin entre Waterloo et Marathon ?
(A) 585 km (B) 273 km (C) 312 km (D) 429 km (E) 196.5 km
- Pour quelle valeur de k la droite qui passe aux points $(3, 2k + 1)$ et $(8, 4k - 5)$ est-elle parallèle à l'axe des abscisses ?
(A) 3 (B) -4 (C) 2 (D) 0 (E) -1

- Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un rectangle et $SR = 15$. Le point T est situé au-dessus de PS et le point U est situé sur PS de manière que TU soit perpendiculaire à PS . Sachant que $PT = 10$, que $US = 4$ et que $PQRS$ a une aire de 180, quelle est l'aire du triangle PTS ?

- (A) 60 (B) 36 (C) 48
(D) 24 (E) 12



10. Dans la figure suivante, la droite numérique de -2 à 3 est divisée en 10 parties égales. Les entiers -1 , 0 , 1 et 2 sont aussi indiqués, de même que les nombres A , x , B , C , D et E . Quel nombre est plus près de la valeur de x^2 ?



- (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

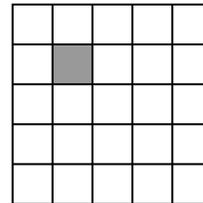
Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Un sac contient 8 boules rouges, un nombre de boules blanches et aucune autre boule. Sachant que $\frac{5}{6}$ des boules dans le sac sont blanches, combien y a-t-il de boules blanches dans le sac ?

- (A) 48 (B) 20 (C) 40 (D) 32 (E) 30

12. Dans le quadrillage 5×5 ci-contre, on peut former beaucoup de carrés en utilisant les lignes du quadrillage. Combien de ces carrés contiennent le carré 1×1 ombré ?

- (A) 15 (B) 16 (C) 11
(D) 12 (E) 14



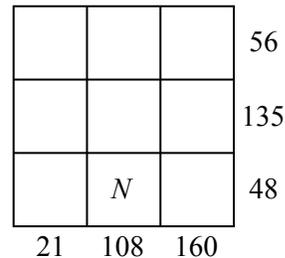
13. Une horloge numérique indique l'heure, 4:56. Combien de minutes s'écouleront avant la prochaine fois où tous les chiffres de l'horloge seront consécutifs et en ordre croissant ?

- (A) 458 (B) 587 (C) 376 (D) 315 (E) 518

14. La droite d'équation $y = x$ subit une translation de 3 unités vers la droite et de 2 unités vers le bas. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la droite qui en résulte ?

- (A) -1 (B) -2 (C) -5 (D) 3 (E) 4

15. Francesca a placé les entiers $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9 dans les neuf cases du quadrillage. Elle a placé un entier dans chaque case et aucun entier n'a été utilisé plus d'une fois. Elle a calculé le produit des trois nombres de chaque rangée et inscrit les produits à la droite des rangées correspondantes. Elle a calculé le produit des trois nombres de chaque colonne et inscrit les produits au-dessous des colonnes correspondantes. Elle a ensuite effacé les entiers des neuf cases. Quel entier était situé dans la case indiquée par un N ?

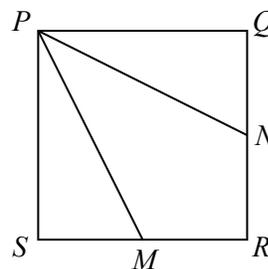


- (A) 3 (B) 8 (C) 9
(D) 6 (E) 4

16. P et Q sont deux points distincts du plan cartésien. À combien d'endroits du plan cartésien peut-on placer un troisième point, R , de manière que $PQ = QR = PR$?

- (A) 6 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

17. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un carré avec des côtés de longueur 2. Les points M et N sont les milieux respectifs des côtés SR et RQ . Quelle est la valeur de $\cos(\angle MPN)$?



- (A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
 (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

18. Soit m et n deux entiers positifs tels que $\sqrt{7 + \sqrt{48}} = m + \sqrt{n}$. Quelle est la valeur de $m^2 + n^2$?

- (A) 37 (B) 25 (C) 58 (D) 29 (E) 13

19. Radford et Pierre ont participé à une course dans laquelle chacun a couru à une vitesse constante. Radford a commencé la course 30 m devant Pierre. Après 3 minutes, Pierre était 18 m devant Radford. Pierre a gagné la course en terminant exactement 7 minutes après le départ. À quelle distance Radford était-il de la ligne d'arrivée lorsque Pierre a gagné ?

- (A) 16 m (B) 64 m (C) 48 m (D) 82 m (E) 84 m

20. Combien y a-t-il de valeurs entières strictement positives de x qui vérifient l'inéquation $(x - 2)(x - 4)(x - 6) \cdots (x - 2016)(x - 2018) \leq 0$? (Le produit dans le membre de gauche de l'inéquation est constitué de 1009 facteurs de la forme $x - 2k$, les entiers k étant dans l'intervalle $1 \leq k \leq 1009$.)

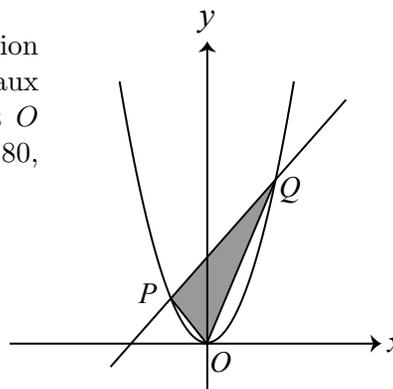
- (A) 1009 (B) 1010 (C) 1514 (D) 1515 (E) 1513

Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Une suite est composée de termes a_1, a_2, a_3, \dots . Le premier terme est $a_1 = x$ et le troisième terme est $a_3 = y$. Chaque terme après le premier est égal à 1 de moins que la somme du terme précédent et du terme suivant (c.-à-d. que lorsque $n \geq 1$, alors $a_{n+1} = a_n + a_{n+2} - 1$). Quelle est la somme des 2018 premiers termes de la suite ?

- (A) $-x - 2y + 2023$ (B) $3x - 2y + 2017$ (C) y
 (D) $x + y - 1$ (E) $2x + y + 2015$

22. On suppose que $k > 0$ et que la droite d'équation $y = 3kx + 4k^2$ coupe la parabole d'équation $y = x^2$ aux points P et Q , comme dans la figure ci-contre. Soit O l'origine. Sachant que le triangle OPQ a une aire de 80, quelle est la pente de la droite ?



- (A) 4 (B) 3 (C) $\frac{15}{4}$
 (D) 6 (E) $\frac{21}{4}$

23. Soit a, b et c des entiers tels que $(x - a)(x - 6) + 3 = (x + b)(x + c)$ pour tous les nombres réels x . Quelle est la somme de toutes les valeurs possibles de b ?

- (A) -12 (B) -24 (C) -14 (D) -8 (E) -16

24. Wilfrid a 3 seaux verts, 3 seaux rouges, 3 seaux bleus et and 3 seaux jaunes. Il distribue au hasard 4 rondelles de hockey dans les seaux verts, les chances de chaque rondelle étant égales d'aboutir dans n'importe quel des seaux verts. De même, il distribue au hasard 3 rondelles dans les seaux rouges, 2 rondelles dans les seaux bleus et 1 rondelle dans les seaux jaunes. À la fin, quelle est la probabilité pour qu'un des seaux verts contiennent plus de rondelles que chacun des 11 autres seaux ?

- (A) $\frac{97}{243}$ (B) $\frac{89}{243}$ (C) $\frac{93}{243}$ (D) $\frac{95}{243}$ (E) $\frac{91}{243}$

25. Pour chaque chiffre strictement positif C et chaque entier strictement positif k , on utilise l'expression $C_{(k)}$ pour représenter l'entier positif composé d'exactly k chiffres, chaque chiffre étant égal à C . Par exemple, $2_{(1)} = 2$ et $3_{(4)} = 3333$. Il existe N quadruplets (P, Q, R, k) où P, Q et R sont des chiffres strictement positifs, k est un entier strictement positif ($k \leq 2018$) et $P_{(2k)} - Q_{(k)} = (R_{(k)})^2$. Quelle est la somme des chiffres de N ?

- (A) 10 (B) 9 (C) 11 (D) 12 (E) 13



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2018! Chaque année, plus de 240 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Hypatie
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours