Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2018

le mercredi 11 avril 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 12 avril 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Lorsque $x = 11$, on a :

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 4x + 6 = 4(11) + 6 = 50$$

OU

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 11 + 12 + 13 + 14 = 50$$

(b) On multiplie chaque membre de l'équation $\frac{a}{6} + \frac{6}{18} = 1$ par 18 pour obtenir $3a + 6 = 18$.
On résout pour obtenir $3a = 12$, d'où $a = 4$.

(c) *Solution 1*
Puisqu'une tablette de chocolat coute 1,00 $ de plus qu'un paquet de gomme, alors si on remplace un paquet de gomme par une tablette de chocolat, le cout est augmenté de 1,00 $.
Étant donné une tablette de chocolat et deux paquets de gomme, on remplace les deux paquets de gomme par deux tablettes de chocolat.
Le cout est ainsi augmenté de 2,00 $. Il passe donc de 4,15 $ à 6,15 $.
Donc, trois tablettes de chocolat coutent 6,15 $ et une tablette de chocolat coute donc $\frac{1}{3}$(6,15 $), ou 2,05 $.

Solution 2
Soit x $ le cout d'une palette de chocolat.
Soit y $ le cout d'un paquet de gomme.
Puisqu'une tablette de chocolat et deux paquets de gomme coutent 4,15 $, alors $x + 2y = 4{,}15$.
Puisqu'une palette de chocolat coute 1,00 $ de plus qu'un paquet de gomme, alors $x = y+1$.
Puisque $x = y + 1$, alors $y = x - 1$.
On reporte $y = x - 1$ dans $x + 2y = 4{,}15$ pour obtenir $x + 2(x - 1) = 4{,}15$.
On résout pour obtenir $x + 2x - 2 = 4{,}15$, ou $3x = 6{,}15$. Donc $x = 2{,}05$.
Une tablette de chocolat coute donc 2,05 $.

2. (a) On représente l'entier de cinq chiffres par $abcde$, a, b, c, d et e étant des les chiffres $1, 3, 5, 7, 9$ dans un ordre quelconque.
Puisque $abcde$ est supérieur à 80 000, alors $a \geq 8$. Donc $a = 9$.
Puisque $9bcde$ est inférieur à 92 000, alors $b < 2$. Donc $b = 1$.
Puisque le chiffre des unités de $91cde$ est 3, alors $e = 3$.
L'entier est donc $91cd3$, ce qui signifie que c et d sont 5 et 7 dans un ordre quelconque.
Puisque l'entier cd est divisible par 5, il doit être 75.
L'entier de cinq chiffres est donc 91753.

(b) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADB :

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$

Puisque $AD > 0$, alors $AD = \sqrt{25}$, ou $AD = 5$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle CDB :

$$CD^2 = BC^2 - BD^2 = (12\sqrt{2})^2 - 12^2 = 12^2(2) - 12^2 = 12^2$$

Puisque $CD > 0$, alors $CD = 12$.
Puisque $AC = AD + DC$, alors $AC = 5 + 12$, ou $AC = 17$.

(c) *Solution 1*
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du carré $OABC$ moins l'aire du triangle OCD.
Puisque le carré $OABC$ a des côtés de longueur 6, son aire est égale à 6^2, ou 36.
On sait que $OC = 6$.
Puisque la droite a pour équation $y = 2x$, elle a une pente de 2.
Puisque la droite a une pente de 2, alors $\dfrac{OC}{CD} = 2$.
Puisque $OC = 6$, alors $CD = 3$.
L'aire du triangle OCD est donc égale à $\frac{1}{2}(OC)(CD)$, ou $\frac{1}{2}(6)(3)$, ou 9.
L'aire de la région ombrée est égale à $36 - 9$, ou 27.

Solution 2
Puisque le carré $OABC$ a des côtés de longueur 6, alors $OA = AB = CB = OC = 6$.
Puisque la droite a une pente de 2, alors $\dfrac{OC}{CD} = 2$.
Puisque $OC = 6$, alors $CD = 3$.
Puisque $CB = 6$, $CD = 3$ et $DB = CB - CD$, alors $DB = 3$.
La région ombrée est un trapèze avec bases OA et DB et hauteur AB. Or, $DB = 3$, $OA = 6$ et $AB = 6$.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $\frac{1}{2}(DB + OA)(AB)$, ou $\frac{1}{2}(3 + 6)(6)$, ou 27.

3. (a) On a : $\left(\sqrt{4+\sqrt{4}}\right)^4 = \left(\sqrt{4+2}\right)^4 = \left(\sqrt{6}\right)^4 = \left(\left(\sqrt{6}\right)^2\right)^2 = 6^2 = 36$.

(b) Puisque y est un entier, alors $8 - y^2$ est un entier.
Donc $\sqrt{23 - x}$ est un entier et $23 - x$ est donc un carré parfait.
Puisque x est un entier strictement positif, alors $23 - x < 23$ et $23 - x$ doit donc être un carré parfait inférieur à 23.
On remplit un tableau des valeurs possibles de $23 - x$ et des valeurs x, de $\sqrt{23 - x} = 8 - y^2$, de y^2 et de y :

$23 - x$	x	$\sqrt{23-x} = 8 - y^2$	y^2	y
16	7	4	4	± 2
9	14	3	5	$\pm\sqrt{5}$
4	19	2	6	$\pm\sqrt{6}$
1	22	1	7	$\pm\sqrt{7}$
0	23	0	8	$\pm\sqrt{8}$

Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, on doit avoir $(x, y) = (7, 2)$.
(Puisque l'énoncé affirmait qu'il n'y avait qu'un seul tel couple, on pouvait s'arrêter dès la première ligne du tableau.)

(c) Puisque la droite d'équation $y = mx+2$ passe au point $(1, 5)$, les coordonnées $(1, 5)$ vérifient l'équation de la droite. Donc $5 = m + 2$, d'où $m = 3$.
Puisque la parabole d'équation $y = ax^2 + 5x - 2$ passe au point $(1, 5)$, les coordonnées $(1, 5)$ vérifient l'équation de la parabole. Donc $5 = a + 5 - 2$, d'où $a = 2$.
Pour déterminer les coordonnées de Q, on détermine le deuxième point d'intersection de la droite d'équation $y = 3x + 2$ et de la parabole d'équation $y = 2x^2 + 5x - 2$. À ce point, la valeur de y est la même sur les deux courbes. Donc :

$$\begin{aligned} 2x^2+5x-2 &= 3x+2 \\ 2x^2+2x-4 &= 0 \\ x^2+x-2 &= 0 \\ (x+2)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x=1$ ou $x=-2$.
Puisque P a pour abscisse 1, alors Q a pour abscisse -2.
Puisque Q est sur la droite d'équation $y=3x+2$, alors $y=3(-2)+2$, ou $y=-4$.
Pour résumer : (i) $m=3$, (ii) $a=2$ et (iii) les coordonnées de Q sont $(-2,-4)$.

4. (a) Puisque $80=2^4\cdot 5$, ses diviseurs positifs sont $1,2,4,5,8,10,16,20,40$ et 80.
Un entier n a exactement deux diviseurs communs avec 80 si ces diviseurs sont 1 et 2 ou bien 1 et 5. (1 est un diviseur commun avec n'importe quel entier. Le deuxième diviseur commun doit être un nombre premier, car un diviseur composé ferait en sorte qu'il y aurait au moins un autre diviseur commun premier.)
Puisque $1\leq n\leq 30$ et que n est un multiple de 2 ou de 5, alors les valeurs possibles de n parviennent de la liste :

$$2,4,5,6,8,10,12,14,15,16,18,20,22,24,25,26,28,30$$

On retire les multiples de 4 de cette liste (puisqu'ils partageraient les diviseurs $1,2$ et 4 avec 80) et les multiples de 10 de cette liste (puisqu'ils partageraient au moins les diviseurs $1,2,5$ et 10 avec 80). Il reste la liste :

$$2,5,6,14,15,18,22,25,26$$

N'importe quel nombre de cette liste a deux diviseurs communs avec 80, soit 1 et 2, ou bien 1 et 5.
Il y a 9 tels entiers.

(b) On commence par $f(50)$ et on utilise les caractéristiques de la fonction jusqu'à ce qu'on arrive à $f(1)$:

$$\begin{aligned} f(50) &= f(25) && \text{(puisque 50 est pair et que } \tfrac{1}{2}(50)=25) \\ &= f(24)+1 && \text{(puisque 25 est impair et que } 25-1=24) \\ &= f(12)+1 && (\tfrac{1}{2}(24)=12) \\ &= f(6)+1 && (\tfrac{1}{2}(12)=6) \\ &= f(3)+1 && (\tfrac{1}{2}(6)=3) \\ &= (f(2)+1)+1 && (3-1=2) \\ &= f(1)+1+1 && (\tfrac{1}{2}(2)=1) \\ &= 1+1+1 && (f(1)=1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

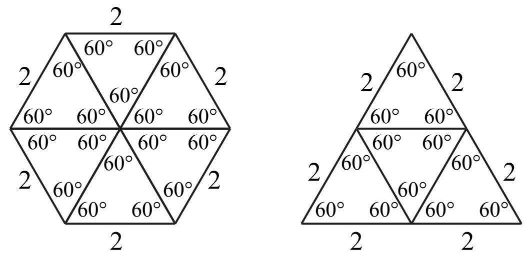
Donc $f(50)=3$.

5\. (a) Puisque l'hexagone régulier a 6 côtés et un périmètre de 12, ses côtés ont une longueur de 2.

Puisque le triangle équilatéral PQR a un périmètre de 12, ses côtés ont une longueur de 4.

On considère des triangles équilatéraux avec des côtés de longueur 2.

On peut combiner six de ces triangles pour former un hexagone régulier avec des côtés de longueur 2. On peut aussi combiner quatre de ces triangles pour former un triangle équilatéral avec des côtés de longueur 4.



Au centre de l'hexagone, les six triangles équilatéraux forment un angle au centre de $6 \cdot 60°$, ou $360°$ (un angle plein). Au milieu de chaque côté du grand triangle équilatéral, trois petits triangles équilatéraux forment un angle de $180°$ (un angle plat), puisque $3 \cdot 60° = 180°$.

Or, chaque côté de l'hexagone a une longueur de 2 et chaque angle intérieur de l'hexagone mesure $120°$, ce qui implique que l'hexagone est régulier. De même, le grand triangle est équilatéral.

Le grand triangle équilatéral et l'hexagone ont chacun un périmètre de 12.

Puisque le grand triangle est formé de 4 petits triangles identiques et que l'hexagone est formé de 6 des mêmes petits triangles identiques, le rapport de l'aire du triangle à celle de l'hexagone est égal à 4 : 6, ce qui est équivalent à 2 : 3.

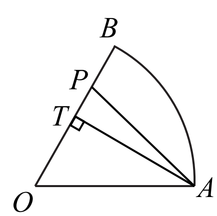
(b) Puisque le secteur AOB est $\frac{1}{6}$ d'un disque complet de rayon 18, son aire est égale à $\frac{1}{6}(\pi \cdot 18^2)$, ou 54π.

Puisque le segment AP coupe le secteur en deux régions de même aire, chaque région doit avoir une aire de $\frac{1}{2}(54\pi)$, ou 27π.

On détermine la longueur de OP pour laquelle le triangle POA a une aire de 27π.

Puisque le secteur AOB est $\frac{1}{6}$ d'un disque, alors $\angle AOB = \frac{1}{6}(360°)$, ou $\angle AOB = 60°$.

On abaisse une perpendiculaire de A jusqu'à T sur OB.



L'aire du triangle POA est égale à $\frac{1}{2}(OP)(AT)$.

Le triangle AOT est un triangle remarquable 30°-60°-90°.

Puisque $AO = 18$, alors $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}(AO)$, ou $AT = 9\sqrt{3}$.

Pour que l'aire du triangle POA soit égale à 27π, on doit avoir $\frac{1}{2}(OP)(9\sqrt{3}) = 27\pi$.

On doit donc avoir $OP = \dfrac{54\pi}{9\sqrt{3}}$, ou $OP = \dfrac{6\pi}{\sqrt{3}}$, ou $OP = 2\sqrt{3}\pi$.

(On aurait pu utiliser le fait que l'aire du triangle POA est égale à $\frac{1}{2}(OA)(OP)\sin(\angle POA)$.)

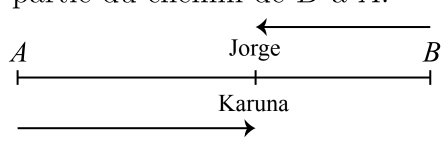
6. (a) Soit $\theta = 10k°$.

Les deux inéquations données deviennent ainsi $0° < \theta < 180°$ et $\dfrac{5\sin\theta - 2}{\sin^2\theta} \geq 2$.
Lorsque $0° < \theta < 180°$, on a $\sin\theta \neq 0$.
On peut ainsi multiplier chaque membre d'une inéquation par $\sin^2\theta$, qui est positif, et obtenir les inéquations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{5\sin\theta - 2}{\sin^2\theta} &\geq 2 \\
5\sin\theta - 2 &\geq 2\sin^2\theta \\
0 &\geq 2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 \\
0 &\geq (2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2)
\end{aligned}$$

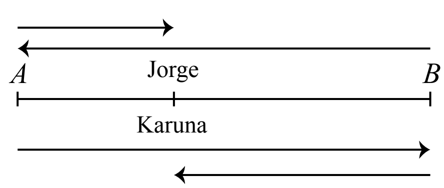
Puisque $\sin\theta \leq 1$, alors $\sin\theta - 2 \leq -1 < 0$ pour toutes valeurs de θ.
Donc $(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) \leq 0$ précisément lorsque $2\sin\theta - 1 \geq 0$.
Or $2\sin\theta - 1 \geq 0$ précisément lorsque $\sin\theta \geq \frac{1}{2}$.
L'inéquation est vérifiée précisément lorsque $\frac{1}{2} \leq \sin\theta \leq 1$.
On sait que $\sin 30° = \sin 150° = \frac{1}{2}$ et que $0° < \theta < 180°$.
Lorsque $\theta = 0°$, on a $\sin\theta = 0$.
De $\theta = 0°$ jusqu'à $\theta = 30°$, la valeur de $\sin\theta$ augmente de 0 jusqu'à $\frac{1}{2}$.
De $\theta = 30°$ jusqu'à $\theta = 150°$, la valeur de $\sin\theta$ augmente de $\frac{1}{2}$ jusqu'à 1, puis elle diminue jusqu'à $\frac{1}{2}$.
De $\theta = 150°$ jusqu'à $\theta = 180°$, la valeur de $\sin\theta$ diminue de $\frac{1}{2}$ jusqu'à 0.
L'inéquation initiale est donc vérifiée précisément lorsque $30° \leq \theta \leq 150°$, ce qui est équivalent à $30° \leq 10k° \leq 150°$ et à $3 \leq k \leq 15$.
Les valeurs entières de k dans cet intervalle sont $k = 3, 4, 5, 6,7,8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$.
Il y a 13 valeurs de k.

(b) Supposons que Karuna et Jorge se rencontrent la première fois après t_1 secondes et la deuxième fois après t_2 secondes.
Lorsqu'ils se rencontrent la première fois, Karuna a parcouru une partie du chemin de A à B et Jorge a parcouru une partie du chemin de B à A.



À ce moment, la somme des distances qu'ils ont parcourues est égale à la distance entre A et B.
Puisque Karuna a couru à une vitesse de 6 m/s pendant t_1 secondes, elle a parcouru $6t_1$ m.
Puisque Jorge a couru à une vitesse de 5 m/s pendant t_1 secondes, il a parcouru $5t_1$ m.
Donc $6t_1 + 5t_1 = 297$, d'où $11t_1 = 297$, ou $t_1 = 27$.

Lorsqu'ils se rencontrent la deuxième fois, Karuna a couru de A à B et elle est en train de retourner vers A, tandis que Jorge a couru de B à A et il est en train de retourner vers B. En effet, Jorge se rend à A à mi-chemin de son parcours avant que Karuna ne revienne à A à la fin de son parcours.



Puisque les deux terminent leur course après 99 secondes, il reste à chacun $99 - t_2$ secondes à courir.
À ce moment, la somme des distances qu'il leur reste à parcourir est égale à la distance entre A et B.
Puisque Karuna courra à une vitesse de 6 m/s pendant ces $(99 - t_2)$ secondes, il lui reste $6(99 - t_2)$ m à parcourir.
Puisque Jorge courra à une vitesse de 7,5 m/s pendant ces $(99 - t_2)$ secondes, il lui reste $7{,}5(99 - t_2)$ m à parcourir.
Donc $6(99 - t_2) + 7{,}5(99 - t_2) = 297$, d'où $13{,}5(99 - t_2) = 297$, ou $99 - t_2 = 22$, ou $t_2 = 77$.

Pour calculer la valeur de t_2, on pourrait aussi remarquer que lorsque Karuna et Jorge se rencontrent la deuxième fois, chacun a parcouru la distance de A à B une fois et ils sont sur leur retour.
Chacun a donc parcouru la distance de A à B et la somme des distances qu'il leur reste à parcourir est égale à la distance de A à B. Ces trois distances ont une somme de $3 \cdot 297$ m, ou 891 m.
Karuna a couru à une vitesse de 6 m/s pendant t_2 secondes. Elle a donc parcouru une distance de $6t_2$ m.
Jorge a parcouru les premiers 297 m à une vitesse de 5 m/s. Il a donc mis $\frac{297}{5}$ s pour le faire. Pendant les $(t_2 - \frac{297}{5})$ secondes suivantes, il a couru à une vitesse de 7,5 m/s. Il a donc parcouru une distance totale de $\big(297 + 7{,}5(t_2 - \frac{297}{5})\big)$ m. Donc :

$$\begin{aligned} 6t_2 + 297 + 7{,}5(t_2 - \tfrac{297}{5}) &= 891 \\ 13{,}5t_2 &= 891 - 297 + 7{,}5 \cdot \tfrac{297}{5} \\ 13{,}5t_2 &= 1039{,}5 \\ t_2 &= 77 \end{aligned}$$

Donc, Karuna et Jorge se sont rencontrés après 27 secondes et après 77 secondes.

7. (a) *Solution 1*

Étant donné un groupe de n personnes, il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ choix possibles de deux personnes :

Il y a n choix possibles pour la première personne.
Pour chacun de ces n choix, il y a $n - 1$ choix possibles pour la deuxième personne.
Il y a donc $n(n - 1)$ choix possibles de deux personnes en ordre.
Or, chaque couple a été choisi deux fois (par exemple, la personne A suivie de la personne B et la personne B suivie de la personne A). Le nombre de choix de deux personnes, sans ordre, est donc égal à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

On nomme les canots W, X, Y et Z.
On détermine d'abord le nombre de façons d'affecter 8 personnes dans 4 canots.
On choisit 2 personnes pour le canot W. Il y a $\dfrac{8 \cdot 7}{2}$ choix. Il reste 6 personnes et 3 canots.
On choisit 2 personnes pour le canot X. Il y a $\dfrac{6 \cdot 5}{2}$ choix. Il reste 4 personnes pour 2 canots.
On choisit 2 personnes pour le canot Y. Il y a $\dfrac{4 \cdot 3}{2}$ choix. Il reste 2 personnes pour le dernier canot.
Il y a 1 choix pour le dernier canot Z.

Le nombre de façons d'affecter 8 personnes dans 4 canots est donc égal à :

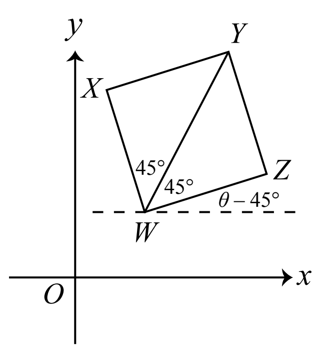
$$\frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{2}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{2^3}=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$$

On détermine maintenant le nombre de façons d'affecter les 8 personnes de manière qu'il n'y ait pas deux des trois personnes, Annie, Dany ou Fannie, dans le même canot.
Annie peut être affectée à l'un de 4 canots.
Dany peut ensuite être affecté à un de 3 canots, puisqu'il ne peut être affecté au même canot qu'Annie.
Fannie peut ensuite être affectée à un de 2 canots, puisqu'elle ne peut être affectée au même canot qu'Annie ou Dany.
Il y a ensuite 5 choix pour la personne qui accompagnera Annie, puis 4 choix pour la personne qui accompagnera Dany, puis 3 choix pour la personne qui accompagnera Fannie.
Les 2 personnes qui restent iront dans le canot vide.
Il y a donc $4\cdot 3\cdot 2\cdot 5\cdot 4\cdot 3$ façons d'affecter les 8 personnes dans 4 canots de manière qu'il n'y ait pas deux des trois personnes, Annie, Dany ou Fannie, dans le même canot.

Donc, la probabilité qu'il n'y ait pas deux des triplets Annie, Dany et Fannie dans un même canot est égale à : $\dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{7\cdot 6}=\dfrac{24}{42}=\dfrac{4}{7}$.

Solution 2
Soit p la probabilité que deux des triplets Annie, Dany et Fannie soient dans le même canot.
La probabilité que l'on cherche est donc égale à $1-p$.
Soit q la probabilité qu'Annie et Dany soient dans le même canot.
Par symétrie, la probabilité qu'Annie et Fannie soient dans le même canot est aussi égale à q, de même que probabilité que Dany et Fannie soient dans le même canot.
Donc, $p=3q$.
On détermine q.
On affecte Annie à un canot. Puisqu'il reste 7 personnes qui pourraient être affectées au même canot, la probabilité que Dany soit affecté au même canot est égale à $\frac{1}{7}$. Les 6 autres personnes peuvent être affectées de n'importe quelle façon aux autres canots.
La probabilité qu'Annie et Dany soient affectées au même canot est donc égale à $q=\frac{1}{7}$.
La probabilité que deux des triplets Annie, Dany et Fannie soient dans le même canot est donc égale à $1-3\cdot\frac{1}{7}$, ou $\frac{4}{7}$.

(b) *Solution 1*
On suppose que WY forme un angle θ avec l'horizontale.



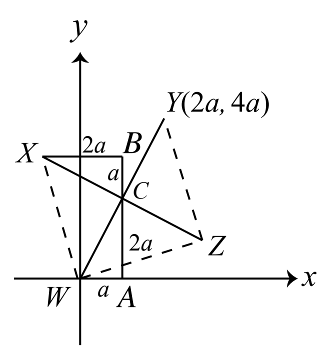
Puisque WY a une pente de 2, alors $\tan\theta=2$, puisqu'une droite qui forme un angle θ avec l'horizontale a pour pente $\tan\theta$.

Puisque $\tan\theta = 2 > 1 = \tan 45°$, alors $\theta > 45°$.
Or, WY est la bissectrice de l'angle droit ZWX.
Donc $\angle ZWY = \angle YWX = 45°$.
WX forme donc un angle de $\theta + 45°$ avec l'horizontale et WZ forme un angle de $\theta - 45°$ avec l'horizontale. Puisque $\theta > 45°$, alors $\theta - 45° > 0$ et $\theta + 45° > 90°$.
Puisque WZ et XY sont parallèles, ils ont la même pente.
Pour calculer les pentes de WX et de WZ, on calcule $\tan(\theta + 45°)$ et $\tan(\theta - 45°)$.
On utilise les identités $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ et $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ pour obtenir :

$$\tan(\theta + 45°) = \frac{\tan\theta + \tan 45°}{1 - \tan\theta \tan 45°} = \frac{2+1}{1-(2)(1)} = -3$$
$$\tan(\theta - 45°) = \frac{\tan\theta - \tan 45°}{1 - \tan\theta \tan 45°} = \frac{2-1}{1+(2)(1)} = \frac{1}{3}$$

La somme des pentes de WX et de XY est donc égale à $-3 + \frac{1}{3}$, ou $-\frac{8}{3}$.

Solution 2
On considère un carré $WXYZ$ dont la diagonale WY a une pente de 2.
On déplace le carré par translation de manière que W soit à l'origine $(0, 0)$. Une translation n'altère pas les pentes des segments de droites.
Soit $(2a, 2b)$ les coordonnées de Y, a et b étant des nombres non nuls.
Puisque WY a une pente de 2, alors $\dfrac{2b-0}{2a-0} = 2$, d'où $2b = 4a$, ou $b = 2a$.
Les coordonnées de Y sont donc $(2a, 4a)$.
Soit C le centre du carré $WXYZ$.
Puisque C est le milieu de WY, C a pour coordonnées $(a, 2a)$.
On déterminera les pentes de WX et de XY à partir des coordonnées de X.
On considère le segment XC.
Puisque les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, XC est perpendiculaire à WC.
Puisque WC a une pente de 2, alors XC et ZC ont pour pente $-\frac{1}{2}$.
Puisque les diagonales d'un carré ont a même longueur et que C est le milieu de chaque diagonale, alors $XC = WC$.
On considère le triangle CAW, dans la figure suivante, dont WA est horizontal et AC est vertical. Puisque C a pour coordonnées $(a, 2a)$, alors $WA = a$ et $AC = 2a$.
On forme le triangle rectangle XBC tel que XB soit horizontal et CB soit vertical. Le segment CB est donc un prolongement du segment AC. Puisque l'angle WCX est droit et que l'angle ACB est plat, les angles WCA et CXB sont complémentaires. Les triangles rectangles CAW et XBC sont donc semblables. Puisque WC et XC ont la même longueur, les triangles CAW et XBC sont isométriques. Donc $BC = a$ et $BX = 2a$.



Pour se déplacer du point $C(a, 2a)$ au point X, on se déplace de $2a$ unités vers la gauche et de a unités vers le haut.
X a donc pour coordonnées $(a - 2a, 2a + a)$, ou $(-a, 3a)$.
La pente de WX est donc égale à $\dfrac{3a - 0}{-a - 0}$, ou -3.
Puisque XY est perpendiculaire à WX, sa pente est égale à $-\dfrac{1}{-3}$, ou $\dfrac{1}{3}$.
La somme des pentes de WX et de XY est égale à $-3 + \dfrac{1}{3}$, ou $-\dfrac{8}{3}$.

8. (a) Puisque la base d'un logarithme doit être positive et qu'elle ne peut être égale à 1, alors $x > 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ et $x \neq \frac{1}{3}$.
Ceci nous assure que $\log 2x$ et $\log 3x$ existent et qu'ils n'égalent pas 0. Cela nous servira lorsqu'on changera de base.
On remarque que $48 = 2^4 \cdot 3$, $162 = 3^4 \cdot 2$, $\sqrt[3]{3} = 3^{1/3}$ et $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$.
On utilise les lois des logarithmes pour transformer les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\log_{2x}(48\sqrt[3]{3}) &= \log_{3x}(162\sqrt[3]{2}) \\
\frac{\log(2^4 \cdot 3 \cdot 3^{1/3})}{\log 2x} &= \frac{\log(3^4 \cdot 2 \cdot 2^{1/3})}{\log 3x} && \text{(formule pour changement de base)} \\
\frac{\log(2^4 \cdot 3^{4/3})}{\log 2 + \log x} &= \frac{\log(3^4 \cdot 2^{4/3})}{\log 3 + \log x} && (\log ab = \log a + \log b) \\
\frac{\log(2^4) + \log(3^{4/3})}{\log 2 + \log x} &= \frac{\log(3^4) + \log(2^{4/3})}{\log 3 + \log x} && (\log ab = \log a + \log b) \\
\frac{4\log 2 + \frac{4}{3}\log 3}{\log 2 + \log x} &= \frac{4\log 3 + \frac{4}{3}\log 2}{\log 3 + \log x} && (\log(a^c) = c\log a)
\end{aligned}$$

On multiplie chaque membre par le produit des dénominateurs (ce qui est équivalent au produit en croix) :

$$(4\log 2 + \tfrac{4}{3}\log 3)(\log 3 + \log x) = (4\log 3 + \tfrac{4}{3}\log 2)(\log 2 + \log x)$$

On développe le membre de gauche qui devient :

$$4\log 2\log 3 + \tfrac{4}{3}(\log 3)^2 + (4\log 2 + \tfrac{4}{3}\log 3)\log x$$

On développe le membre de droite qui devient :

$$4\log 3\log 2 + \tfrac{4}{3}(\log 2)^2 + (4\log 3 + \tfrac{4}{3}\log 2)\log x$$

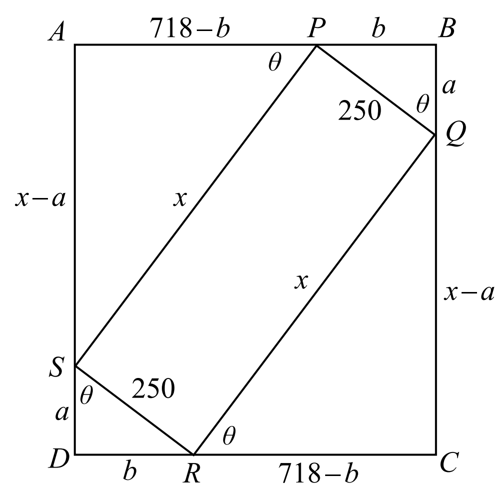
On obtient l'équation suivante que l'on simplifie pour obtenir les équations équivalentes qui suivent :

$$\begin{aligned}
\tfrac{4}{3}(\log 3)^2 - \tfrac{4}{3}(\log 2)^2 &= \log x(4\log 3 + \tfrac{4}{3}\log 2 - 4\log 2 - \tfrac{4}{3}\log 3) \\
\tfrac{4}{3}(\log 3)^2 - \tfrac{4}{3}(\log 2)^2 &= \log x\left(\tfrac{8}{3}\log 3 - \tfrac{8}{3}\log 2\right) \\
(\log 3)^2 - (\log 2)^2 &= 2\log x(\log 3 - \log 2)
\end{aligned}$$

$$\log x = \frac{(\log 3)^2 - (\log 2)^2}{2(\log 3 - \log 2)}$$
$$\log x = \frac{(\log 3 - \log 2)(\log 3 + \log 2)}{2(\log 3 - \log 2)}$$
$$\log x = \frac{\log 3 + \log 2}{2}$$
$$\log x = \tfrac{1}{2}\log 6$$
$$\log x = \log(\sqrt{6})$$

Donc $x = \sqrt{6}$.

(b) Soit $BC = x$, $PB = b$ et $BQ = a$.
Puisque $BC = x$, alors $AD = PS = QR = x$.
Puisque $BC = x$ et que $BQ = a$, alors $QC = x - a$.
Puisque $AB = 718$ et que $PB = b$, alors $AP = 718 - b$.
On sait que $PQ = SR = 250$.
Soit $\angle BQP = \theta$.
Puisque le triangle PBQ est rectangle en B, alors $\angle BPQ = 90^\circ - \theta$.
Puisque BQC est un angle plat et que $\angle PQR = 90^\circ$, alors $\angle RQC = 180^\circ - 90^\circ - \theta$, ou $\angle RQC = 90^\circ - \theta$.
Puisque APB est un angle plat et que $\angle SPQ = 90^\circ$, alors $\angle APS = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \theta)$, ou $\angle APS = \theta$.
Puisque les triangles SAP et QCR sont rectangles et qu'ils ont un angle en commun avec le triangle PBQ, ces trois triangles sont semblables.



De la même manière, on peut montrer que le triangle RDS est semblable à ces trois triangles.
Puisque $RS = PQ$, le triangle RDS et le triangle PBQ sont isométriques (angle-côté-angle).
De même, le triangle SAP et le triangle QCR sont isométriques.
On a donc $AS = x - a$, $SD = a$, $DR = b$ et $RC = 718 - b$.
Puisque les triangles SAP et PBQ sont semblables, alors $\dfrac{SA}{PB} = \dfrac{AP}{BQ} = \dfrac{SP}{PQ}$.
Donc $\dfrac{x-a}{b} = \dfrac{718-b}{a} = \dfrac{x}{250}$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PBQ, $a^2 + b^2 = 250^2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle SAP :

$$x^2 = (x-a)^2 + (718-b)^2$$
$$x^2 = x^2 - 2ax + a^2 + (718-b)^2$$
$$0 = -2ax + a^2 + (718-b)^2 \qquad (*)$$

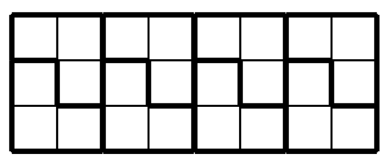
Puisque $a^2 + b^2 = 250^2$, alors $a^2 = 250^2 - b^2$.
Puisque $\dfrac{718-b}{a} = \dfrac{x}{250}$, alors $ax = 250(718-b)$.
En reportant $a^2 = 250^2 - b^2$ et $ax = 250(718-b)$ dans $(*)$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
0 &= -2(250)(718-b) + 250^2 - b^2 + (718-b)^2 \\
b^2 &= 250^2 - 2(250)(718-b) + (718-b)^2 \\
b^2 &= ((718-b)-250)^2 \qquad \text{(puisque } y^2 - 2yz + z^2 = (y-z)^2\text{)} \\
b^2 &= (468-b)^2 \\
b &= 468 - b \qquad \text{(puisque } b \neq b - 468\text{)} \\
2b &= 468 \\
b &= 234
\end{aligned}
$$

Puisque $a^2 = 250^2 - b^2$, alors $a^2 = 250^2 - 234^2$, ou $a^2 = (250+234)(250-234)$, ou $a^2 = 484 \cdot 16$, ou $a^2 = 22^2 \cdot 4^2$, ou $a^2 = 88^2$. Donc $a = 88$.

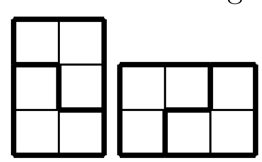
Donc $x = \dfrac{250(718-b)}{a}$, ou $x = \dfrac{250 \cdot 484}{88}$, ou $x = 1375$. Donc $BC = 1375$.

9. (a) Voici un pavage d'un rectangle 3×8 :



Plusieurs autres pavages sont possibles.

(b) On remarque qu'il est possible de paver tout rectangle 3×2 ou 2×3 :



On remarque aussi qu'il est impossible de paver un rectangle 6×1, puisqu'un L-triomino a une largeur de 2.

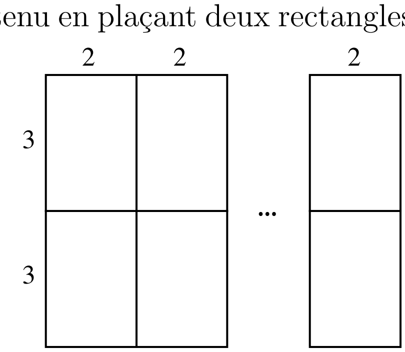
On montrera qu'il est possible de paver n'importe quel rectangle $6 \times L$ pour lequel $L \geq 2$. Pour le faire, on montrera qu'un tel rectangle $6 \times L$ peut être formé de rectangles 3×2 et de rectangles 2×3. Puisque chacun de ces rectangles peut être pavé par des L-triominos, le grand rectangle peut aussi être pavé en combinant ces pavages.

1^er^ cas : L est pair

Soit $L = 2k$, k étant un entier strictement positif.

On construit un rectangle $6 \times 2k$ en plaçant k rectangles 6×2 l'un à côté de l'autre.

Chaque rectangle 6×2 est obtenu en plaçant deux rectangles 3×2 l'un au-dessus de l'autre.

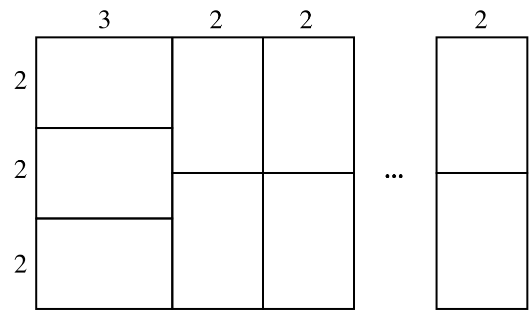


Il est donc possible de paver un tel rectangle.

2^e^ cas : L est impair et $L \geq 3$

Soit $L = 2k + 1$, k étant un entier strictement positif.

On construit un rectangle $6 \times (2k+1)$ en construisant un rectangle 6×3 et en plaçant $k-1$ rectangles 6×2 à ses côtés. On sait que $2k+1 = 3+2(k-1)$ et que $k-1 \geq 0$, puisque $k \geq 1$.
Le rectangle 6×3 est formé en plaçant trois rectangles 2×3 l'un au-dessus de l'autre.
Chaque rectangle 6×2 est obtenu en plaçant deux rectangles 3×2 l'un au-dessus de l'autre.



Il est donc possible de paver un tel rectangle.

Il est donc possible de paver un rectangle $6 \times L$ à l'aide de L-triominos lorsque $L \geq 2$.

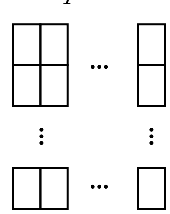
(c) Soit (H, L) un couple d'entiers ($H \geq 4$ et $L \geq 4$).
Puisque chaque triomino a une aire de 3, l'aire du rectangle qui doit être pavé doit être un multiple de 3 (puisqu'il sera recouvert de triominos qui ont chacun une aire de 3).
Puisqu'un rectangle $H \times L$ a une aire égale à HL, il faut que HL soit un multiple of 3, ce qui implique que H ou L soit un multiple de 3.
Puisqu'un rectangle $a \times b$ peut être pavé si et seulement si un rectangle $b \times a$ peut être pavé (on peut s'en convaincre en faisant subir des rotations de 90° comme on l'a fait avec les rectangles 3×2 et 2×3 dans la partie (b)), on peut supposer, sans perte de généralité, que H est divisible par 3.
On montrera que si H est divisible par 3, alors tout rectangle $H \times L$ ($H \geq 4$ et $L \geq 4$) peut être pavé.

1^er^ cas : H est un nombre pair divisible par 3

Dans ce cas, H est un multiple de 6. Soit $H = 6m$, m étant un entier strictement positif.
Puisque $L \geq 4$, on sait qu'un rectangle $6 \times L$ peut être pavé.
En plaçant m rectangles $6 \times L$ l'un au-dessus de l'autre, on obtient un rectangle $6m \times L$.
Puisque chaque rectangle $6 \times L$ peut être pavé, alors le rectangle $6m \times L$ peut être pavé.

2^e^ cas : H est un nombre impair divisible par 3, L est pair

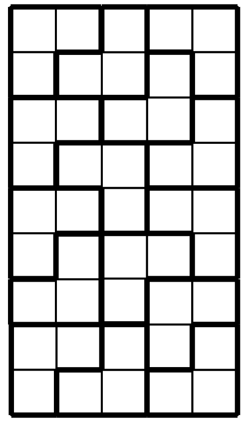
Soit $H = 3q$ et $L = 2r$, q étant un entier positif impair et r étant un entier strictement positif .
Pour paver un rectangle $3q \times 2r$, on place qr rectangles 3×2 en q rangées et r colonnes :



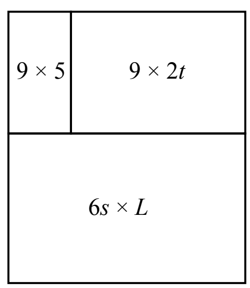
Il est donc possible de paver n'importe quel rectangle dans ce cas. (On remarque que l'on n'a pas utilisé le fait que q était impair.)

<u>3^e cas : H est un nombre impair divisible par 3, L est impair</u>

Puisque $H \geq 4$ et que $L \geq 4$, le rectangle qui a les plus petites valeurs possibles de H et de L mesure 9×5. Il peut être pavé comme suit :



(Il existe d'autres façons de paver ce rectangle.)
Puisque H est un multiple impair de 3 et que $H \geq 4$, on peut écrire $H = 9 + 6s$, s étant un entier ($s \geq 0$).
Puisque L est impair et que $L \geq 5$, on peut écrire $L = 5 + 2t$, t étant un entier ($t \geq 0$).
Le rectangle $H \times L$ est donc un rectangle $(9 + 6s) \times (5 + 2t)$.
On découpe ce rectangle en trois rectangles, soit un rectangle 9×5, un rectangle $9 \times 2t$ et un rectangle $6s \times L$:



(Si $s = 0$ ou $t = 0$, il y aura moins de trois rectangles.)
Il est possible de paver le rectangle 9×5, comme on l'a démontré ci-haut.
Si $t > 0$, il est possible de paver le rectangle $9 \times 2t$, comme on l'a démontré dans le 2^e cas.
Si $s > 0$, il est possible de paver le rectangle $6s \times L$, comme on l'a démontré dans le 1^er cas.
Il est donc possible de paver le rectangle $H \times L$.

Ces trois cas ont démontré qu'il est possible de paver un rectangle $H \times L$ ($H \geq 4$ et $L \geq 4$) lorsque H est un multiple de 3.
Puisque H et L peuvent être changés l'un pour l'autre et que H ou L doit être un multiple de 3, alors il est possible de paver un rectangle $H \times L$ ($H \geq 4$ et $L \geq 4$) précisément lorsque H ou L est un multiple de 3.

10. (a) On remplit une partie du tableau sachant que $A_0 = A_1 = A_2 = 0$ et que $A_3 = 1$:

$\cdots$	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\cdots$
$\cdots$	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\cdots$

$\cdots$	0	0	0	1	A_4	A_5	$\cdots$
$\cdots$	B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\cdots$

Puisque A_1 est la moyenne de A_0, de B_1 et de A_2, alors $A_1 = \dfrac{A_0 + B_1 + A_2}{3}$,
ou $3A_1 = A_0 + B_1 + A_2$.
Donc $3(0) = 0 + B_1 + 0$, d'où $B_1 = 0$.
Puisque A_2 est la moyenne de A_1, de B_2 et de A_3, alors $3A_2 = A_1 + B_2 + A_3$. Donc $3(0) = 0 + B_2 + 1$, d'où $B_2 = -1$.
Puisque B_2 est la moyenne de B_1, de A_2 et de B_3, alors $3B_2 = B_1 + A_2 + B_3$.
Donc $3(-1) = 0 + 0 + B_3$, d'où $B_3 = -3$.
On a donc :

$\cdots$	0	0	0	1	A_4	A_5	$\cdots$
$\cdots$	B_0	0	-1	-3	B_4	B_5	$\cdots$

Puisque A_3 est la moyenne de A_2, de B_3 et de A_4, alors $3A_3 = A_2 + B_3 + A_4$.
Donc $3(1) = 0 + (-3) + A_4$, d'où $A_4 = 6$.

(b) On considère une partie du tableau :

$\cdots$	A_{k-1}	A_k	A_{k+1}	$\cdots$
$\cdots$	B_{k-1}	B_k	B_{k+1}	$\cdots$

Donc :

$$\begin{aligned} 3S_k &= 3A_k + 3B_k \\ &= 3\left(\frac{A_{k-1} + B_k + A_{k+1}}{3}\right) + 3\left(\frac{B_{k-1} + A_k + B_{k+1}}{3}\right) \\ &= A_{k-1} + B_k + A_{k+1} + B_{k-1} + A_k + B_{k+1} \\ &= (A_{k-1} + B_{k-1}) + (A_k + B_k) + (A_{k+1} + B_{k+1}) \\ &= S_{k-1} + S_k + S_{k+1} \end{aligned}$$

Puisque $3S_k = S_{k-1} + S_k + S_{k+1}$, alors $S_{k+1} = 2S_k - S_{k-1}$.

(c) *Démonstration de l'énoncé (P)*
On suppose que chaque nombre du tableau est un entier strictement positif.
On suppose aussi que les nombres du tableau ne sont pas tous égaux.
Puisque tous les nombres du tableau sont strictement positifs, il doit y avoir un nombre minimal. Soit m le nombre minimal du tableau.
On choisit un nombre du tableau qui est égal à m, par exemple $A_r = m$, r étant un entier quelconque. S'il n'y a aucun nombre égal à m dans la première rangée, on trouvera $B_r = m$ dans la deuxième rangée.
Si les nombres A_j n'égalent pas tous m, alors en se déplaçant à gauche ou à droite dans la rangée, on arrivera à un nombre $A_t = m$, t étant un entier quelconque, dont un de ses voisins n'est pas égal à m. (Si ce n'était pas le cas, tous les nombres dans les deux directions seraient égaux à m.)
Si tous les nombres A_j égalent m, alors puisque les nombres du tableau n'égalent pas tous m, il y aura un nombre B_t qui n'est pas égal à m.
En d'autres mots, puisque les nombres du tableau ne sont pas tous égaux, il existe un entier t pour lequel $A_t = m$ et les nombres A_{t-1}, A_{t+1} et B_t n'égalent pas tous m.

Or $3m = 3A_t$ et $3A_t = A_{t-1} + B_t + A_{t+1}$. Donc $3m = A_{t-1} + B_t + A_{t+1}$.
Puisque A_{t-1}, B_t et A_{t+1} n'égalent pas tous m et que chacun est supérieur ou égal à m, alors un de ces nombres est supérieur à m.
Donc $A_{t-1} + B_t + A_{t+1} \geq m + m + (m + 1) = 3m + 1 > 3m$, ce qui est une contradiction.
Notre supposition initiale que tous les nombres du tableau ne sont pas tous égaux est donc fausse. Donc, les nombres du tableau sont tous égaux. L'énoncé (P) est donc démontré.

Démonstration de l'énoncé (Q)
On suppose que tous les nombres du tableau sont des nombres réels strictement positifs.
On suppose aussi que les nombres du tableau ne sont pas tous égaux.
Comme dans la partie (b), on définit $S_k = A_k + B_k$ pour chaque entier k.
On définit aussi $D_k = A_k - B_k$ pour chaque entier k.

1re étape : On démontre que les nombres S_k forment une suite arithmétique

D'après la partie (b), $S_{k+1} = 2S_k - S_{k-1}$.
On récrit cette identité sous forme $S_{k+1} - S_k = S_k - S_{k-1}$. Puisque cette identité est vérifiée par tous les entiers k, la différence entre deux nombres consécutifs est la même pour tous les entiers k.
Cette différence est donc constante et la suite est donc une suite arithmétique.

2e étape : On démontre que S_k est une constante

On suppose que $S_0 = c$. Puisque $A_0 > 0$ et que $B_0 > 0$, alors $S_0 = c > 0$.
Puisque les termes S_k forment une suite arithmétique, la suite est constante, croissante ou décroissante.
Si la suite est croissante, la raison arithmétique, $d = S_1 - S_0$, est positive.
On remarque que $S_{-1} = c - d$, $S_{-2} = c - 2d$ et ainsi de suite.
Puisque c et d sont constants, alors en reculant assez loin dans la suite, on aura un terme négatif S_t, t étant un entier quelconque. On a donc une contradiction, puisque $A_t > 0$, $B_t > 0$ et que $S_t = A_t + B_t$.
La suite ne peut donc pas être croissante.
Si la suite est décroissante, la raison arithmétique, $d = S_1 - S_0$, est négative.
On remarque que $S_1 = c + d$, $S_2 = c + 2d$ et ainsi de suite.
Puisque c et d sont constants, alors en avançant assez loin dans la suite, on aura un terme négatif S_t, t étant un entier quelconque. On a donc une contradiction, puisque $A_t > 0$, $B_t > 0$ et que $S_t = A_t + B_t$.
La suite ne peut donc pas être décroissante.
Puisque tous les nombres sont strictement positifs et que les termes S_k forment une suite arithmétique, alors la suite de termes S_k est constante. Soit $S_k = c$ ($c > 0$) pour tous les entiers k.

3e étape : Déterminer l'intervalle des valeurs possibles de D_k

On remarque que $S_k = A_k + B_k = c$, que $A_k > 0$ et que $B_k > 0$, pour tous les entiers k.
Puisque $A_k > 0$, alors : $B_k = S_k - A_k = c - A_k < c$.
De même, $A_k < c$.
Donc $0 < A_k < c$ et $0 < B_k < c$.
Puisque $D_k = A_k - B_k$, alors $D_k < c - 0 = c$ et $D_k > 0 - c = -c$.
En d'autres mots, on a $-c < D_k < c$.

4^e étape : $D_{k+1} = 4D_k - D_{k-1}$

On utilise une approche semblable à celle de la solution de la partie (b) :

$$\begin{aligned}
3D_k &= 3A_k - 3B_k \\
3D_k &= (A_{k-1} + B_k + A_{k+1}) - (B_{k-1} + A_k + B_{k+1}) \\
3D_k &= (A_{k+1} - B_{k+1}) + (A_{k-1} - B_{k-1}) - (A_k - B_k) \\
3D_k &= D_{k+1} + D_{k-1} - D_k \\
4D_k - D_{k-1} &= D_{k+1}
\end{aligned}$$

5^e étape : Dernière contradiction

On veut démontrer que $D_k = 0$ pour tous les entiers k.
Ceci démontrera que $A_k = B_k$ pour tous les entiers k.
Puisque $S_k = A_k + B_k = c$ pour tous les entiers k, ceci démontrera que $A_k = B_k = \frac{1}{2}c$ pour tous les entiers k, ce qui démontrera que tous les nombres du tableau sont égaux.
Supposons que $D_k \neq 0$, k étant un entier quelconque.
On peut supposer que $D_0 \neq 0$. (Si $D_0 = 0$, alors puisque le tableau est infini dans les deux directions, on peut déplacer le numérotage de manière qu'une colonne avec $D_k \neq 0$ est appelée colonne 0.)
Donc $D_0 > 0$ ou $D_0 < 0$.
On peut supposer que $D_0 > 0$. (Si $D_0 < 0$, on peut changer les deux rangées l'une pour l'autre de manière que D_0 soit positive.)
Supposons que $D_1 \geq D_0 > 0$.
Donc $D_2 = 4D_1 - D_0 \geq 4D_1 - D_1 = 3D_1$. Puisque $D_1 > 0$, ceci implique que $D_2 > D_1 > 0$.
De même, $D_3 = 4D_2 - D_1 \geq 4D_2 - D_2 = 3D_2 > D_2 > 0$. Puisque $D_2 \geq 3D_1$, alors $D_3 \geq 9D_1$.
En continuant de cette façon, on voit que $D_4 \geq 27D_1$, que $D_5 \geq 81D_1$ et ainsi de suite avec $D_k \geq 3^{k-1}D_1$ pour tous les entiers k ($k \geq 2$). Puisque la valeur de D_1 est un nombre réel fixe et strictement positif et que $D_k < c$ pour tous les entiers k, on a une contradiction, car la suite de termes 3^{k-1} est alors croissante sans borne, ce qui contredit le résultat de la 3^e étape.
On suppose alors que $D_1 < D_0$.
On récrit $D_{k+1} = 4D_k - D_{k-1}$ sous forme $D_{k-1} = 4D_k - D_{k+1}$.
Donc $D_{-1} = 4D_0 - D_1 > 4D_0 - D_0 = 3D_0 > D_0 > 0$.
On prolonge ce résultat en utilisant un argument semblable pour obtenir $D_{-j} > 3^j D_0$ pour tous les entiers strictement positifs j, ce qui nous amène à la même contradiction.
Puisqu'on a une contradiction dans tous les cas, on ne peut pas avoir $D_k \neq 0$ pour un entier quelconque k.

Puisque $D_k = 0$ et que $S_k = c$ pour tous les entiers k, alors $A_k = B_k = \frac{1}{2}c$ pour tous les entiers k. Donc, tous les nombres du tableau sont égaux.