



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

# Concours Euclide

*le mercredi 11 avril 2018*

*(Amérique du Nord et Amérique du Sud)*

*le jeudi 12 avril 2018*

*(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)*



UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

**Durée :** 2 heures et demie

©2018 University of Waterloo

*Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.*

**Nombre de questions :** 10

**Chaque question vaut 10 points.**

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable, telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera, (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

**ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.**

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple,  $\pi + 1$  et  $1 - \sqrt{2}$  sont des nombres exacts simplifiés.

*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca), Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par  $y = x^3 - x$ , mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

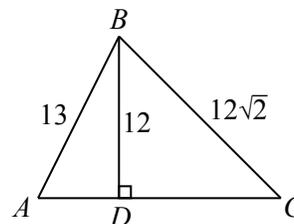
**Remarque au sujet de l'encodage par bulles**

S'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

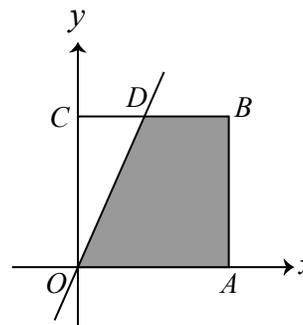
1.  (a) Si  $x = 11$ , quelle est la valeur de  $x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3)$  ?  
 (b) Si  $\frac{a}{6} + \frac{6}{18} = 1$ , quelle est la valeur de  $a$  ?  
 (c) Une tablette de chocolat et deux paquets identiques de gomme à mâcher coûtent 4,15 \$ en tout. Une tablette de chocolat coûte 1,00 \$ de plus qu'un paquet de gomme. Déterminer le coût d'une tablette de chocolat.

2.  (a) On utilise chacun des chiffres 1, 3, 5, 7 et 9 pour former un entier de cinq chiffres. L'entier est supérieur à 80 000 et inférieur à 92 000. Le chiffre des unités est 3. Les chiffres des centaines et des dizaines, dans cet ordre, forment un entier de deux chiffres qui est divisible par 5. Quel est l'entier de cinq chiffres ?

-  (b) Dans la figure ci-contre, le point  $D$  est sur  $AC$  de manière que  $BD$  soit perpendiculaire à  $AC$ . De plus,  $AB = 13$ ,  $BC = 12\sqrt{2}$  et  $BD = 12$ . Quelle est la longueur de  $AC$  ?



-  (c) Dans la figure ci-contre, le carré  $OABC$  a des côtés de longueur 6. La droite d'équation  $y = 2x$  coupe  $CB$  en  $D$ . Déterminer l'aire de la région ombrée.

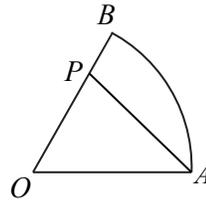


3.  (a) Quelle est la valeur de  $(\sqrt{4 + \sqrt{4}})^4$  ?
-  (b) Il existe exactement un couple  $(x, y)$  d'entiers strictement positifs pour lesquels  $\sqrt{23 - x} = 8 - y^2$ . Quel est ce couple  $(x, y)$  ?
-  (c) La droite d'équation  $y = mx + 2$  coupe la parabole d'équation  $y = ax^2 + 5x - 2$  aux points  $P(1, 5)$  et  $Q$ . Déterminer
- la valeur de  $m$ ,
  - la valeur de  $a$  et
  - les coordonnées de  $Q$ .

4.  (a) Les entiers positifs 34 et 80 ont exactement deux diviseurs communs positifs, soit 1 et 2. Combien d'entiers  $n$  dans l'intervalle  $1 \leq n \leq 30$  ont pour propriété que  $n$  et 80 ont exactement deux diviseurs communs positifs ?
-  (b) Une fonction  $f$  est définie de manière que
- $f(1) = 1$ ,
  - si  $n$  est un entier pair strictement positif, alors  $f(n) = f(\frac{1}{2}n)$  et
  - si  $n$  est un entier impair tel que  $n > 1$ , alors  $f(n) = f(n - 1) + 1$ .
- Par exemple,  $f(34) = f(17)$  et  $f(17) = f(16) + 1$ .  
Déterminer la valeur de  $f(50)$ .

5.  (a) Le triangle équilatéral  $PQR$  a un périmètre de 12. L'hexagone régulier  $STUVWX$  a aussi un périmètre de 12. Quel est le rapport de l'aire du triangle  $PQR$  à l'aire de l'hexagone  $STUVWX$  ?

-  (b) Dans la figure ci-contre, le secteur  $AOB$  est  $\frac{1}{6}$  d'un disque complet de rayon 18. Ainsi  $AO = BO = 18$ . On coupe le secteur en deux régions en coupant droit du point  $A$  au point  $P$  sur  $OB$ . Les deux régions ont la même aire. Déterminer la longueur de  $OP$ .



6.  (a) Combien y a-t-il d'entiers  $k$  tels que  $0 < k < 18$  et  $\frac{5 \sin(10k^\circ) - 2}{\sin^2(10k^\circ)} \geq 2$  ?

-  (b) La figure suivante représente un chemin plat et droit qui joint  $A$  et  $B$ .



Karuna court de  $A$  à  $B$ , se retourne instantanément et revient à  $A$  en courant. Karuna court à la vitesse de 6 m/s. En partant en même temps que Karuna, Jorge court de  $B$  à  $A$ , se retourne instantanément et revient à  $B$  en courant. Jorge court de  $B$  à  $A$  à la vitesse de 5 m/s et de  $A$  à  $B$  à la vitesse de 7,5 m/s. Il y a une distance de 297 m entre  $A$  et  $B$  et chaque coureur met exactement 99 s pour terminer sa course. Déterminer les deux valeurs de  $t$  pour lesquelles Karuna et Jorge sont au même endroit sur la route après  $t$  secondes.

7.  (a) Huit personnes, y compris les triplets Annie, Dany et Fannie, partent en voyage dans quatre canots. Chaque canot a deux places. Les huit personnes seront affectées de façon aléatoire aux quatre canots, deux par canot. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas deux des triplets Annie, Dany et Fannie dans un même canot ?

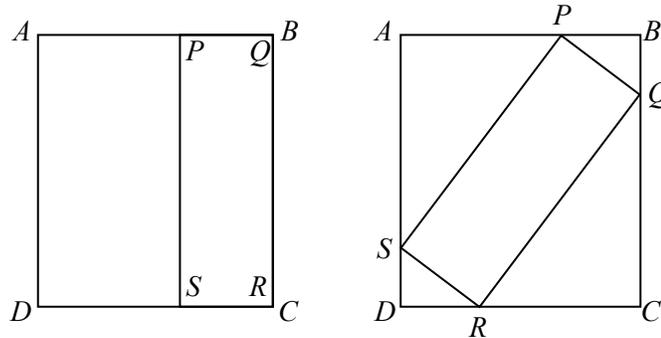


- (b) La diagonale  $WY$  du carré  $WXYZ$  a une pente de 2. Déterminer la somme des pentes de  $WX$  et de  $XY$ .

8.  (a) Déterminer toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $\log_{2x}(48\sqrt[3]{3}) = \log_{3x}(162\sqrt[3]{2})$ .



- (b) Dans la figure suivante, le rectangle  $PQRS$  est placé dans le rectangle  $ABCD$  de deux manières différentes : d'abord de manière que  $Q$  soit au point  $B$  et que  $R$  soit au point  $C$  ; ensuite, de manière que  $P$  soit sur  $AB$ , que  $Q$  soit sur  $BC$ , que  $R$  soit sur  $CD$  et que  $S$  soit sur  $DA$ .



Sachant que  $AB = 718$  et que  $PQ = 250$ , déterminer la longueur de  $BC$ .

9.  Un L-triomino est composé de trois carrés unités comme ceci :



On considère deux entiers strictement positifs,  $H$  et  $L$ . Un rectangle  $H \times L$  est *pavable* s'il peut être complètement recouvert de copies non chevauchantes (chacune pouvant être tournée ou glissée) de ce L-triomino et si la somme des aires de ces L-triomino non chevauchants est égale à l'aire du rectangle (c'est-à-dire qu'aucun L-triomino n'est partiellement à l'extérieur du rectangle). Si un tel rectangle peut être pavé, un *pavage* est une configuration particulière de L-triomino qui pavent le rectangle.

- (a) Tracer un pavage d'un rectangle  $3 \times 8$ .  
 (b) Déterminer tous les entiers  $L$  pour lesquels un rectangle  $6 \times L$  peut être pavé, tout en justifiant sa démarche.  
 (c) Déterminer tous les couples  $(H, L)$  d'entiers ( $H \geq 4$  et  $L \geq 4$ ) pour lesquels un rectangle  $H \times L$  peut être pavé, tout en justifiant sa démarche.



10. Dans un tableau infini de deux rangées, les nombres de la première rangée se nomment  $\dots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \dots$  et les nombres de la deuxième rangée se nomment  $\dots, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2, \dots$ . Pour chaque entier  $k$ , le nombre  $A_k$  est directement au-dessus du nombre  $B_k$  dans le tableau, comme suit :

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \dots & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 & \dots \\ \hline \dots & B_{-2} & B_{-1} & B_0 & B_1 & B_2 & \dots \end{array}$$

Pour chaque entier  $k$ ,  $A_k$  est égal à la moyenne du nombre à sa gauche, du nombre à sa droite et du nombre au-dessous de lui ; de même, chaque  $B_k$  est égal à la moyenne du nombre à sa gauche, du nombre à sa droite et du nombre au-dessus de lui.

- (a) Dans un tel tableau, on a  $A_0 = A_1 = A_2 = 0$  et  $A_3 = 1$ .  
Déterminer la valeur de  $A_4$ .  
*On accorde un maximum de 2 points pour cette partie.*
- (b) Dans un autre tel tableau, on définit  $S_k = A_k + B_k$  pour chaque entier  $k$ .  
Démontrer que  $S_{k+1} = 2S_k - S_{k-1}$  pour chaque entier  $k$ .  
*On accorde un maximum de 2 points pour cette partie.*
- (c) On considère les deux énoncés suivants au sujet d'un troisième tel tableau :
- (P) Si chaque nombre du tableau est un entier strictement positif, alors tous les nombres du tableau sont égaux.
- (Q) Si chaque nombre du tableau est un nombre réel strictement positif, alors tous les nombres du tableau sont égaux.

Démontrer l'énoncé (Q).

*On accorde un maximum de 6 points pour cette partie.*

On accorde le maximum de 6 points pour une démonstration complète de l'énoncé (Q), que l'élève ait tenté ou non de démontrer l'énoncé (P).

On accorde 2 des 6 points pour une démonstration complète de l'énoncé (P). Dans ce cas, toute tentative de démontrer l'énoncé (Q) sera évaluée et on accordera une partie des 4 autres points en conséquence.

Des points peuvent être accordés pour les cas où les élèves n'ont pas réussi à démontrer complètement les énoncés (P) ou (Q).



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

*Pour les élèves...*

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2018! Chaque année, plus de 240 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2018.

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

*Pour les enseignants...*

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2018/2019
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours