Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2018

(10e année – Secondaire IV)

le mardi 27 février 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 28 février 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque $3 \times n = 6 \times 2$, alors $3n = 12$. Donc $n = \frac{12}{3}$, ou $n = 4$.

RÉPONSE : (E)

2. Le quadrillage 4×5 contient 20 cases 1×1.
Pour que la moitié de ces cases soient ombrées, il doit y avoir 10 cases ombrées.
Puisque 3 cases sont déjà ombrées, il faut en ombrer 7 de plus $(10 - 3 = 7)$.

RÉPONSE : (C)

3. Puisque la droite numérique, entre 0 et 2, est divisée en 8 parties égales, chaque espace a une longueur de 0,25 $(2 \div 8 = 0{,}25)$.
On a donc $S = 1 + 0{,}25$, ou $S = 1{,}25$.

RÉPONSE : (D)

4. Puisque $9 = 3 \times 3$, alors $9^4 = (3 \times 3)^4 = 3^4 \times 3^4 = 3^8$.
OU

$$9^4 = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 3) = 3^8$$

RÉPONSE : (D)

5. Un angle plein mesure 360°.
L'angle au centre de 120° correspond à $\frac{120^\circ}{360^\circ}$ d'un angle plein, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}$ d'un angle plein.
L'aire du secteur correspond donc à $\frac{1}{3}$ de l'aire du disque. Elle est donc égale à $\frac{1}{3} \times 9\pi$, ou 3π.

RÉPONSE : (B)

6. On peut simplifier l'expression $x^2 + 2x - x(x + 1)$: $x^2 + 2x - x(x + 1) = x^2 + 2x - x^2 - x = x$.
Lorsque $x = 2018$, l'expression a donc une valeur de 2018.

RÉPONSE : (B)

7. L'augmentation du nombre d'autos est égale à 24 $(48 - 24 = 24)$.
On veut exprimer cette augmentation comme un pourcentage par rapport au nombre initial.
On a : $\dfrac{24}{24} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{100}{100} = 100\,\%$.
OU
Puisque 48 est le double de 24, il y a eu une augmentation de $100\,\%$.

RÉPONSE : (D)

8. Un segment est parallèle à l'axe des abscisses lorsque ses extrémités ont la même ordonnée.
La droite est donc parallèle à l'axe des abscisses lorsque $2k + 1 = 4k - 5$, ou $6 = 2k$, ou $k = 3$.
(On peut vérifier que lorsque $k = 3$, les points ont pour coordonnées $(3, 7)$ et $(8, 7)$.)

RÉPONSE : (B)

9. Puisque 5, a et b ont une moyenne de 33, alors $\dfrac{5 + a + b}{3} = 33$.
On multiplie chaque membre par 3 pour obtenir $5 + a + b = 99$, d'où $a + b = 94$.
La moyenne de a et b est égale à $\dfrac{a + b}{2}$. Elle est donc égale à $\dfrac{94}{2}$, ou 47.

RÉPONSE : (E)

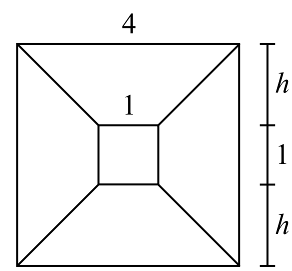
10. Parmi les numéros sur les uniformes, on remarque que :
    - 11 et 13 sont des nombres premiers
    - 16 est un carré parfait
    - 12, 14 et 16 sont pairs

    Puisque les numéros de Karl et de Liu étaient des nombres premiers, il s'agissait de 11 et de 13 dans un ordre quelconque.
    Puisque le numéro de Gina était un carré parfait, il s'agissait de 16.
    Puisque Helga et Julie avaient chacune un numéro pair, il s'agissait de 12 et 14 dans un ordre quelconque. (Le numéro 16 est déjà choisi.)
    Donc, Ioana portait le numéro restant, soit le 15.

    Réponse : (D)

11. *Solution 1*
    Puisque le grand carré a des côtés de longueur 4, son aire est égale à 4^2, ou 16.
    Puisque le petit carré a des côtés de longueur 1, son aire est égale à 1^2, ou 1.
    L'aire totale des quatre trapèzes identiques est égale à la différence de ces aires, soit $16-1$, ou 15.
    Puisque les trapèzes sont identiques, ils ont la même aire. Cette aire est donc égale à $\frac{15}{4}$.

    Solution 2
    Soit h la hauteur de chaque trapèze.
    Puisque le grand carré a un côté latéral de longueur 4, alors $h+1+h=4$. Donc $h=\frac{3}{2}$.
    Chacun des trapèzes a deux côtés parallèles de longueurs 1 et 4 et une hauteur de $\frac{3}{2}$.
    L'aire de chaque trapèze est donc égale à $\frac{1}{2}(1+4)(\frac{3}{2})$, ou $\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)$, ou $\frac{15}{4}$.



    Réponse : (D)

12. On sait que 1 zède a la même valeur que 16 ixes.
    On sait aussi que 2 ixes ont la même valeur que 29 igrecs.
    Puisque 16 ixes correspondent à 8 groupes de 2 ixes, alors 16 ixes ont la même valeur que 8×29 igrecs, ou 232 igrecs.
    Donc, 1 zède a la même valeur que 232 igrecs.

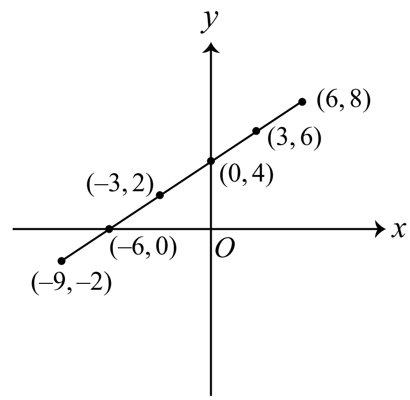
    Réponse : (C)

13. On cherche donc les valeurs de x pour lesquelles $x+1$ est un diviseur de 3.
    Les diviseurs le 3 sont $3, -3, 1$ et -1.
    Lorsque $x+1$ est égal à 3, -3, 1 et -1, alors x est égal à 2, -4, 0 et -2, respectivement.
    Il y a donc 4 telles valeurs de x.

    Réponse : (A)

14. *Solution 1*

Le segment de droite qui joint les points $(-9,-2)$ et $(6,8)$ a pour pente $\dfrac{8-(-2)}{6-(-9)}$, ou $\dfrac{10}{15}$, ou $\dfrac{2}{3}$.



Ainsi en partant du point $(-9,-2)$ et en se déplaçant de 2 vers le haut et de 3 vers la droite, on obtient d'autres points sur le segment dont les coordonnées sont des entiers.
On obtient les points $(-9,-2),(-6,0),(-3,2),(0,4),(3,6)$ et $(6,8)$.
On a donc 6 points sur le segment dont les deux coordonnées sont entières.
Y en a-t-il d'autres ?
S'il y a un autre tel point entre les points $(-9,-2)$ et $(6,8)$, son ordonnée doit être égale à -1, 1, 3, 5 ou 7. (On a déjà des points dont l'ordonnée est -2, 0, 2, 4, 6 ou 8).
On considère le point sur ce segment dont l'ordonnée est 7.
Puisque cette ordonnée est à mi-chemin entre les ordonnées 6 et 8, le point doit être le milieu du segment entre les points $(3,6)$ et $(6,8)$. Son abscisse doit donc être $\frac{1}{2}(3+6)$, ou 4,5, ce qui n'est pas un entier.
De même, les points sur le segment ayant pour ordonnées -1, 1, 3 ou 5 n'ont pas une abscisse entière.
Les six points ci-haut sont donc les seuls points avec deux coordonnées entières sur le segment.

Solution 2

Le segment de droite qui joint les points $(-9,-2)$ et $(6,8)$ a pour pente $\dfrac{8-(-2)}{6-(-9)}$, ou $\dfrac{10}{15}$, ou $\dfrac{2}{3}$.
La droite de pente $\dfrac{2}{3}$ et qui passe au point $(6,8)$ a pour équation $y-8=\frac{2}{3}(x-6)$, ou $y=\frac{2}{3}x+4$.
Soit (x,y) un point dont les deux coordonnées sont entières et qui est situé sur le segment de cette droite borné par les points $(-9,-2)$ et $(6,8)$.
Puisque y est un entier et que $\frac{2}{3}x=y-4$, alors $\frac{2}{3}x$ est un entier.
Donc, x doit être un multiple de 3.
Puisque x est dans l'intervalle de -9 à 6, les valeurs possibles de x sont $-9,-6,-3,0,3$ et 6.
Ceci nous donne les points de la solution 1 et justifie pourquoi il n'y a aucun autre point.
Il y a donc 6 tels points sur le segment.

Réponse : (E)

15. Puisque le triangle PQS est équilatéral, alors $\angle QPS=60^\circ$.
Puisque les angles RPQ, RPS et QPS entourent complètement le point P, leurs mesures ont une somme de 360°.
Puisque $\angle RPQ=\angle RPS$, alors $2\angle RPQ+\angle QPS=360^\circ$, ou $2\angle RPQ=360^\circ-60^\circ$, d'où $\angle RPQ=\angle RPS=150^\circ$.
Puisque $PR=PQ$, alors dans le triangle isocèle PQR, on a :

$$\angle PRQ=\angle PQR=\tfrac{1}{2}(180^\circ-\angle RPQ)=\tfrac{1}{2}(180^\circ-150^\circ)=15^\circ$$

De même, $\angle PRS=\angle PSR=15^\circ$.
Puisque $\angle QRS=\angle PRQ+\angle PRS$, alors $\angle QRS=15^\circ+15^\circ$, ou $\angle QRS=30^\circ$.

Réponse : (A)

16. Élisabeth peut monter jusqu'au cinquième barreau en grimpant 1 ou 2 barreaux à la fois.
Puisqu'il n'y a que 5 barreaux à monter, elle ne peut grimper 2 barreaux d'un coup plus de 2 fois.
Elle peut donc grimper 2 barreaux d'un coup 0 fois, 1 fois ou 2 fois.

Si elle grimpe 2 barreaux d'un coup 0 fois, alors elle monte 1 marche à la fois : $1, 1, 1, 1, 1$

Si elle grimpe 2 barreaux d'un coup 1 fois, les autres barreaux doivent être grimpés 1 à la fois : $2, 1, 1, 1$
Or, elle peut le faire de différentes façons. Puisqu'elle lève le pied quatre fois, elle peut grimper les deux barreaux d'un coup la 1^re^ fois, la 2^e^ fois, la 3^e^ fois ou la 4^e^ fois.
Elle peut donc faire $2, 1, 1, 1$ ou $1, 2, 1, 1$ ou $1, 1, 2, 1$ ou $1, 1, 1, 2$.
Il y a donc 4 façons de monter dans ce cas.

Si elle grimpe 2 barreaux d'un coup deux fois, elle montera aussi d'un barreau 1 fois : $2, 2, 1$.
Ici aussi, elle peut le faire de différentes façons. Puisqu'elle lève le pied trois fois, elle peut monter d'un barreau la 1^re^ fois, la 2^e^ fois ou la 3^e^ fois.
Elle peut donc faire $1, 2, 2$ ou $2, 1, 2$ ou $2, 2, 1$.
Il y a donc 3 façons de monter dans ce cas.

En tout, elle peut monter de 8 façons $(1 + 4 + 3 = 8)$.

Réponse : (E)

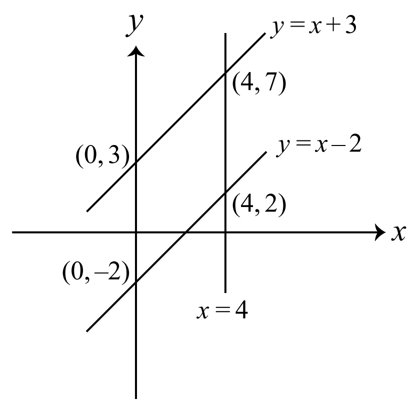
17. Puisque $\dfrac{x-y}{x+y} = 5$, alors $x - y = 5(x + y)$.
On a donc $x - y = 5x + 5y$, d'où $0 = 4x + 6y$, ou $2x + 3y = 0$.
Donc $\dfrac{2x+3y}{3x-2y} = \dfrac{0}{3x-2y} = 0$.
(On peut aussi choisir des valeurs particulières de x et de y qui vérifient l'équation donnée, comme $x = 3$ et $y = -2$.
On obtient $\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{3-(-2)}{3+(-2)} = \dfrac{5}{1} = 5$ et $\dfrac{2x+3y}{3x-2y} = \dfrac{2(3)+3(-2)}{3(3)-2(-2)} = \dfrac{0}{13} = 0$.)
On doit remarquer que si $\dfrac{x-y}{x+y} = 5$, alors $2x+3y = 0$ (comme ci-haut) et ainsi x et y ne peuvent pas tous deux égaler 0 (sinon $\dfrac{x-y}{x+y}$ serait égal à $\dfrac{0}{0}$, ce qui n'est pas bien défini).

Puisque $2x + 3y = 0$, alors $x = -\frac{3}{2}y$. Il est donc impossible pour x ou pour y d'égaler 0. Donc, ni x, ni y ne peut égaler 0.
Le dénominateur de l'expression $\dfrac{2x+3y}{3x-2y}$ est $3x - 2y$, ce qui est égal à $3(-\frac{3}{2}y)) - 2y$, ou $-\frac{13}{2}y$.
Cette expression n'est pas égale à 0, puisque $y \neq 0$.
Donc si $\dfrac{x-y}{x+y} = 5$, alors $\dfrac{2x+3y}{3x-2y} = 0$.

Réponse : (B)

18. *Solution 1*

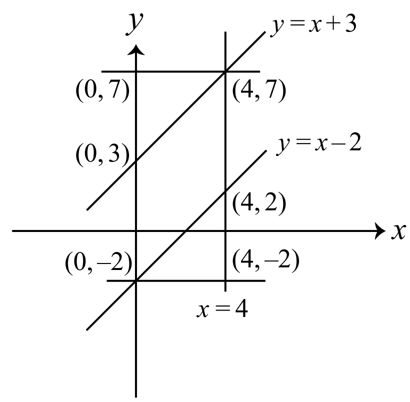
Les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$ sont verticales et parallèles. Les droites d'équations $y = x - 2$ et $y = x + 3$ sont parallèles de pente 1.



Puisque le quadrilatère a deux paires de côtés parallèles, il s'agit d'un parallélogramme.
Son aire est donc égale à base × hauteur.
On considère que sa base est le côté vertical sur l'axe des ordonnées.
Puisque les droites de pente 1 ont pour ordonnée à l'origine respective -2 et 3, la base a une longueur de $3-(-2)$, ou 5.
Puisque les côtés verticaux sont sur des droites parallèles d'équations $x = 0$ et $x = 4$, il y a une distance de 4 entre elles. Le parallélogramme a donc une hauteur de 4.
Le quadrilatère a donc une aire de 5×4, ou 20.

Solution 2

Les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$ sont verticales et parallèles. Les droites d'équations $y = x - 2$ et $y = x + 3$ sont parallèles de pente 1.



Les droites d'équations $y = x - 2$ et $y = x + 3$ coupent la droite d'équation $x = 0$ aux points d'abscisse 0, c'est-à-dire aux points $(0, -2)$ et $(0, 3)$.
Les droites d'équations $y = x - 2$ et $y = x + 3$ coupent la droite d'équation $x = 4$ aux points d'abscisse 4, c'est-à-dire aux points $(4, 2)$ et $(4, 7)$.
On trace une droite horizontale au point $(0, -2)$. Elle coupe la droite d'équation $x = 4$ au point $(4, -2)$. De même, on trace une droite horizontale au point $(4, 7)$. Elle coupe la droite d'équation $x = 0$ au point $(0, 7)$.
L'aire du quadrilatère est égale à l'aire du grand rectangle de sommets $(0, 7)$, $(4, 7)$, $(4, -2)$ et $(0, -2)$ moins l'aire des deux triangles.
Ce rectangle a des côtés de longueurs 4 $(4 - 0 = 4)$ et 9 $(7 - (-2) = 9)$. Il a donc une aire de 4×9, ou 36. Les deux triangles sont rectangles avec une base de longueur 4 $(4 - 0 = 4)$ et une hauteur de longueur 4 $(7 - 3 = 4$ et $2 - (-2) = 4)$. On pourrait les combiner pour former un carré avec des côtés de longueur 4. L'aire totale des triangles est donc égale à 4^2, ou 16.
L'aire du quadrilatère est donc égale à 20 $(36 - 16 = 20)$.

Réponse : (E)

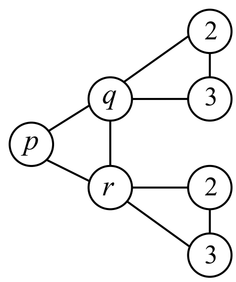
19. Soit G l'aire du grand disque, P l'aire du petit disque et C l'aire de la partie qui chevauche.
Puisque l'aire de la partie qui chevauche est égale à $\frac{3}{5}$ de l'aire du petit disque, alors $C = \frac{3}{5}P$.
Puisque l'aire de la partie qui chevauche est égale à $\frac{6}{25}$ de l'aire du grand disque, alors $C = \frac{6}{25}G$.
Donc $\frac{3}{5}P = \frac{6}{25}G$.
On multiplie chaque membre par 25 pour obtenir $15P = 6G$.
On divise chaque membre par 3 pour obtenir $5P = 2G$. Donc $\dfrac{5P}{G} = 2$, ou $\dfrac{P}{G} = \dfrac{2}{5}$.
Le rapport de l'aire du petit disque à l'aire du grand disque est de 2 : 5.

Réponse : (D)

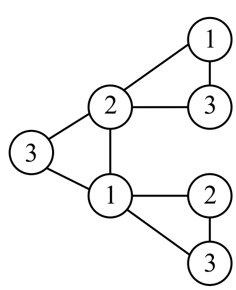
20. Lorsqu'on a calculé le produit des trois entiers choisis, ou bien il est une puissance de 2 ou bien il ne l'est pas.
Si p est la probabilité pour que le produit soit une puissance de 2 et si q est la probabilité pour que le produit ne soit pas une puissance de 2, alors $p + q = 1$.
On peut donc calculer q en déterminant la valeur de p et en calculant ensuite $q = 1 - p$.
Pour qu'un produit soit une puissance de 2, tous ses facteurs premiers doivent être des 2. Il faut donc que chacun des entiers choisis soit une puissance de 2.
Dans chacun des trois ensembles d'entiers, il y a 3 puissances de 2 (soit 2, 4 et 8) et 2 entiers qui ne sont pas des puissances de 2 (soit 6 et 10).
Ainsi la probabilité de choisir une puissance de 2 dans n'importe quel de ces ensembles est égale à $\frac{3}{5}$.
Puisqu'Abigaël, Bill et Charlie choisissent leur nombre de façon indépendante, la probabilité pour que chacun choisisse une puissance de 2 est égale à $\left(\frac{3}{5}\right)^3$, ou $\frac{27}{125}$.
Donc $p = \frac{27}{125}$. Puisque $q = 1 - p$, alors $q = 1 - \frac{27}{125}$, ou $q = \frac{98}{125}$.

Réponse : (C)

21. Puisque chacune des variables s, t, u et v prend une valeur de 1, 2 ou 3, que s et t ont des valeurs différentes et que u et v ont des valeurs différentes, leur somme ne peut pas être supérieure à $2 + 3 + 2 + 3$, ou 10.
Une somme de 10 peut seulement se produire si s et t ont pour valeurs 2 et 3 dans un ordre quelconque et si u et v ont pour valeurs 2 et 3 dans un ordre quelconque.



Or, q, s et t ont pour valeurs $1, 2$ et 3 dans un ordre quelconque et r, u et v ont pour valeurs $1, 2$ et 3 dans un ordre quelconque.
Puisque s et t ont pour valeurs 2 et 3, alors $q = 1$. De même, puisque u et v ont pour valeurs 2 et 3, alors $r = 1$.
De plus, puisque p, q et r ont pour valeurs $1, 2$ et 3 dans un ordre quelconque, on ne peut avoir $q = r = 1$.
Donc, on ne peut avoir $s + t + u + v = 10$.
La prochaine valeur possible de $s + t + u + v$ pourrait être 9.
On peut obtenir cette valeur de $s + t + u + v$ en remplissant la figure de manière que $s = 1$, $t = 3$, $u = 2$ et $v = 3$ et en procédant comme suit :



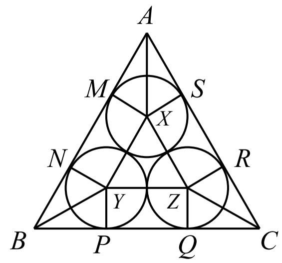
La valeur maximale possible de l'expression $s + t + u + v$ est 9.

Réponse : (B)

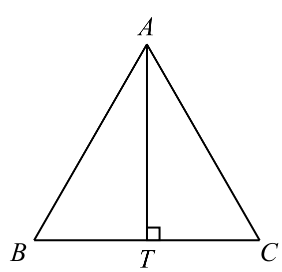
22. Pour que l'expression ait une valeur entière, il faut que chaque facteur premier du dénominateur puisse annuler un facteur du numérateur.
En d'autres mots, chaque facteur premier du dénominateur doit paraitre autant de fois ou davantage dans le numérateur.
On sait que $25 = 5^2$. Donc $25^y = 5^{2y}$.
De même, $36 = 6^2 = 2^2 3^2$. Donc $36^x = (2^2 3^2)^x = 2^{2x} 3^{2x}$.
L'expression donnée est donc égale à $\dfrac{30!}{2^{2x} 3^{2x} 5^{2y}}$.
On compte le nombre de fois que les facteurs premiers 5, 3 et 2 paraissent dans le numérateur.
L'expression 30! représente le produit des entiers de 1 à 30. Parmi ces entiers, il y a 6 multiples de 5, soit $5, 10, 15, 20, 25$ et 30.
Chacun de ces multiples admet un diviseur 5, sauf le 25 qui en admet deux.
En factorisation première, le numérateur admet donc 7 facteurs 5.
Pour que le numérateur admette au moins autant de facteurs 5 que le dénominateur, on doit donc avoir $7 \geq 2y$.
Puisque y est un entier, alors $y \leq 3$.
Parmi les 30 nombres qui forment 30!, il y a 10 multiples de 3, soit $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27$ et 30.
Sept de ces multiples admettent exactement un diviseur 3, soit $3, 6, 12, 15, 21, 24$ et 30.
Deux de ces multiples admettent deux diviseurs 3, soit 9 et 18.
Un de ces multiples admet trois diviseurs 3, soit 27.
Le numérateur admet donc 14 facteurs 3 $(7(1) + 2(2) + 1(3) = 14)$.
Pour que le numérateur admette au moins autant de facteurs 3 que le dénominateur, on doit donc avoir $14 \geq 2x$.
Puisque x est un entier, alors $x \leq 7$.
Si $x \leq 7$, alors le dénominateur admet au plus 14 facteurs premiers 2. Puisque les 30 nombres qui forment le produit de 30! comprennent 15 nombres pairs, ils admettent au moins 15 facteurs premiers 2. Il y a donc plus de facteurs 2 dans le numérateur de l'expression que dans le dénominateur. La valeur de x n'est donc pas influencée par le nombre de facteurs 2.
Puisque $x \leq 7$ et $y \leq 3$, alors $x + y \leq 7 + 3 = 10$.
On remarque que si $x = 7$ et $y = 3$, l'expression donnée a une valeur entière et la valeur maximale de $x + y$, soit 10, peut être atteinte.

Réponse : (A)

23. Pour déterminer le volume du prisme, on déterminera l'aire de sa base et sa hauteur.
D'abord l'aire de la base.
Toutes coupes transversales du prisme parallèles à la base sont identiques. On considère une coupe transversale située à 1 unité au-dessus de la base.
Puisque les sphères ont un rayon de 1, cette coupe transversale de forme triangulaire passe au centre de chaque sphère et aux points de contact des sphères avec les côtés latéraux du prisme.
Soit A, B et C les sommets de la coupe transversale de forme triangulaire, X, Y et Z les centres des sphères et M, N, P, Q, R et S les points de contact des sphères et des côtés latéraux du prisme. La figure suivante illustre la coupe transversale :

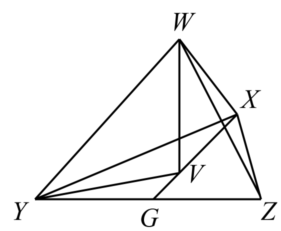


On trace les segments XM, XS, XY, XZ et XA, les segments YN, YP, YZ et YB, ainsi que les segments ZQ, ZR et ZC.
On détermine la longueur de BC. Un calcul semblable mène à la longueur de AB et de AC. Par symétrie, $AB = AC = BC$.
Puisque les rayons de cercles sont perpendiculaires aux tangentes aux points de contact, YP et ZQ sont perpendiculaires à BC.
On a $YP = ZQ = 1$, puisque les sphères et les cercles ont un rayon de 1.
Puisque $ZYPQ$ est rectangle en P et en Q et que $YP = ZQ = 1$, alors $ZYPQ$ est un rectangle.
Donc $YZ = PQ$.
Puisque YZ passe au point de contact des deux cercles, il a une longueur de 2, soit la somme des deux rayons.
Donc $PQ = YZ = 2$.
Puisque $AB = BC = CA$, le triangle ABC est équilatéral. Donc $\angle ABC = 60°$.
Par symétrie, YB est la bissectrice de l'angle ABC.
Donc $\angle YBP = 30°$ et le triangle BYP est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Puisque $YP = 1$, alors $BP = \sqrt{3}$ (les longueurs des côtés d'un tel triangle sont dans un rapport de $1 : \sqrt{3} : 2$).
De même, $QC = \sqrt{3}$.
Puisque, $BC = BP + PQ + QC$, alors $BC = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}$, ou $BC = 2 + 2\sqrt{3}$.
Donc $AB = BC = CA = 2 + 2\sqrt{3}$.
Pour calculer l'aire du triangle ABC, on abaisse une perpendiculaire au point A jusqu'au point T sur BC.



Puisque $\angle ABC = 60°$, le triangle ABT est un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Puisque $AB = 2 + 2\sqrt{3}$ et que $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, alors $AT = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 + 2\sqrt{3})$.

Puisque l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}(BC)(AT)$, elle est égale à $\frac{1}{2}(2+2\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(2+2\sqrt{3})\right)$, ou $\frac{\sqrt{3}}{4}(2+2\sqrt{3})^2$.
La base du prisme (c.-à-d. le triangle ABC) a donc une aire de $\frac{\sqrt{3}}{4}(2+2\sqrt{3})^2$.
On calcule maintenant la hauteur du prisme.
Soit W le centre de la sphère du dessus.
La distance du point W jusqu'à la face supérieure du prisme est égale au rayon de cette sphère, soit 1.
De même, la distance de la face inférieure du prisme (sa base) aux points X, Y et Z est égale à 1.
Pour déterminer la hauteur du prisme, il reste à déterminer la distance entre le point W et la coupe transversale qui contient X, Y et Z.
La hauteur du prisme est égale à cette distance plus 2.
Puisque les quatre sphères se touchent, il y a une distance de 2 entre n'importe quels deux centres des sphères.
Donc $WX = XY = YZ = WZ = WY = XZ = 2$. ($WXYZ$ est donc un tétraèdre dont les arêtes ont la même longueur.)
On cherche la hauteur de ce tétraèdre.
On joint W au centre V du triangle XYZ.
Par symétrie, W est directement au-dessus de V.



Soit G le milieu de YZ. On a donc $YG = GZ = 1$.
On trace VY et VG.
Puisque V est le centre du triangle XYZ, alors VG est perpendiculaire à YZ au point G.
Puisque le triangle XYZ est équilatéral, $\angle VYG = \frac{1}{2}\angle XYZ = 30°$. Ceci découle du fait que le centre V du triangle équilatéral XYZ est situé sur la bissectrice de chaque angle du triangle.
Le triangle YVG est donc aussi un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $YV = \frac{2}{\sqrt{3}}YG$, ou $YV = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
Le triangle WYV est rectangle en V.
Donc $WV = \sqrt{WY^2 - YV^2}$, d'où $WV = \sqrt{2^2 - \frac{4}{3}}$, ou $WV = \sqrt{\frac{8}{3}}$.
Le prisme a donc une hauteur de $1 + 1 + \sqrt{\frac{8}{3}}$.
Le volume du prisme est égal au produit de l'aire de sa base et de sa hauteur. Il est donc égal à $\frac{\sqrt{3}}{4}(2+2\sqrt{3})^2 \cdot \left(2 + \sqrt{\frac{8}{3}}\right)$, sont environ 46,97.
Cette réponse est plus près du choix de réponse 47,00.

Réponse : (E)

24. Puisqu'il doit y avoir au moins 2 bas blancs (B) entre n'importe quels 2 bas noirs (N), on commence par placer n bas noirs avec exactement 2 bas blancs entre chaque deux bas noirs :

$$NBBNBBNBBN \cdots NBBN$$

Puisqu'il y a n bas noirs, il y a $n-1$ espaces entre eux. On a donc placé $2(n-1)$ bas blancs, ou $2n-2$ bas blancs dans ces espaces.
Il reste donc 2 bas blancs à placer. Il y a $n+1$ endroits où on peut les placer : soit avant le premier bas noir, soit après le dernier bas noir, ou dans les $n-1$ espaces entre les bas noirs.
Ces 2 bas blancs peuvent placés ensemble au même endroit ou à deux endroits séparés.
Si les 2 bas sont placés au même endroit, ils peuvent être placés à $n+1$ endroits. Il y a donc $n+1$ façons de le faire. (Il n'est pas important de tenir compte d'où un bas blanc est placé à un endroit particulier, car tous les bas blancs sont identiques.)
Les deux bas blancs peuvent aussi être placés à deux des $n+1$ endroits.
Il y a $n+1$ endroits possibles pour le premier bas. Pour chacun de ces endroits, il y a n endroits possibles pour le deuxième bas (n'importe quel autre endroit que celui du premier bas).
Puisque ces deux endroits sont identiques, on a compté deux fois le nombre total de possibilités. Il y a donc $\frac{1}{2}(n+1)n$ choix de deux endroits séparés pour placer ces deux bas.
En tout, le nombre de façons de placer tous les bas est égal à $(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)n$, ou $(n+1)(1+\frac{1}{2}n)$, ou $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.
On veut connaitre la plus petite valeur possible de n pour laquelle cette somme est supérieure à 1 000 000.
Ceci est équivalent à déterminer la plus petite valeur possible de n pour laquelle l'expression $(n+1)(n+2)$ est supérieure à 2 000 000.
On remarque que la valeur de $(n+1)(n+2)$ augmente à mesure que n augmente, puisque chacun des facteurs $n+1$ et $n+2$ est croissant, ce qui fait que leur produit est croissant.
Lorsque $n = 1412$, on a $(n+1)(n+2) = 1\,997\,982$.
Lorsque $n = 1413$, on a $(n+1)(n+2) = 2\,000\,810$.
Puisque $(n+1)(n+2)$ est croissante, alors $n = 1413$ est la plus petite valeur pour laquelle l'expression $(n+1)(n+2)$ a une valeur supérieure à 2 000 000. C'est donc le plus petit entier positif pour lequel il y a plus de 1 000 000 alignements des bas.
La somme des chiffres de $n = 1413$ est 9 $(1+4+1+3=9)$.

Réponse : (A)

25. Puisque les termes de chaque suite peuvent être regroupés pour obtenir des sommes positives et des sommes négatives, il doit y avoir des termes positifs et des termes négatifs.
Puisque les 15 termes ont au plus deux valeurs différentes et que certains termes doivent être positifs, tandis que d'autres doivent être négatifs, alors les termes doivent avoir exactement une de deux valeurs, une positive et l'autre négative.
Soit x et y ces valeurs. Ces valeurs sont des entiers et on pose $x > 0$ et $y < 0$.
On considère une de ces suites :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$$

Puisque la somme de six termes consécutifs est toujours positive, alors $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 > 0$.
Puisque la somme de onze termes consécutifs est toujours négative, alors
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$.
Puisque $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 > 0$ et $(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}) < 0$, alors $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$.
D'après la condition des six termes, on a $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} > 0$.
Puisque $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$ et $a_6 + (a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}) > 0$, alors $a_6 > 0$. Donc $a_6 = x$.
D'après la condition des six termes, on a $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} > 0$.
Puisque $a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} < 0$, alors $a_{12} > 0$. Donc $a_{12} = x$.
On peut répéter cet argument en se déplaçant d'un terme vers la droite.
Ainsi avec $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7 > 0$ et $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12} < 0$ et en utilisant le même argument que le précédent, on obtient $a_7 = a_{13} = x$.
En se déplaçant encore d'un terme vers la droite, on obtient $a_8 = a_{14} = x$ et $a_9 = a_{15} = x$.
La suite est donc :

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, x, x, x, x, a_{10}, a_{11}, x, x, x, x$$

On peut répéter l'argument en commençant à l'extrémité droite de la suite.
Ainsi avec $a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15} > 0$ et $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15} < 0$, on peut conclure que $a_{10} = x$ et $a_4 = x$.
On recommence en se déplaçant vers la gauche pour obtenir $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_{10} = x$.
La suite est donc :

$$x, x, x, x, a_5, x, x, x, x, x, a_{11}, x, x, x, x$$

Au moins un des termes a_5 et a_{11} doit être égal à y, autrement tous les termes de la suite seraient positifs.
De fait, chacun de ces termes doit être égal à y.
En effet, supposons au contraire que $a_5 = y$ et que $a_{11} = x$.
Dans ce cas, la somme des 6 premiers termes de la suite est égale à $5x + y$. Cette somme doit être positive, c'est-à-dire que $5x + y > 0$.
De plus, la somme des 11 premiers termes est égale à $10x + y$ et cette somme doit être négative (c.-à-d. que $10x + y < 0$).
Or, $x > 0$ et ainsi $10x + y = 5x + (5x + y) > 0$, ce qui contredit $10x + y < 0$.
On obtient la même contradiction si on suppose que $a_5 = x$ et $a_{11} = y$.
Donc, $a_5 = a_{11} = y$ et la suite est :

$$x, x, x, x, y, x, x, x, x, x, y, x, x, x, x$$

Dans ce cas, chaque groupe de 6 termes consécutifs comprend exactement cinq x et la somme de chaque groupe de 6 termes consécutifs est égale à $5x + y$.
Or, on sait que $5x + y > 0$.

De plus, la somme de chaque groupe de 11 termes consécutifs est égale à $9x + 2y$.
On sait que $9x + 2y < 0$.
On a donc transformé le problème donné au problème équivalent suivant : compter le nombre de couples (x, y) d'entiers ($x > 0$ et $y < 0$) pour lesquels $5x + y > 0$ et $9x + 2y < 0$, sachant que $1 \leq x \leq 16$ ou $-16 \leq y \leq -1$.
Supposons que $1 \leq x \leq 16$.
D'après $5x + y > 0$ et $9x + 2y < 0$, on a $-5x < y < -4{,}5x$.
On remplit un tableau qui énumère les valeurs de x de 1 à 16, avec les contraintes correspondantes sur y et les valeurs de y qui en résultent :

x	$-5x$	$-4{,}5x$	Valeurs possibles de y
1	-5	$-4{,}5$	Aucune
2	-10	-9	Aucune
3	-15	$-13{,}5$	-14
4	-20	-18	-19
5	-25	$-22{,}5$	$-24, -23$
6	-30	-27	$-29, -28$
7	-35	$-31{,}5$	$-34, -33, -32$
8	-40	-36	$-39, -38, -37$
9	-45	$-40{,}5$	$-44, -43, -42, -41$
10	-50	-45	$-49, -48, -47, -46$
11	-55	$-49{,}5$	$-54, -53, -52, -51, -50$
12	-60	-54	$-59, -58, -57, -56, -55$
13	-65	$-58{,}5$	$-64, -63, -62, -61, -60, -59$
14	-70	-63	$-69, -68, -67, -66, -65, -64$
15	-75	$-67{,}5$	$-74, -73, -72, -71, -70, -69, -68$
16	-80	-72	$-79, -78, -77, -76, -75, -74, -73$

Ainsi lorsque $1 \leq x \leq 16$, il y a 56 couples (x, y) $(2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 56)$ et il y a donc 56 suites.
Par exemple, si $x = 5$ et $y = -24$, on obtient la suite

$$5, 5, 5, 5, -24, 5, 5, 5, 5, 5, -24, 5, 5, 5, 5$$

qui vérifie les conditions données.

Y a-t-il d'autres suites lorsque $-16 \leq y \leq -1$?
Puisque $5x + y > 0$, alors $x > -0{,}2y$. Puisque $y \geq -16$, alors $x < 0{,}2(16)$, ou $x < 3{,}2$.
Puisque $9x + 2y < 0$, alors $x < -\frac{2}{9}y$. Puisque $y \leq -1$, alors $x > \frac{2}{9}(1)$, ou $x > \frac{2}{9}$.
Puisque $\frac{2}{9} < x < 3{,}2$, toute suite avec $-16 \leq y \leq -1$ satisfait aussi à $1 \leq x \leq 16$ et une telle suite a déjà été comptée.
Le nombre N de suites est donc égal à 56.

Réponse : (E)