Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2018

le mercredi 21 novembre 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 22 novembre 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Puisque chaque boîte contient 12 plateaux, 6 boîtes doivent ainsi contenir $12 \times 6 = 72$ plateaux. Puisque Paul a 4 plateaux supplémentaires, il a $72 + 4 = 76$ plateaux en tout. Puisque chaque plateau peut contenir 8 pommes, il doit y avoir $76 \times 8 = 608$ pommes.

   Réponse : 608 pommes

2. Puisque le lapin court 3 fois plus vite que la mouffette, il lui faut $\frac{1}{3}$ du temps dont a besoin la mouffette pour terminer la course, soit 2 minutes. Puisque le lapin court 5 fois plus vite que la tortue, la tortue aura besoin de cinq fois plus de temps que le lapin pour terminer la course, soit 10 minutes.

   Réponse : 10 minutes

3. *Solution 1*
   Puisque le pot contient 6 crayons, il y a $\dfrac{6 \times 5}{2} = 15$ groupes de deux crayons qui puissent être retirés. (Car lors du premier tirage, on a le choix entre 6 crayons, tandis qu'au deuxième tirage, on a le choix entre 5 crayons. Puisqu'un groupe spécifique de deux crayons peut être sélectionné de 2 manières, on divise 6×5 par 2.)
   De même, puisque le pot contient 3 crayons rouges, il y a $\dfrac{3 \times 2}{2} = 3$ groupes de deux crayons rouges qui puissent être retirés.
   Donc, la probabilité que Jacob retire 2 crayons rouges est de $\dfrac{3}{15}$ ou $\dfrac{1}{5}$.

   Solution 2
   On représente les crayons dans la boîte comme suit : R1, R2, R3, B1, B2, G1.
   Les groupes de deux crayons que Jacob pourrait retirer sont :

   R1R2, R1R3, R1B1, R1B2, R1G1, R2R3, R2B1, R2B2, R2G1,
   R3B1, R3B2, R3G1, B1B2, B1G1, B2G1

   soit un total de 15 groupes de deux crayons.
   Parmi ces 15 groupes, il y a trois groupes de deux crayons rouges (R1R2, R1R3, R2R3).
   Donc, la probabilité que Jacob retire 2 crayons rouges est de $\dfrac{3}{15}$ ou $\dfrac{1}{5}$.

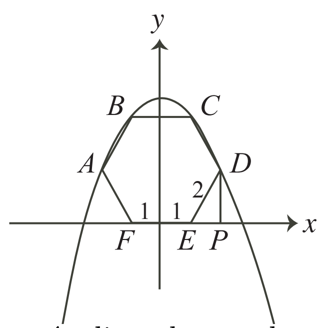
   Solution 3
   On retire les deux crayons l'un après l'autre. Afin que les deux soient rouges, le premier crayon retiré doit être rouge et le deuxième crayon retiré doit aussi être rouge.
   Lorsqu'on retire le premier crayon, la probabilité qu'il soit rouge est de $\frac{3}{6}$, car il y a un total de 6 crayons dont 3 sont rouges.
   Après qu'un crayon rouge ait été retiré, il ne reste plus que 5 crayons, dont 2 sont rouges.
   Ainsi, la probabilité que le deuxième crayon retiré soit rouge est de $\frac{2}{5}$.
   Donc, la probabilité que les deux soient rouges est de $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

   Réponse : $\frac{1}{5}$

4. Puisque $x^2-1=(x+1)(x-1)$, on peut proposer que $x=10^n$ d'où $10^{2n}-1=(10^n+1)(10^n-1)$. Donc,
$$a=\frac{10^{2n}-1}{3(10^n+1)}=\frac{(10^n+1)(10^n-1)}{3(10^n+1)}=\frac{10^n-1}{3}$$
car $10^n+1\neq 0$.
Puisque 10^n est un entier dont la première unité est un 1 suivie d'un nombre de 0 équivalent à n, alors 10^n-1 est l'entier qui contient n neufs (soit le nombre 9, n fois).
Ainsi, $a=\dfrac{10^n-1}{3}$ est l'entier qui contient n trois (soit le nombre 3, n fois) car chaque chiffre 9 de l'expression 10^n-1 peut être divisé par 3 pour obtenir 3 sans qu'il y ait de restes lors des étapes de la division.
Donc, la somme des chiffres de l'entier a est $3n$.
Étant donné que la somme des chiffres de a est 567, donc $3n=567$ d'où $n=189$.

Réponse : $n=189$

5. Si on fait subir une translation horizontale à la parabole et à l'hexagone, la distance entre les abscisses à l'origine de la parabole ne change pas.
Sachant cela, on peut changer l'emplacement de l'hexagone et de la parabole afin qu'elles soient mieux positionnées.
Donc, on change l'emplacement de l'hexagone et de la parabole de manière que l'axe des ordonnées passe par le point milieu du segment FE et de manière que l'hexagone et la parabole soient symétriques sur l'axe des ordonnées.
Puisque $FE=2$, donc le point milieu du segment FE est situé à une distance de 1 unité de F et de E.
Autrement dit, les coordonnées de F et de E sont respectivement $(-1,0)$ et $(1,0)$.
Ensuite, on relie le point D à l'axe des abscisses (l'axe des x) par le segment perpendiculaire DP.



Puisque $ABCDEF$ est un hexagone régulier, chacun de ses angles intérieurs a une mesure de 120° car la somme des angles intérieurs est $4\cdot 180°$ ou 720°. Donc la mesure de chaque angle est égale à $\frac{1}{6}\cdot 720°$, soit 120°.
Donc, $\angle DEP=180°-120°=60°$, ce qui veut dire que le triangle DEP est un triangle où les trois angles sont 30°, 60°, et 90°.
Puisque $DE=2$, donc $EP=1$ et $DP=\sqrt{3}$.
Puisque les coordonnées de E sont $(1,0)$, alors les coordonnées de D sont $(1+1,0+\sqrt{3})$ ou $(2,\sqrt{3})$.
De même, C est situé à une unité à la gauche du point D et à $\sqrt{3}$ unités au-dessus de ce dernier. Ce qui veut dire que les coordonnées de C sont $(1,2\sqrt{3})$. Ceci peut être expliqué par le fait qu'en réfléchissant le triangle EPD par la ligne horizontale qui passe par D, on peut dessiner un triangle rectangle dont l'hypoténuse est $CD=2$, dont les cathètes sont parallèles aux axes, et dont un angle a une mesure de 60°.
Puisque l'hexagone est symétrique sur l'axe des ordonnées, alors les coordonnées de A et de

B sont respectivement $(-2, \sqrt{3})$ et $(-1, 2\sqrt{3})$.
Soit $y = ax^2 + bx + c$ l'équation de la parabole.
Puisque les points $(-2, \sqrt{3})$, $(2, \sqrt{3})$ et $(1, 2\sqrt{3})$ sont situés sur la parabole, donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &= 4a - 2b + c \\ \sqrt{3} &= 4a + 2b + c \\ 2\sqrt{3} &= a + b + c \end{aligned}$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient $4b = 0$ d'où $b = 0$. (Chose qu'on aurait aussi pu prouver à l'aide de la symétrie.)
En reportant $b = 0$ dans les deuxième et troisième équations on obtient $4a + c = \sqrt{3}$ et $a + c = 2\sqrt{3}$. En soustrayant ces deux équations, on obtient $3a = -\sqrt{3}$ donc $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
En reportant $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ dans l'équation $a+c = 2\sqrt{3}$, on obtient $c = 2\sqrt{3}-a = 2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.
Donc, l'équation de la parabole est $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{7\sqrt{3}}{3}$.
Afin d'obtenir les abscisses à l'origine de la parabole, on pose $y = 0$ dans l'équation, d'où $0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{7\sqrt{3}}{3}$ ou $x^2 = 7$ donc $x = \pm\sqrt{7}$.
Donc, la parabole coupe l'axe des abscisses aux points $(-\sqrt{7}, 0)$ et $(\sqrt{7}, 0)$.
La distance entre ces deux points est de $\sqrt{7} - (-\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$.

Réponse : $2\sqrt{7}$

6. *Solution 1*
Lorsque $0° < A < 90°$ et que $0° < B < 90°$, on sait que $\tan A$ et $\tan B$ sont définis lorsque $\tan A > 0$ et $\tan B > 0$.
Pour tout nombre réel, x et y, on sait que $(x-y)^2 \geq 0$ et qu'une égalité se produit uniquement lorsque $x = y$.
On récrit l'équation sous la forme $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ d'où $x^2 + y^2 \geq 2xy$ où une égalité se produit uniquement lorsque $x = y$.
Lorsqu'on pose $x = 2$ et $y = \tan A$ dans l'équation, on obtient $4 + \tan^2 A \geq 2(2)(\tan A)$.
Donc, $4 + \tan^2 A \geq 4 \tan A$ et où une égalité se produit uniquement lorsque $\tan A = 2$.
Lorsqu'on pose $x = \sqrt{5}$ et $y = \tan B$ dans l'équation, on obtient $5 + \tan^2 B \geq 2(\sqrt{5})(\tan B)$.
Donc, $5 + \tan^2 B \geq 2\sqrt{5} \tan B$ et où une égalité se produit uniquement lorsque $\tan B = \sqrt{5}$.
Puisque $4 + \tan^2 A \geq 4 \tan A$ et $5 + \tan^2 B \geq 2\sqrt{5} \tan B$, alors

$$(4 + \tan^2 A)(5 + \tan^2 B) \geq (4 \tan A)(2\sqrt{5} \tan B)$$

puisque toutes les quantités sont positives.
Pour qu'il y ait égalité dans cette inéquation, une égalité doit se produire dans les deux composantes de l'inéquation (Si une inéquation est véritablement ">", le produit est alors ">".) Autrement dit, $(4 + \tan^2 A)(5 + \tan^2 B) = (4 \tan A)(2\sqrt{5} \tan B)$ uniquement lorsque $\tan A = 2$ et $\tan B = \sqrt{5}$.
On remarque que

$$(4 \tan A)(2\sqrt{5} \tan B) = 8\sqrt{5} \tan A \tan B = \sqrt{64 \cdot 5} \tan A \tan B = \sqrt{320} \tan A \tan B$$

Donc, $(4 + \tan^2 A)(5 + \tan^2 B) = \sqrt{320} \tan A \tan B$ uniquement lorsque $\tan A = 2$ et $\tan B = \sqrt{5}$.

Il faut maintenant déterminer la valeur de $\cos A \sin B$.
Puisque $0° < A < 90°$ et $0° < B < 90°$, alors $\cos A, \sin A, \cos B$ et $\sin B$ sont tous positifs.

Lorsque $\tan A = 2$, on obtient $\dfrac{\sin A}{\cos A} = 2$ donc $\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A} = 2$ d'où $1 - \cos^2 A = 4\cos^2 A$ ou $5\cos^2 A = 1$.
Puisque $\cos A > 0$, alors $\cos A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
Lorsque $\tan B = \sqrt{5}$, on obtient $\dfrac{\sin B}{\cos B} = \sqrt{5}$, donc $\dfrac{\sin B}{\sqrt{1-\sin^2 B}} = \sqrt{5}$.
D'où $\sin^2 B = 5 - 5\sin^2 B$ ou $6\sin^2 B = 5$.
Puisque $\sin B > 0$, donc $\sin B = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.
Finalement, on obtient $\cos A \sin B = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Solution 2
Soient $X = \tan A$ et $Y = \tan B$.
On développe l'équation comme suit :

$$\begin{aligned}
(4+X^2)(5+Y^2) &= \sqrt{320}XY \\
X^2Y^2 + 5X^2 + 4Y^2 + 20 &= 8\sqrt{5}XY \\
X^2Y^2 - 8\sqrt{5}XY + 5X^2 + 4Y^2 + 20 &= 0 \\
X^2Y^2 - 2(2\sqrt{5})XY + 20 + 5X^2 + 4Y^2 - 4\sqrt{5}XY &= 0 \\
X^2Y^2 - 2(2\sqrt{5})XY + (2\sqrt{5})^2 + 5X^2 + 4Y^2 - 4\sqrt{5}XY &= 0 \\
(XY - 2\sqrt{5})^2 + 5X^2 - 4\sqrt{5}XY + 4Y^2 &= 0 \\
(XY - 2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5}X)^2 - 2(\sqrt{5}X)(2Y) + (2Y)^2 &= 0 \\
(XY - 2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5}X - 2Y)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Pour que la somme des carrés soit égale à 0, chaque partie doit être égale à 0.
Donc, $XY = 2\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}X = 2Y$.
De la première équation, $X(2Y) = 4\sqrt{5}$ donc $X(\sqrt{5}X) = 4\sqrt{5}$ d'où $X^2 = 4$ ou $X = \pm 2$.
Puisque $0^\circ < A < 90^\circ$, alors $X = \tan A > 0$, donc $X = \tan A = 2$.
Puisque $2Y = \sqrt{5}X$, donc $Y = \tan B = \sqrt{5}$.
À partir de ce point-ci, on peut procéder de la même manière que dans la Solution 1 afin d'obtenir $\cos A \sin B = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Réponse : $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

Partie B

1. (a) Afin de déterminer l'abscisse à l'origine de la droite définie par l'équation $y = 3x + 6$, on pose $y = 0$ dans l'équation : $3x + 6 = 0$, donc $3x = -6$ d'où $x = -2$.
Donc l'abscisse à l'origine est -2.

(b) *Solution 1*
À l'aide de l'équation $y = 3x + 6$, on peut déterminer l'équation de la droite qui est symétrique par rapport à l'axe des y en inversant le signe de la pente et en utilisant la même ordonnée à l'origine. On obtient donc $y = -3x + 6$.

Solution 2
La droite définie par l'équation $y = 3x + 6$ a une abscisse à l'origine de -2 (de (a)) et une ordonnée à l'origine de 6 (à partir de l'équation de la droite).
Puisque la lettre A est symétrique par rapport à l'axe des y, le côté droit de la lettre A se trouve le long de la droite qui a une abscisse à l'origine de 2 (c'est-à-dire, $-(-2)$) et une ordonnée à l'origine de 6.
L'équation de la droite prend ainsi la forme $y = mx + 6$ pour une valeur de m.
Puisque le point (2,0) est situé sur la droite, alors $0 = 2m + 6$, donc $2m = -6$ ou $m = -3$.
Ainsi, l'équation de cette droite est $y = -3x + 6$.

(c) Puisque les abscisses à l'origine des droites qui représentent les côtés gauche et droit sont respectivement -2 et 2, donc la longueur de la base du triangle est $2 - (-2) = 4$.
Puisque les deux droites se coupent en (0,6), le triangle a une hauteur de 6.
Donc, le triangle a une aire de $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$.

(d) *Solution 1*
On remarque que $c < 6$.
Puisque le sommet supérieur du triangle ombré est situé à $y = 6$ et que la base du triangle est située le long de la droite $y = c$, alors le triangle ombré a une hauteur de $6 - c$.
Le sommet inférieur droit du triangle ombré est situé au point où se coupent les deux droites définies par les équations $y = -3x + 6$ et $y = c$.
À ce point précis, $c = -3x + 6$, donc $3x = 6 - c$ d'où $x = \dfrac{6-c}{3}$.
À l'aide du raisonnement symétrique, le sommet inférieur gauche a pour abscisse $-\dfrac{6-c}{3}$.
Donc, le triangle ombré a une longueur de base de $\dfrac{6-c}{3} - \left(-\dfrac{6-c}{3}\right) = \dfrac{2(6-c)}{3}$.
Puisque le triangle ombré a une aire de $\dfrac{4}{9}$ de l'aire totale de la région au dessus de l'axe des x et entre les côtés gauche et droit, alors le triangle ombré a une aire de $\dfrac{4}{9} \cdot 12 = \dfrac{16}{3}$.
On rassemble nos informations, et on utilise l'aire obtenue dans la partie (c), afin d'écrire :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \frac{2(6-c)}{3} \cdot (6-c) &= \frac{16}{3} \\
\frac{1}{3}(6-c)^2 &= \frac{16}{3} \\
(6-c)^2 &= 16 \\
6-c &= \pm 4
\end{aligned}
$$

Puisque $c < 6$, alors $6 - c > 0$, donc $6 - c = 4$ d'où $c = 2$.

Solution 2

Puisque la base du triangle ombré est parallèle à la base du grand triangle, alors les angles de leurs bases doivent être équivalents, donc les triangles sont semblables.

Puisque l'aire du triangle ombré est $\frac{4}{9}$ de l'aire du grand triangle, alors les longueurs des côtés du triangle ombré sont $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ des longueurs des côtés correspondants du grand triangle.

De plus, la hauteur du triangle ombré est $\frac{2}{3}$ de celle du grand triangle.

Puisque le grand triangle a une hauteur de 6, la hauteur du triangle ombré doit être $\frac{2}{3} \cdot 6$, soit 4.

Puisque le sommet supérieur du triangle ombré est situé à $y = 6$ et que la base du triangle est située le long de la droite $y = c$, alors le triangle ombré a une hauteur de $6 - c$.

Donc, $6 - c = 4$ d'où $c = 2$.

2. (a) On récrit l'équation d'origine afin d'obtenir les équations équivalentes suivantes. On remarque d'ailleurs que $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \frac{1}{x} &= \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{x} \\ \frac{3}{12} - \frac{2}{12} &= \frac{1}{x} \\ \frac{1}{12} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

donc $x = 12$.

(b) On obtient les équations équivalentes suivantes en factorisant :

$$\begin{aligned} ab - b + a - 1 &= 4 \\ b(a-1) + (a-1) &= 4 \\ (a-1)(b+1) &= 4 \end{aligned}$$

Puisque a et b sont des entiers, il s'ensuit que $a - 1$ et $b + 1$ soient aussi des entiers. Donc, $b + 1$ et $a - 1$ sont un couple de diviseurs de 4.

Puisque $b \geq 1$, donc $b + 1 \geq 2$.

Puisque $b + 1 > 0$ et que $4 > 0$ et que $(a-1)(b+1) = 4$, donc $a - 1 > 0$.

Ceci indique que $b+1$ et $a-1$ doivent être un couple de diviseurs posifits de 4 où $b+1 \geq 2$.

Il y a donc deux possibilités :

- $b + 1 = 2$ et $a - 1 = 2$; d'où $(a,b) = (3, 1)$.
- $b + 1 = 4$ et $a - 1 = 1$; d'où $(a,b) = (2, 3)$.

Finalement, les couples d'entiers positifs qui résolvent l'équation sont $(3, 1)$ et $(2,3)$.

(c) Puisque $y \neq 0$ et $z \neq 0$, on multiplie l'équation par $12yz$ et on la récrit afin d'obtenir les équations équivalents suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{1}{12} \\ 12z - 12y &= yz \\ 0 &= yz + 12y - 12z \\ 0 &= y(z+12) - 12z \\ -144 &= y(z+12) - 12z - 144 \\ -144 &= y(z+12) - 12(z+12) \\ -144 &= (y-12)(z+12) \end{aligned}$$

Puisque y et z sont des entiers, alors $y - 12$ et $z + 12$ sont aussi des entiers.
Puisque $z > 0$, donc $z + 12 > 0$.
Puisque $-144 < 0$ et que $z + 12 > 0$ et que $(y - 12)(z + 12) = -144$, donc $y - 12 < 0$.
Puisque y est un entier positif, donc $1 \leq y \leq 11$, d'où $y - 12 > -12$.
Puisque $(y - 12)(z + 12) = -144$ et $y - 12 < 0$, donc $y - 12$ et $z + 12$ sont un couple de diviseurs de -144 où $-12 < y - 12 < 0$.
On dresse un tableau afin de déterminer les valeurs possibles :

$y - 12$	$z + 12$	y	z
-1	144	11	132
-2	72	10	60
-3	48	9	36
-4	36	8	24
-6	24	6	12
-8	18	4	6
-9	16	3	4

Donc, il y a 7 couples d'entiers positifs (y,z) lorsque $\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{12}$:

$$(y,z) = (11, 132), (10, 60), (9, 36), (8, 24), (6, 12), (4, 6), (3, 4)$$

(d) Puisque $r \neq 0$ et que $s \neq 0$ et que $p \geq 2$, on multiplie l'équation par p^2rs et on la récrit afin d'obtenir les équations équivalents suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} - \frac{1}{s} &= \frac{1}{p^2} \\ p^2s - p^2r &= rs \\ 0 &= rs + p^2r - p^2s \\ 0 &= r(s + p^2) - p^2s \\ -p^4 &= r(s + p^2) - p^2s - p^4 \\ -p^4 &= r(s + p^2) - p^2(s + p^2) \\ -p^4 &= (r - p^2)(s + p^2) \end{aligned}$$

Puisque r et s sont des entiers, donc $r - p^2$ et $s + p^2$ sont aussi des entiers.
Puisque $s > 0$, donc $s + p^2 > 0$.

Puisque $-p^4 < 0$ et que $s + p^2 > 0$ et que $(r - p^2)(s + p^2) = -p^4$, donc $r - p^2 < 0$.
Puisque r est un entier positif, donc $1 \leq r < p^2$.
Puisque $(r - p^2)(s + p^2) = -p^4$ et que $r - p^2 < 0$, donc $r - p^2$ et $s + p^2$ sont un couple de diviseurs de $-p^4$ où $-p^2 < r - p^2 < 0$.
On considère les possibilités que $r - p^2 = -1$ et que $r - p^2 = -p$.
Ces cas mèneraient respectivement à $s + p^2 = p^4$ et à $s + p^2 = p^3$.
Dont on obtient les couples $(r, s) = (p^2 - 1, p^4 - p^2)$ et $(r, s) = (p^2 - p, p^3 - p^2)$.
Puisque p est un nombre premier, donc $p \geq 2$. Ceci indique que les couples sont différents l'un de l'autre et que chacune des composantes des couples est un entier positif.
Donc, il y a au moins deux couples d'entiers positifs, (r,s), pour lesquels $\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{p^2}$.

3. (a) Il existe deux manières dont AB et BA puissent paraître comme sous-mots : soit ils peuvent paraître chevauchés sous la forme ABA ou sous la forme BAB, soit ils peuvent paraître indépendamment l'un de l'autre.
S'ils ne se chevauchent pas, ils doivent donc paraître de la forme $ABBA$ ou de la forme $BAAB$. Puisque les mots doivent comprendre 4 lettres, il n'y a aucune autre possibilité.
Dans un mot de longueur 4, le sous-mot ABA peut paraître soit en première ou en deuxième position, d'où les possibilités suivantes :

$$ABAA \quad ABAB \quad ABAC \quad AABA \quad BABA \quad CABA$$

Dans un mot de longueur 4, le sous-mot BAB peut paraître soit en première ou en deuxième position, d'où les possibilités suivantes :

$$BABA \quad BABB \quad BABC \quad ABAB \quad BBAB \quad CBAB$$

En supprimant les mots répétés, on obtient la liste suivante :

$$ABBA \quad BAAB \quad ABAA \quad ABAB \quad ABAC \quad AABA$$

$$BABA \quad CABA \quad BABB \quad BABC \quad BBAB \quad CBAB$$

(Donc, il y a 12 mots de longueur 4 qui peuvent être formés avec les lettres de l'ensemble $\{A,B,C\}$ et pour lesquels AB et BA sont des sous-mots.)

(b) *Solution 1*
Puisqu'il n'y a que 3 lettres parmi lesquelles choisir (les lettres de l'ensemble $\{A,B,C\}$), donc il n'y a que $3^7 = 2187$ mots de longueur 7 qui puissent exister sans condition.
On détermine le nombre de mots de longueur 7 pour lesquels CC *n'est pas* un sous-mot et on le soustrait du nombre total de mots de longueur 7, soit 2187, afin d'obtenir la réponse.
Soit t_n le nombre de mots de longueur n qui ne comprennent pas le sous-mot CC et qui sont composés des lettres de l'ensemble $\{A,B,C\}$.
Soit a_n le nombre de mots de longueur n qui ne comprennent pas le sous-mot CC, qui sont composés des lettres de l'ensemble $\{A,B,C\}$, et dont la n-ième lettre (c.-à-d. la lettre du bout) est A.
Soit b_n le nombre de mots de longueur n qui ne comprennent pas le sous-mot CC, qui sont composés des lettres de l'ensemble $\{A,B,C\}$, et dont la n-ième lettre (c.-à-d. la lettre du bout) est B.
Soit c_n le nombre de mots de longueur n qui ne comprennent pas le sous-mot CC, qui sont composés des lettres de l'ensemble $\{A,B,C\}$, et dont la n-ième lettre (c.-à-d. la lettre du bout) est C.

On remarque que $t_n = a_n + b_n + c_n$ puisque tous les mots se termineront en A, en B ou en C.
De plus, $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ (les mots A, B et C), ce qui indique que $t_1 = 1 + 1 + 1 = 3$.
Soit $n \geq 2$.
Considèrons un mot de longueur n qui se termine en A et qui ne comprend pas CC. L'avant-dernière lettre peut être A, B ou C. Ceci indique que les premières lettres $n-1$ sont des mots de longueur $n-1$ qui se terminent en A, en B ou en C, donc $a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$.
Considèrons un mot de longueur n qui se termine en B et qui ne comprend pas CC. L'avant-dernière lettre peut être A, B ou C. Ceci indique que les premières lettres $n-1$ sont des mots de longueur $n-1$ qui se terminent en A, en B ou en C, donc $b_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$.
Considèrons un mot de longueur n qui se termine en C et qui ne comprend pas CC. L'avant-dernière lettre peut être soit A ou B. (Afin que le sous-mot CC ne paraisse pas, elle ne peut être C.) Ceci indique que les premières lettres $n-1$ sont des mots de longueur $n-1$ qui se terminent en soit A ou B, donc $c_n = a_{n-1} + b_{n-1}$.
Donc,

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + b_1 + c_1 = 1 + 1 + 1 = 3\\ b_2 &= a_1 + b_1 + c_1 = 1 + 1 + 1 = 3\\ c_2 &= a_1 + b_1 = 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}a_3 &= a_2 + b_2 + c_2 = 3 + 3 + 2 = 8\\ b_3 &= a_2 + b_2 + c_2 = 3 + 3 + 2 = 8\\ c_3 &= a_2 + b_2 = 3 + 3 = 6\end{aligned}$$

En continuant ainsi, on peut dresser un tableau :

n	a_n	b_n	c_n
1	1	1	1
2	3	3	2
3	8	8	6
4	22	22	16
5	60	60	44
6	164	164	120
7	448	448	328

Donc, $t_7 = a_7 + b_7 + c_7 = 448 + 448 + 328 = 1224$.
Enfin, il y a un nombre total de $2187 - 1224 = 963$ mots de longueur 7 qui comprennent le sous-mot CC.

Solution 2
Puisqu'il n'y a que 3 lettres parmi lesquelles choisir (les lettres de l'ensemble $\{A,B,C\}$), donc il n'y a que $3^7 = 2187$ mots de longueur 7 qui puissent exister sans condition.
On détermine le nombre de mots de longueur 7 pour lesquels CC *n'est pas* un sous-mot et on le soustrait du nombre total de mots de longueur 7, soit 2187, afin d'obtenir la réponse.
Un mot de longueur 7 qui ne comprend pas le sous-mot CC peut contenir de 0 à 4 lettres C. (Si le mot de longueur 7 contient 5 lettres C ou plus, deux des lettres C vont devoir être adjacentes l'une à l'autre.)

1$^{\text{er}}$ cas : aucune lettre C
Pour chacune des 7 lettres, il n'y a que deux choix, soit A ou B. Dans ce cas il y a $2^7 = 128$ mots.

2$^{\text{e}}$ cas : une lettre C
Il y a 7 places où peut aller la lettre C et 2 choix de lettres pour chacune des 6 lettres restantes.
Dans ce cas il y a $7 \cdot 2^6 = 448$ mots.

3$^{\text{e}}$ cas : deux lettres C
Il y a 15 couples de positions où peuvent aller deux lettres C sans qu'elles ne soient adjacentes l'une à l'autre :

$$(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7)$$

$$(3,5),(3,6),(3,7),(4,6),(4,7),(5,7)$$

(Par exemple, on utilise la notation “$(1,3)$” afin d'indiquer qu'une lettre C se trouve en première position tandis que l'autre se trouve en troisième position.) Pour déterminer ces couples, on commence par le couple $(1,3)$ et on déplace la deuxième lettre C de position en position jusqu'à ce qu'elle arrive au bout. On recommence à nouveau avec le couple $(2,4)$, et ainsi de suite.
Il y a 2 choix de lettres pour chacune des 5 lettres restantes.
Dans ce cas il y a $15 \cdot 2^5 = 480$ mots.

4$^{\text{e}}$ cas : trois lettres C
Il y a 10 triplets de positions où peuvent aller trois lettres C sans qu'elles ne soient adjacentes les unes aux autres :

$$(1,3,5),(1,3,6),(1,3,7),(1,4,6),(1,4,7),(1,5,7)$$

$$(2,4,6),(2,4,7),(2,5,7),(3,5,7)$$

Pour déterminer ces triplets, on commence par le triplet $(1,3,5)$ et on déplace la troisième lettre C de position en position jusqu'à ce qu'elle arrive au bout. On recommence à nouveau avec le triplet $(1,4,6)$, et ainsi de suite. On finira aussi par déplacer la première lettre C aux positions 2 et 3 lors de ces manoeuvres.
Il y a 2 choix de lettres pour chacune des 4 lettres restantes.
Dans ce cas il y a $10 \cdot 2^4 = 160$ mots.

5$^{\text{e}}$ cas : quatre lettres C
Afin qu'elles ne soient pas adjacentes les unes aux autres, les lettres C doivent aller dans les positions $(1,3,5,7)$.
Il y a 2 choix de lettres pour chacune des 3 lettres restantes.
Dans ce cas il y a $1 \cdot 2^3 = 8$ mots.

On fait la somme des mots des 5 cas afin de déterminer le nombre de mots qui ne comprennent pas le sous-mot CC : $128 + 448 + 480 + 160 + 8 = 1224$.
Enfin, il y a un nombre total de $2187 - 1224 = 963$ mots de longueur 7 qui comprennent le sous-mot CC.

(c) On calcule $f(2097)$.
Examinons la première parution du sous-mot CC dans les mots comprit par $f(2097)$.
En commençant par la gauche, cette première parution peut se produire dans n'importe laquelle des positions suivantes : $1,2,3,\ldots,2096$. (Par contre, elle ne peut pas commencer

en dernière position.)

Soit k un nombre entièr où $1 \leq k \leq 2096$.
On détermine le nombre de mots comprit par $f(2097)$ où la première parution de CC se produirait à la position k.
Dans un tel mot, les positions k et $k+1$ seraient le sous-mot CC.
Il y aurait donc $k-1$ positions à gauche du sous-mot CC et $2097-(k+1)=2096-k$ positions à sa droite.
Étant donné les conditions des mots comprit par $f(n)$, il n'y a pas de restrictions sur les lettres dans les $2096-k$ positions à la droite du sous-mot CC.
Ainsi, il y a 3 choix de lettres pour chacune de ces positions et, donc, 3^{2096-k} façons de remplir ces $2096-k$ positions.
Pour les $k-1$ positions à gauche du sous-mot CC, il y a deux conditions : ni AB ni BA ne peuvent y paraître (des conditions énoncés dans la question) et le sous-mot CC ne peut pas y paraître non plus (puisque le sous-mot CC aux positions k et $k+1$ est la première parution du sous-mot).
Puisque la position de k est occupée par la lettre C, donc la position $k-1$ ne peut pas être occupée par la lettre C et doit ainsi être occupée soit par un A ou soit par un B. Ainsi, il y a 2 choix de lettres pour la position $k-1$.
Si la position $k-1$ était occupée par la lettre A, alors la position $k-2$ pourrait être occupée par un A ou un C, mais pas un B (car ceci créerait le sous-mot BA). Dans ce cas, il y aurait 2 choix de lettres pour la position $k-2$.
Si la position $k-1$ était occupée par la lettre B, alors la position $k-2$ pourrait être occupée par un B ou un C, mais pas un A (car ceci créerait le sous-mot AB). Dans ce cas, il y aurait 2 choix de lettres pour la position $k-2$.
En général, si l'on considère la lettre à la position j, j étant une valeur telle que $2 \leq j \leq k$, alors

- si la position j est occupée par la lettre A, alors la position $j-1$ doit être soit un A ou un C,
- si la position j est occupée par la lettre B, alors la position $j-1$ doit être soit un B ou un C et
- si la position j est occupée par la lettre C, alors la position $j-1$ doit être soit un A ou un B.

En d'autres mots, il existe 2 choix de lettres pour chacune des positions à partir de la position $k-1$ jusqu'à la position 1. Il y a donc un total de 2^{k-1} choix pour cette étendue.
On remarque que cette formule est valable lorsque $k=1$ car ceci donne "1 choix" pour les positions précédantes (qui sont inexistantes). Ainsi, ceci n'aura aucun effet sur la formule qui suit.
Donc, il y a $2^{k-1}3^{2096-k}$ mots qui remplissent les conditions et où la première parution du sous-mot CC se produit à la position k.

On additionne de $k = 1$ à $k = 2096$ afin d'obtenir :

$$\begin{aligned}
f(2097) &= 2^0 3^{2095} + 2^1 3^{2094} + 2^2 3^{2093} + \cdots + 2^{2093} 3^2 + 2^{2094} 3^1 + 2^{2095} 3^0 \\
&= 3^{2095}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \cdots + \frac{2^{2093}}{3^{2093}} + \frac{2^{2094}}{3^{2094}} + \frac{2^{2095}}{3^{2095}}\right) \\
&= 3^{2095}\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2093} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2094} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2095}\right) \\
&= 3^{2095}\left(\frac{1\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2096}\right)}{1 - \frac{2}{3}}\right) \\
&= 3^{2095}\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2096}}{\frac{1}{3}}\right) \\
&= 3^{2096}\left(1 - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{2096}\right) \\
&= 3^{2096} - 2^{2096}
\end{aligned}$$

On montre que $f(2097) = 3^{2096} - 2^{2096}$ est divisible par 97 à l'aide de :

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + x^2y^{n-3} + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

x et y étant des valeurs réelles. On pose $x = 3^8$, $y = 2^8$ et $n = 262$ dans l'équation :

$$\begin{aligned}
f(2097) &= (3^8)^{262} - (2^8)^{262} \\
&= x^{262} - y^{262} \\
&= (x - y)(x^{261} + x^{260}y + \cdots + xy^{260} + y^{261}) \\
&= (3^8 - 2^8)((3^8)^{261} + (3^8)^{260}2^8 + \cdots + 3^8(2^8)^{260} + (2^8)^{261}) \\
&= (3^4 + 2^4)(3^4 - 2^4)((3^8)^{261} + (3^8)^{260}2^8 + \cdots + 3^8(2^8)^{260} + (2^8)^{261})
\end{aligned}$$

On factorise une différence de carrés dans la dernière étape.
Puisque $3^4 + 2^4 = 81 + 16 = 97$ et que les deux facteurs restants sont des entiers, donc $f(2097)$ est un multiple de 97.