Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mercredi 21 novembre 2018
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 22 novembre 2018
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

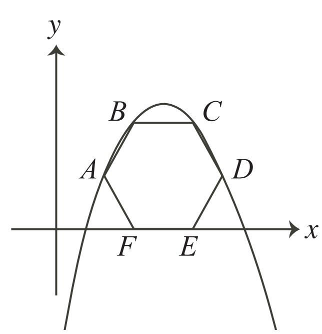
Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Paul a 6 boîtes, chacune contenant 12 plateaux. Paul a aussi 4 plateaux supplémentaires. Si chaque plateau peut contenir 8 pommes, quel est le plus grand nombre de pommes que peuvent contenir les 6 boîtes et 4 plateaux supplémentaires ?
2. Un lapin, une mouffette et une tortue font une course.
   La mouffette finit la course en 6 minutes.
   Le lapin court 3 fois plus vite que la mouffette.
   Le lapin court 5 fois plus vite que la tortue.
   En combien de temps est-ce que la tortue termine la course ?
3. Un pot contient 6 crayons parmi lesquels 3 sont rouges, 2 sont bleus et 1 est vert. Jacob retire au hasard deux des crayons. Quelle est la probabilité que ces deux crayons soient rouges ?
4. Suppose que n soit un entier strictement positif et que a soit l'entier égal à $\dfrac{10^{2n} - 1}{3(10^n + 1)}$.
   Si la somme des chiffres de a est 567, quelle est la valeur de n ?
5. Dans la figure, $ABCDEF$ est un hexagone régulier de côté de longueur 2. Les points E et F sont sur l'axe des x et les points A, B, C et D se trouvent sur une parabole. Quelle est la distance entre les deux points où la parabole coupe l'axe des x ?



6. Supposons que $0° < A < 90°$, que $0° < B < 90°$ et que

$$(4 + \tan^2 A)(5 + \tan^2 B) = \sqrt{320} \tan A \tan B$$

Déterminer toutes les valeurs possibles de $\cos A \sin B$.

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Alexandra dessine la lettre A se tenant sur l'axe des x.
   (a) Le côté gauche de la lettre A se trouve sur la droite dont l'équation est $y = 3x+6$. Quelle est l'abscisse à l'origine de la droite définie par l'équation $y = 3x + 6$?
   (b) Le côté droit de la lettre A se trouve sur la droite L_2 et la lettre est symétrique par rapport à l'axe des y. Quelle est l'équation de la droite L_2 ?
   (c) Déterminer l'aire du triangle formé par l'axe des x et les côtés gauche et droit de la lettre A.
   (d) Alexandra termine la lettre A en ajoutant à la figure 1. Elle dessine la barre horizontale de la lettre A le long de la ligne $y = c$, comme dans la figure 2. L'aire de la région ombrée à l'intérieur de la lettre A et au dessus de la droite d'équation $y = c$ est $\frac{4}{9}$ de l'aire totale de la région au dessus de l'axe des x et entre les côtés gauche et droit. Déterminer la valeur de c.

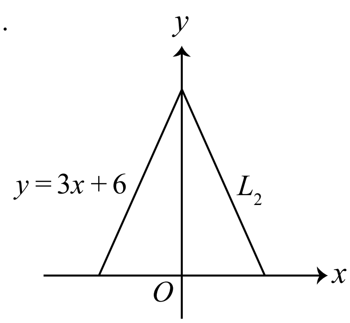


Figure 1

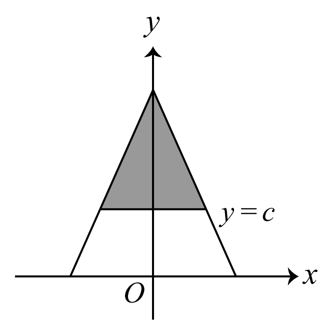


Figure 2

2. (a) Déterminer l'entier strictement positif x pour lequel $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6}$.
   (b) Déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs (a, b) pour lesquels $ab - b + a - 1 = 4$.
   (c) Déterminer le nombre de couples d'entiers strictement positifs (y, z) pour lesquels $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{12}$.
   (d) Prouver que, pour tout nombre premier p, il y a au moins deux couples (r, s) d'entiers strictement positifs pour lesquels $\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{p^2}$.

3. Un *mot de longueur* n est une suite de n lettres tirées d'un ensemble prédéterminé. Par exemple, $BCAAB$ est un mot de longueur 5 dont les lettres proviennent de l'ensemble $\{A, B, C\}$. Un *sous-mot* d'un mot donné est une suite de lettres qui se trouvent dans ce mot en positions consécutives et dans le même ordre. Par exemple, le mot CA est un sous-mot de $BCAAB$ mais BA n'est pas un sous-mot de $BCAAB$.

   (a) Lister tous les mots de longueur 4 formés avec les lettres de l'ensemble $\{A, B, C\}$ pour lesquels les mots AB et BA sont des sous-mots. (Par exemple, le mot $ABAC$ devrait se trouver dans votre liste.)

   (b) Déterminer le nombre de mots de longueur 7 formés avec les lettres de l'ensemble $\{A, B, C\}$ et pour lesquels CC est un sous-mot.

   (c) Soit $f(n)$ le nombre de mots de longueur n dont les lettres proviennent de l'ensemble $\{A, B, C\}$ et pour lesquels
   - CC est un sous-mot et
   - si AB ou BA est un sous-mot alors le sous-mot CC se trouve à sa gauche.

   (Par exemple, quand $n = 6$, les mots $CCAABC$, $ACCBBB$ et $CCABCC$ satisfont à ces exigences, mais les mots $BACCAB$, $ACBBAB$ et $ACBCAC$ ne les satisfont pas.) Prouver que $f(2097)$ est un multiple de 97.