Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2018

le mercredi 21 novembre 2018

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 22 novembre 2018

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Puisque la somme des angles de tout triangle est de $180°$, alors

$$\begin{aligned} 60° + (5x)° + (3x)° &= 180° \\ 60 + 5x + 3x &= 180 \\ 8x &= 120 \end{aligned}$$

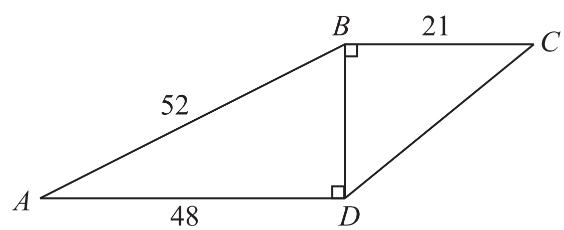
ainsi $x = 15$.

Réponse : $x = 15$

2. Puisque 10% des 500 animaux sont des poulets, donc $\frac{1}{10} \times 500 = 50$ des animaux sont des poulets.
Le restant des animaux, soit $500 - 50 = 450$, sont des chèvres et des vaches.
Puisqu'il y a deux fois plus de chèvres que de vaches, le nombre total de chèvres et de vaches doit être équivalent à trois fois le nombre de vaches.
Ainsi, il y a $\frac{1}{3} \times 450 = 150$ vaches.
(Puisqu'il y a 150 vaches, il y a donc $2 \times 150 = 300$ chèvres. En ajoutant le nombre de vaches et de chèvres au 50 poulets, on obtient $150 + 300 + 50 = 500$ animaux, comme attendu.)

Réponse : 150 vaches

3. Puisque les triangles ADB et CBD sont des triangles rectangles, on peut appliquer le théorème de Pythagore à chacun des deux triangles.



Ainsi, $AB^2 = AD^2 + BD^2$ ou $52^2 = 48^2 + BD^2$ donc $BD^2 = 52^2 - 48^2 = 2704 - 2304 = 400$.
Puisque $BD > 0$, donc $BD = \sqrt{400} = 20$.
De plus, $DC^2 = BD^2 + BC^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$.
Puisque $DC > 0$, donc $DC = \sqrt{841} = 29$.

Réponse : $DC = 29$

4. Soit x le nombre inscrit dans le coin inférieur droit du carré 8×8.
Puisqu'il y a 8 nombres dans la rangée inférieure de ce carré, on en déduit que le nombre dans le coin inférieur gauche est $x - 7$. (Les 8 nombres dans la rangée inférieure sont $x - 7$, $x - 6$, $x - 5$, $x - 4$, $x - 3$, $x - 2$, $x - 1$ et x.)
Dans le grand tableau, on constate que chaque nombre dans une rangée inférieure est 24 de plus que le nombre dans la rangée au dessus de lui.
Le nombre dans le coin inférieur droit du carré 8×8 se trouve sept rangées en dessous du nombre dans le coin supérieur droit.
Puisqu'il y a 24 nombres dans chaque rangée du grand tableau, chaque bond vertical (c.-à-d. en passant verticalement d'un nombre dans une rangée inférieure au nombre dans la rangée au dessus de lui) correspond à une diminution de 24.
Ceci veut dire que le nombre dans le coin supérieur droit est $7 \times 24 = 168$ de moins que le nombre dans le coin inférieur droit car il se trouve 7 rangées plus haut.
Puisque x est le nombre dans le coin inférieur droit, donc le nombre dans le coin supérieur

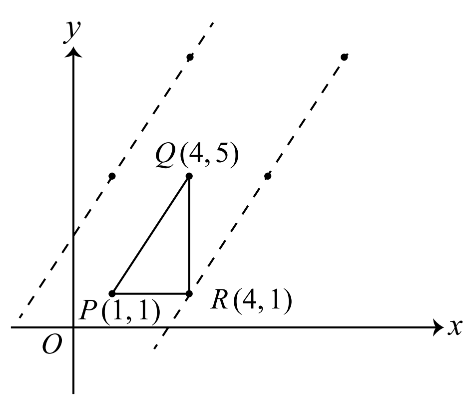
droit est $x - 168$.
En se déplaçant vers la gauche dans la première rangée du carré 8×8, on comprend que le nombre dans le coin supérieur gauche du carré est $(x - 168) - 7$ ou $x - 175$.
Puisque la somme des nombres dans les quatre coins du carré doit être 1646, alors

$$\begin{aligned} x + (x - 7) + (x - 168) + (x - 175) &= 1646 \\ 4x - 350 &= 1646 \\ 4x &= 1996 \\ x &= 499 \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre inscrit dans le coin inférieur droit du carré 8×8 est 499.
Afin de vérifier notre réponse, on commence par le nombre 499 du coin inférieur droit dans le but de construire un carré 8×8 qui ne s'étend pas au-delà du bord supérieur ou du bord gauche du tableau 24×24.
Puisque le nombre dans le coin inférieur droit du tableau est 576, alors les nombres le long de la colonne droite du tableau sont 576, 552, 528 et 504, ce qui veut dire qu'en nous déplaçant de droite à gauche le long de cette quatrième rangée du bas, on atteint le nombre 499 qui est le sixième nombre dans cette rangée.
Puisque le tableau est un tableau 24×24, on peut déduire que les bords du carré se trouvent bel et bien dans les paramètres du tableau.

Réponse : 499

5. Considèrons le point $R(4, 1)$.
Dans ce cas, la droite PR est horizontale, le droite RQ est verticale, et le triangle PQR est rectangle en R.
Puisque $PR = 4 - 1 = 3$ et $RQ = 5 - 1 = 4$, alors l'aire du triangle PQR est $\frac{1}{2} \times PR \times RQ$ ce qui équivaut à $\frac{1}{2} \times 3 \times 4$, soit 6.
Ainsi, le point $R(4, 1)$ permet au triangle PQR d'avoir une aire de 6.
Si un point X se trouve sur la droite qui est parallèle à PQ et qui passe par le point R, alors la distance perpendiculaire de X à la droite qui passe par PQ est égale à la distance perpendiculaire entre le point R et la droite PQ. Ceci veut dire que la hauteur du triangle PQX est égale à la hauteur du triangle PQR ; ce qui indique que ces triangles ont la même aire.



Autrement dit, le triangle PQX aura toujours une aire de 6 peu importe l'emplacement du point X, du moment qu'il soit situé sur la droite qui passe par le point R et qui est parallèle à PQ.
Pour passer du point P au point Q, on se déplace de 3 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut.

Ainsi, en commençant par le point $R(4, 1)$, on peut atteindre un autre point sur la droite qui passe par le point $R(4, 1)$ et qui est parallèle à PQ en faisant $(4 + 3, 1 + 4) = (7, 5)$ (car un déplacement de 3 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut tient compte de la pente de $\frac{4}{3}$.).
De même, le point $(7 + 3, 5 + 4) = (10, 9)$ se trouve aussi sur cette droite.
Autrement dit, le triangle qui a pour sommets $(1, 1)$, $(4, 5)$ et $(7, 5)$ et le triangle qui a pour sommets $(1, 1)$, $(4, 5)$ et $(10, 9)$ ont tous les deux une même aire de 6.
(Sinon, d'une manière plus formelle, on pourrait déterminer que l'équation de la droite qui passe par le point R et qui est parallèle à PQ est $y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$. On peut ensuite vérifier les abscisses possibles à valeurs entières des points sur cette droite (de 0 à 10) afin d'obtenir les points $(1, -3)$, $(4, 1)$, $(7, 5)$, $(10, 9)$. Il faut omettre le point $(1, -3)$ car -3 n'est pas situé dans l'image du contexte).

Considèrons le point $S(1, 5)$.
Encore une fois, l'aire du triangle PQS est 6 car la droite PS est verticale (dont la longueur est 4) et la droite QS est horizontale (dont la longueur est 3).
À partir du point $(1, 5)$, on peut atteindre le point $(4, 9)$ en nous déplaçant de 3 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut.

Puisque la question nous indique qu'il y a cinq points de ce type, on comprend maintenant qu'on a trouvé tous les points : $(4, 1)$, $(7, 5)$, $(10, 9)$, $(1, 5)$ et $(4, 9)$.
(On remarque que tout point T doit être situé le long d'une des deux droites pour que l'aire du triangle PQT soit 6 car T doit avoir une certaine distance perpendiculaire à la droite qui passe par PQ et doit être situé d'un côté ou de l'autre de cette droite. Comme ces deux lignes sont fixes, il n'y a en effet que cinq points qui seraient conformes à ces contraintes.)

Réponse : $(4, 1)$, $(7, 5)$, $(10, 9)$, $(1, 5)$ et $(4, 9)$

6. On sait que $1 \leq n \leq 20$ et que $1 \leq k \leq 20$.
Concentrons-nous sur les valeurs possibles de k.
Considèrons $k = 20$.
Puisqu'il y a 20 chaises, un déplacement de 20 chaises ramènerait chaque personne à leur siège de départ.
Par conséquent, toute configuration de personnes assises sur des chaises serait préservée par cette manoeuvre.
Autrement dit, lorsque $k = 20$, n peut être toute valeur de 1 à 20.
Ainsi, il y a 20 couples (n, k) lorsque $k = 20$.

Considèrons $k = 10$.
Dans ce cas, toute personne assise sur les chaises 1 à 10 se déplacerait aux chaises 11 à 20 tandis que toute personne assise sur les chaises 11 à 20 se déplacerait aux chaises 1 à 10.
Ceci veut dire que les deux moitiés (de 1 à 10 et de 11 à 20) doivent contenir le même nombre de personnes dans la même configuration. (C'est-à-dire que si les chaises 1, 3, 4 et 8 sont occupées, alors les chaises 11, 13, 14 et 18 seraient aussi occupées et vice versa.) Ceci indique que le nombre total de personnes assises sur une chaise est un nombre pair.
Il y a 10 possibilités pour le nombre de chaises occupées parmi les 10 premières chaises (de 1 à 10). Ainsi, il y a 10 possibilités pour le nombre total de chaises occupées (les nombres pairs de 2 à 20).
En d'autres mots, il y a 10 couples (n, k) lorsque $k = 10$.

Considèrons $k = 5$.
Dans ce cas, toute personne assise sur les chaises 1 à 5 se déplacerait aux chaises 6 à 10, toute personne assise sur les chaises 6 à 10 se déplacerait aux chaises 11 à 15, toute personne assise

sur les chaises 11 à 15 se déplacerait aux chaises 16 à 20, et toute personne assise sur les chaises 16 à 20 se déplacerait aux chaises 1 à 5.
Ceci veut dire que les quatre sections de 5 chaises chacune doivent contenir le même nombre de personnes assises dans la même configuration.
Cela indique que le nombre total de chaises occupées est un multiple de 4 et peut être 4, 8, 12, 16 ou 20 ; ce qui nous donne 5 valeurs possibles de n.
Autrement dit, il y a 5 couples (n, k) lorsque $k = 5$.

De la même manière, si l'on considère $k = 4$ et $k = 2$, on détermine qu'il y a respectivement 4 et 2 valeurs possibles de n.
Ainsi, il y a 4 couples (n,k) lorsque $k = 4$ (soit $(5, 4)$, $(10, 4)$, $(15, 4)$ et $(20,4)$) et 2 couples (n, k) lorsque $k = 2$ (soit $(10, 2)$ et $(20, 2)$).

Considèrons $k = 1$.
Dans ce cas, toute personne assise sur une chaise se déplacerait à la chaise à côté d'elle.
S'il y a une personne assise sur la chaise 1, elle se déplacerait à la chaise 2, ce qui veut dire qu'il a dû y avoir quelqu'un sur la chaise 2. Ce dernier se serait déplacé à la chaise 3, et ainsi de suite.
Suivant cette logique, on comprend que les 20 chaises devaient être occupées, donc $n = 20$ serait la seule possibilité.
Ainsi, il y a 1 couple (n, k) lorsque $k = 1$.

Considèrons $k = 3$, $k = 7$ et $k = 9$.
Dans chacun de ces cas, $n = 20$ est la seule possibilité.
Suivant la logique présentée ci-dessus dans le cas où $k = 1$, lorsque $k = 3$, la personne assise sur la chaise 1 se déplacerait à la chaise 4, tandis que la personne qui était assise sur la chaise 4 se serait déplacée à la chaise 7, et ainsi de suite :

$$1 \to 4 \to 7 \to 10 \to 13 \to 16 \to 19 \to 2 \to 5 \to 8 \to 11 \to 14$$

$$\to 17 \to 20 \to 3 \to 6 \to 9 \to 12 \to 15 \to 18 \to 1$$

Le cycle ne se termine que lorsque les 20 chaises sont prises en compte. Donc si une chaise est occupée, elles le seraient toutes.
Un cycle similaire peut être construit pour les cas $k = 7$ et $k = 9$. Dans chacun de ces cas, $n = 20$ serait la seule possibilité.

Considèrons $k = 6$.
Comme dans le cas précédent, on peut examiner le cycle des déplacements :

$$1 \to 7 \to 13 \to 19 \to 5 \to 11 \to 17 \to 3 \to 9 \to 15 \to 1$$

$$2 \to 8 \to 14 \to 20 \to 6 \to 12 \to 18 \to 4 \to 10 \to 16 \to 2$$

On remarque que l'on obtient toujours un des deux cycles même si l'on commence par une chaise autre que les chaises 1 ou 2. Autrement dit, les 20 chaises paraîtraient ici.
Ceci indique que tout ensemble de 10 chaises est composé de soit 10 chaises occupées ou de 10 chaises vides.
Ceci indique qu'il y a deux valeurs possibles de n, soit 10 ou 20.
Ainsi, il y a 2 couples (n, k) lorsque $k = 6$.

Considèrons $k = 8$.
Dans ce cas, il y a 4 cycles :

$$1 \to 9 \to 17 \to 5 \to 13 \to 1 \qquad 2 \to 10 \to 18 \to 6 \to 14 \to 2$$

$$3 \to 11 \to 19 \to 7 \to 15 \to 3 \qquad 4 \to 12 \to 20 \to 8 \to 16 \to 4$$

il y a ainsi 4 valeurs de n.
On remarque que l'on obtient toujours un des quatre cycles même si l'on commence par une chaise autre que les chaises 1, 2, 3 ou 4. Autrement dit, les 20 chaises paraîtraient ici.
Ainsi, il y a 4 couples (n, k) lorsque $k = 8$.

Finalement, considèrons $k = 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$.
On obtient le même résultat en déplaçant 11 chaises dans le sens des aiguilles d'une montre qu'en déplaçant 9 chaises dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Puisque les énoncés ci-dessus ne dépendent pas réellement de la direction, on comprend que le nombre de couples lorsque $k = 11$ doit ête égal au nombre de couples lorsque $k = 9$.
De la même manière, les nombres de couples lorsque $k = 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$ doivent être respectivement égaux aux nombres de couples lorsque $k = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$.
À partir de tout cela, on peut construire le tableau suivant :

Valeurs de k	Nombre de valeurs de n
20	20
10	10
5, 15	5
4, 8, 12, 16	4
2, 6, 14, 18	2
1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19	1

Au final, le nombre de couples (n, k) est $20 + 10 + 2 \times 5 + 4 \times 4 + 4 \times 2 + 8 \times 1 = 72$.

Réponse : 72

Partie B

1. (a) On arrange la liste en ordre croissant et on obtient $4, 6, 7, 9, 13$.
Ainsi, l'étendu de cette liste est $13 - 4 = 9$.

(b) En enlevant a de la liste, le plus petit nombre est 5 et le plus grand nombre est 13.
Puisque $13 - 5 = 8$ et que ceci est inférieur à l'étendue de 12, alors a doit être soit le plus petit nombre ou soit le plus grand nombre dans la liste.
Si a est le plus petit nombre dans la liste, logiquement 13 serait le plus grand nombre. Ainsi, pour qu'on ait une étendue de 12, il faut faire $13 - a = 12$ ce qui nous donne $a = 1$. On remarque que si $a = 1$, notre liste devient $1, 5, 10, 11$ et 13 ce qui est conforme à une étendue de 12.
Si a est le plus grand nombre dans la liste, logiquement 5 serait le plus petit nombre. Ainsi, pour qu'on ait une étendue de 12, il faut faire $a - 5 = 12$ ce qui nous donne $a = 17$. On remarque que si $a = 17$, notre liste devient $5, 10, 11, 13$ et 17 ce qui est conforme à une étendue de 12.
Ainsi, les deux valeurs possible de a sont 1 et 17.

(c) Puisque $x^2 \geq 0$, donc $6 \leq 6 + 2x^2$ et $6 + 2x^2 \leq 6 + 4x^2$ et $6 + 4x^2 \leq 6 + 5x^2$.
En d'autres mots, lorsqu'on arrange la liste de manière que chaque terme qui suit soit supérieur ou égal au terme qui le précède, on obtient

$$6, 6 + 2x^2, 6 + 4x^2, 6 + 5x^2$$

Puisque l'étendue de cette liste est de 80, alors $(6+5x^2)-6 = 80$ d'où $5x^2 = 80$ ou $x^2 = 16$, c'est-à-dire que $x = \pm 4$.

(d) Puisque $x > 0$ et $y > 0$, donc $0 < x + y$ et $x + y < 3x + y$ et $3x + y < 5x + 3y$.
En d'autres mots, lorsqu'on arrange la liste en ordre croissant, on obtient

$$0, x + y, 3x + y, 5x + 3y$$

Puisque l'étendue de cette liste est de 19, alors $(5x + 3y) - 0 = 19$ ou $5x + 3y = 19$.
Puisque x et y sont des entiers strictement positifs, il doit être vrai que $x = 2$ et que $y = 3$. (Pour expliquer l'absence d'autres solutions, puisque $y > 0$, alors $5x < 19$ ce qui veut dire que $x = 1$, $x = 2$ ou $x = 3$. On peut vérifier que lorsque $x = 1$ et $x = 3$, la valeur de y n'est pas un entier.)
Ainsi, $x = 2$ et $y = 3$.

2. (a) Puisqu'il y a 11 balles, il y a $11 \times 10 = 110$ façons pour Julio de retirer deux balles.
Puisqu'il y a 7 balles noires, il y a $7 \times 6 = 42$ façons pour Julio de retirer deux balles noires.
Donc, la probabilité que Julio retire deux balles noires est $\frac{42}{110}$, ce qui équivaut à $\frac{21}{55}$.

(b) Puisqu'il y a $g + 6$ balles, il y a $(g + 6)(g + 5)$ façons pour Julio de retirer deux balles.
Puisqu'il y a 6 balles noires, il y a $6 \times 5 = 30$ façons pour Julio de retirer deux balles noires.
Sachant que la probabilité de retirer deux balles noires est $\frac{1}{8}$, alors $\frac{30}{(g + 6)(g + 5)} = \frac{1}{8}$ donc $(g + 6)(g + 5) = 240$.
Par la méthode essai-erreur, on peut déterminer que $g = 10$.

Sinon, on pourrait aussi développer pour ensuite factoriser :

$$\begin{aligned}(g+6)(g+5) &= 240\\ g^2+11g+30 &= 240\\ g^2+11g-210 &= 0\\ (g+21)(g-10) &= 0\end{aligned}$$

alors $g=-21$ ou $g=10$.
Puisque $g>0$, donc $g=10$.

(c) Puisqu'il y a $3x$ balles, il y a $3x(3x-1)$ façons pour Julio de retirer deux balles.
Puisqu'il y a $2x$ balles noires, il y a $2x(2x-1)$ façons pour Julio de retirer deux balles noires.
Sachant que la probabilité de retirer deux balles noires est $\frac{7}{16}$, alors $\frac{2x(2x-1)}{3x(3x-1)}=\frac{7}{16}$.
Puisque $x\neq 0$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{2(2x-1)}{3(3x-1)} &= \frac{7}{16}\\ 32(2x-1) &= 21(3x-1)\\ 64x-32 &= 63x-21\\ x &= 11\end{aligned}$$

Donc $x=11$.

(d) Puisqu'il y a $r+28$ balles, il y a donc $(r+28)(r+27)(r+26)$ façons pour Julio de retirer trois balles.
Pour que Julio retire deux balles noires et une balle dorée, il pourrait piocher “noire, noire, dorée” ou “noire, dorée, noire” ou “dorée, noir, noir”.
Le nombre de façons par lesquelles la première possibilité pourrait se produire est $10\times 9\times 18$.
Le nombre de façons par lesquelles la deuxième possibilité pourrait se produire est $10\times 18\times 9$.
Le nombre de façons par lesquelles la troisième possibilité pourrait se produire est $18\times 10\times 9$.
Donc il y a $3\times 10\times 9\times 18$ façons dont Julio pourrait retirer deux balles noires et une balle dorée.
Étant donné que, parmi les trois balles retirées, la probabilité que deux soient noires et qu'une soit dorée est d'au moins $\frac{1}{3000}$, alors $\frac{3\times 10\times 9\times 18}{(r+28)(r+27)(r+26)}>\frac{1}{3000}$.
Puisque $3\times 10\times 9\times 18=4860$, l'inéquation équivaut à

$$\frac{4860}{(r+28)(r+27)(r+26)}>\frac{4860}{4860\times 3000}$$

Ceci est vrai lorsque $(r+28)(r+27)(r+26)<4860\times 3000=14\,580\,000$.
Au fur et à mesure que r augmente, $r+28$, $r+27$ et $r+26$ augmentent eux aussi et sont positifs. Ainsi le produit $(r+28)(r+27)(r+26)$ augmente lui aussi et est positif.
Il doit donc y avoir un nombre entier, r, où le produit est inférieur à $14\,580\,000$ et où la valeur entière suivante de r donnerait un produit supérieur à $14\,580\,000$. Le premier de ces nombres entiers sera la plus grande valeur de r pour lequel la probabilité sera d'au

moins $\dfrac{1}{3000}$.

On remarque que $\sqrt[3]{14\,580\,000} \approx 244$.

Puisque $r + 28$, $r + 27$ et $r + 26$ sont proches en taille, on commence notre recherche près de $r + 28 = 244$.

Lorsque $r = 216$, on obtient $(r + 28)(r + 27)(r + 26) = 14\,348\,664$.

Lorsque $r = 217$, on obtient $(r + 28)(r + 27)(r + 26) = 14\,526\,540$.

Lorsque $r = 218$, on obtient $(r + 28)(r + 27)(r + 26) = 14\,705\,880$.

Donc, $r = 217$ est la plus grande valeur de r pour laquelle la probabilité est d'au moins $\dfrac{1}{3000}$.

3. (a) Dans la Figure 1, $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$.

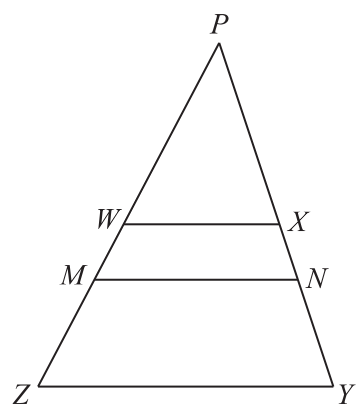
Puisque $EC = 3$ et $AE = x$, donc $AC = AE + EC = 3 + x$.

Ainsi, $\dfrac{x}{3 + x} = \dfrac{6}{10}$.

Alors, $10x = 6(3 + x)$ ou $10x = 18 + 6x$ donc $4x = 18$ d'où $x = \dfrac{9}{2}$.

(b) Puisque $\dfrac{WM}{MZ} = \dfrac{2}{3}$, donc $WM = 2r$ et $MZ = 3r$, r étant un nombre réel où $r > 0$.

On alonge ZW et YX de manière qu'elles se rencontrent au point P au-dessus de WX. (On peut faire ceci puisque $WX < ZY$ car $\dfrac{WX}{ZY} < 1$.)



On vient ainsi de créer une nouvelle configuration de la Figure 2.

Puisque WX est parallèle à ZY, alors le triangle PWX et le triangle PZY sont semblables, c'est-à-dire $\dfrac{PW}{PZ} = \dfrac{WX}{ZY}$.

Ayant déterminé toute cette information :

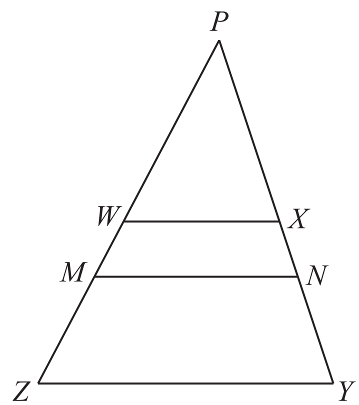
$$\begin{aligned}
\frac{PW}{PZ} &= \frac{WX}{ZY} \\
\frac{PW}{PW + WM + MZ} &= \frac{3}{4} \\
\frac{PW}{PW + 2r + 3r} &= \frac{3}{4} \\
4 \times PW &= 3(PW + 5r) \\
4 \times PW &= 3 \times PW + 15r \\
PW &= 15r
\end{aligned}$$

Puisque WX est parallèle à MN, alors le triangle PWX et le triangle PMN sont semblables, c'est-à-dire $\dfrac{PW}{PM} = \dfrac{WX}{MN}$.
Donc,

$$\frac{WX}{MN} = \frac{PW}{PW + WM} = \frac{15r}{15r + 2r} = \frac{15r}{17r}$$

d'où $\dfrac{WX}{MN} = \dfrac{15}{17}$.

(c) Puisque $\dfrac{WX}{ZY} = \dfrac{3}{4}$, donc $WX = 3k$ et $ZY = 4k$, k étant un nombre réel où $k > 0$.
On remarque que $WX = 3k$ et $ZY = 4k$ sont des entiers.
Puisque $k = ZY - WX$, donc k est un entier.
Puisque $\dfrac{MZ}{WM} = \dfrac{NY}{XN}$ et que ce rapport est un entier, on peut proposer que $\dfrac{MZ}{WM} = t$, t étant un entier positif quelconque.
Si $WM = p$, p étant un nombre réel quelconque où $p > 0$, donc $MZ = pt$.
Comme dans la partie (b), on alonge ZW et YX de manière qu'elles se rencontrent au point P au-dessus de WX.
On vient encore de créer une nouvelle configuration de la Figure 2.



Puisque WX est parallèle à ZY, alors le triangle PWX et le triangle PZY sont semblables, c'est-à-dire $\dfrac{PW}{PZ} = \dfrac{WX}{ZY}$.

Ayant déterminé toute cette information :

$$\begin{aligned}
\frac{PW}{PZ} &= \frac{WX}{ZY} \\
\frac{PW}{PW + WM + MZ} &= \frac{3}{4} \\
\frac{PW}{PW + p + pt} &= \frac{3}{4} \\
4 \times PW &= 3(PW + p(t+1)) \\
4 \times PW &= 3 \times PW + 3p(t+1) \\
PW &= 3p(t+1)
\end{aligned}$$

Puisque WX est parallèle à MN, alors le triangle PWX et le triangle PMN sont semblables, c'est-à-dire $\dfrac{PW}{PM} = \dfrac{WX}{MN}$.

Puisque $p \neq 0$, donc

$$\frac{WX}{MN} = \frac{PW}{PW + WM} = \frac{3p(t+1)}{3p(t+1)+p} = \frac{p(3t+3)}{p(3t+4)} = \frac{3t+3}{3t+4}$$

Puisque $WX = 3k$, donc $\dfrac{3k}{MN} = \dfrac{3t+3}{3t+4}$ d'où $MN = \dfrac{(3t+4)3k}{3t+3} = \dfrac{(3t+4)k}{t+1}$.

Ainsi $MN = \dfrac{(3t+4)k}{t+1} = \dfrac{3(t+1)k+k}{t+1} = 3k + \dfrac{k}{t+1}$.

Puisque MN et k sont tous les deux des entiers, alors $\dfrac{k}{t+1}$ est un entier, ce qui indique que l'entier k est un multiple de l'entier $t+1$; disons par exemple $k = q(t+1)$, q étant un entier positif quelconque.

Étant donné que $WX + MN + ZY = 2541$.

On reporte les équations ensembles afin d'obtenir :

$$\begin{aligned}
3k + \left(3k + \frac{k}{t+1}\right) + 4k &= 2541 \\
10k + \frac{k}{t+1} &= 2541 \\
10q(t+1) + q &= 2541 \\
q(10t + 10 + 1) &= 2541 \\
q(10t + 11) &= 2541
\end{aligned}$$

Donc q et t sont des entiers positifs.

Puisque $t \geq 1$, donc $10t + 11 \geq 21$. De plus, $10t + 11$ a un chiffre des unités de 1.

Ainsi q et $10t+11$ forment un couple de facteurs à entiers positifs dont le produit est 2541 et où chaque facteur a un chiffre des unités de 1. (Puisque 2541 et $10t+11$ ont des chiffres des unités de 1, donc q doit aussi avoir un chiffre des unités de 1.)

En factorisant 2541, on obtient

$$2541 = 3 \times 847 = 3 \times 7 \times 121 = 3 \times 7 \times 11^2$$

Les diviseurs positifs de 2541 sont

$$1, 3, 7, 11, 21, 33, 77, 121, 231, 363, 847, 2541$$

Les couples de diviseurs composés de deux entiers, chacun ayant un chiffre des unités de 1, sont :

$$2541 = 1 \times 2541 = 11 \times 231 = 21 \times 121$$

Puisque $10t + 1 \geq 21$, alors on peut avoir :

- $q = 1$ et $10t + 11 = 2541$, donc $t = 253$
- $q = 11$ et $10t + 11 = 231$, donc $t = 22$
- $q = 21$ et $10t + 11 = 121$, donc $t = 11$
- $q = 121$ et $10t + 11 = 21$, donc $t = 1$

On nous demande toutes les longueurs possibles de

$$MN = 3k + \frac{k}{t+1} = 3q(t+1) + q = q(3t+3+1) = q(3t+4)$$

En utilisant les valeurs de q et t que l'on a déterminé ci-dessus, on obtient :

- $q = 1$ et $t = 253$: $MN = 763$
- $q = 11$ et $t = 22$: $MN = 770$
- $q = 21$ et $t = 11$: $MN = 777$
- $q = 121$ et $t = 1$: $MN = 847$

Donc les longueurs possibles de MN sont $763, 770, 777$ et 847.

Il est donc possible de contruire un trapèze dans chacun de ces cas. Les longueurs correspondantes de WX sont respectivement $762, 759, 756$ et 726, tandis que les longueurs correspondantes de ZY sont respectivement $1016, 1012, 1008$ et 968. Une façon de les construire serait de mettre les angles droits à W et à Z.