Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

le mercredi 21 novembre 2018

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 22 novembre 2018

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures ©2018 University of Waterloo

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable par les étudiants (telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera), (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

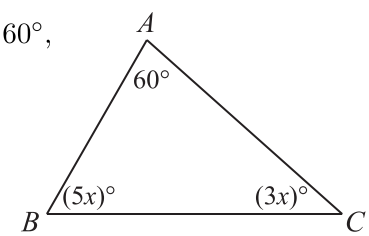
Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

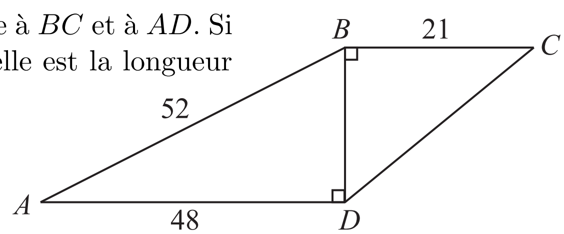
Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Dans la figure, les angles du triangle ABC mesurent $60°$, $(5x)°$ et $(3x)°$. Quelle est la valeur de x ?



2. Une ferme a 500 animaux et chacun de ces animaux est soit une chèvre, une vache ou un poulet. Le nombre de chèvres est deux fois le nombre de vaches. Si 10 % des animaux sur cette ferme sont des poulets, combien des animaux sont des vaches ?

3. Dans la figure, BD est perpendiculaire à BC et à AD. Si $AB = 52$, $BC = 21$ et $AD = 48$, quelle est la longueur de DC ?



4. Les entiers strictement positifs de 1 à 576 sont écrits dans un tableau 24×24 de telle façon que la première rangée contient les nombres de 1 à 24, la deuxième les nombres 25 à 48 et ainsi de suite, tel qu'illustré. Un carré 8×8 est dessiné autour de 64 de ces nombres. (Ces 64 nombres se trouvent en 8 rangées de 8 nombres.) La somme des nombres dans les quatre coins de ce carré 8×8 est 1646. Quel nombre est inscrit dans le coin inférieur droit de ce carré 8×8 ?

1	2	$\cdots$	23	24
25	26	$\cdots$	47	48
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
553	554	$\cdots$	575	576

5. Il y a cinq couples d'entiers (a, b) tels que $0 \leq a \leq 10$ et $0 \leq b \leq 10$ et pour lesquels les points $P(1,1)$, $Q(4,5)$ et $R(a,b)$ forment un triangle d'aire 6. Quels sont ces cinq couples d'entiers (a, b) ?
6. Il y a 20 chaises arrangées en cercle. Il y a n personnes assises sur n chaises différentes. Ces n personnes se lèvent, se déplacent de k chaises dans le sens horaire et s'assoient à nouveau. Après cette manoeuvre, exactement les mêmes chaises sont occupées. (Par exemple, si les 2e, 4e, 7e, 9e, 12e, 14e, 17e et 19e chaises sont occupées au départ, alors exactement les mêmes chaises sont occupées suite au déplacement des $n = 8$ personnes de $k = 15$ chaises dans le sens horaire.) Pour combien de couples (n, k), avec $1 \leq n \leq 20$ et $1 \leq k \leq 20$, est-ce possible ?

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. L'*étendue* d'une liste de nombres est la différence entre le nombre le plus grand et le nombre le plus petit de la liste. Par exemple, l'étendue de la liste $1, 5, 1, 6, 3$ est $6 - 1 = 5$
   (a) Déterminer l'étendue de la liste $7, 13, 4, 9, 6$.
   (b) La liste $11, 5, a, 13, 10$ a une étendue de 12. Déterminer les deux valeurs possibles de a.
   (c) La liste $6 + 2x^2, 6 + 4x^2, 6, 6 + 5x^2$ a une étendue de 80. Déterminer les deux valeurs possibles de x.
   (d) La liste $5x + 3y, 0, x + y, 3x + y$ a une étendue de 19. Si x et y sont des entiers strictement positifs, déterminer les valuers de x et de y.
2. Un sac contient n balles numérotées de 1 à n, avec $n \geq 2$. Il y a $n \times (n - 1)$ façons pour Julio de retirer une première balle et d'en retirer une deuxième par la suite. C'est parce qu'il y a n choix possibles pour la première balle et ensuite $n - 1$ choix possibles pour la deuxième balle. Par exemple, quand un sac contient 6 balles numérotées de 1 à 6, dont 4 sont noires et 2 sont dorées, il y a $6 \times 5 = 30$ façons pour Julio de retirer deux balles de cette façon et $4 \times 3 = 12$ façons où les deux balles sont noires.
   (a) Un sac contient 11 balles numérotées de 1 à 11, dont 7 sont noires et 4 sont dorées. Julio enlève deux balles tel qu'indiqué précédemment. Quelle est la probabilité que ces deux balles soient noires ?
   (b) Pour un entier $d \geq 2$, un deuxième sac contient 6 balles noires et d balles dorées. Ces balles sont numérotées de 1 à $d + 6$. Julio enlève deux balles tel qu'indiqué plus tôt. La probabilité que ces deux balles soient noires est $\frac{1}{8}$. Déterminer la valeur de d.
   (c) Pour un entier $x \geq 2$, un troisième sac contient $2x$ balles noires et x balles dorées. Ces balles sont numérotées de 1 à $3x$. Julio enlève deux balles tel qu'indiqué plus tôt. La probabilité que ces deux balles soient noires est $\frac{7}{16}$. Déterminer la valeur de x.
   (d) Pour un entier $r \geq 3$, un quatrième sac contient 10 balles noires, 18 balles dorées et r balles rouges. Ces balles sont numérotées de 1 à $r + 28$. Cette fois, Julio enlève trois balles l'une après l'autre. La probabilité que deux de ces trois balles soient noires et que l'autre soit dorée est d'au moins $\frac{1}{3000}$. Quelle est la plus grande valeur possible de r ?

3. Dans la figure 1, triangle ABC a les points D et E sur les segments AB et AC respectivement de manière que DE soit parallèle à BC. Dans ce cas, triangle ABC et triangle ADE sont des *triangles semblables* car leurs angles correspondants sont égaux. Ces triangles ont donc la propriété que $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$.

   Dans la figure 2, $WXYZ$ est un trapèze avec WX parallèle à ZY. De plus, les points M et N sont respectivement sur WZ et XY avec MN parallèle à WX et ZY.

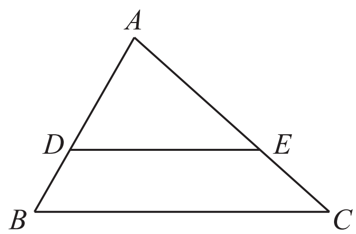


Figure 1

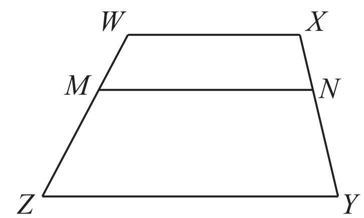


Figure 2

   (a) Supposons que, dans la figure 1, $DE = 6$, $BC = 10$, $EC = 3$, et $AE = x$. Déterminer la valeur de x.

   (b) Supposons que, dans la figure 2, $\dfrac{WX}{ZY} = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{WM}{MZ} = \dfrac{XN}{NY} = \dfrac{2}{3}$. Déterminer la valeur de $\dfrac{WX}{MN}$.

   (c) Supposons que, dans la figure 2, $\dfrac{WX}{ZY} = \dfrac{3}{4}$. Supposons aussi que $\dfrac{MZ}{WM} = \dfrac{NY}{XN}$ et que ce rapport soit égal à un entier positif. Si $WX + MN + ZY = 2541$ et que toutes les longueurs WX, MN et ZY sont des entiers, déterminer toutes les valeurs possibles de la longueur MN.