Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2017

le mercredi 12 avril 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 avril 2017
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Puisque le quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle, $\angle DCB + \angle DAB = 180^\circ$.
Donc $(2u)^\circ + 88^\circ = 180^\circ$, d'où $2u = 92$, ou $u = 46$.

(b) Puisque le quadrilatère $STQR$ est inscrit dans un cercle, $\angle SRQ + \angle STQ = 180^\circ$.
Donc $x^\circ + 58^\circ = 180^\circ$, d'où $x = 122$.
Puisque le quadrilatère $PQRS$ est inscrit dans un cercle, $\angle SPQ + \angle SRQ = 180^\circ$.
Donc $y^\circ + x^\circ = 180^\circ$, d'où $y + 122 = 180$, ou $y = 58$.

(c) Dans le triangle JKL, $KJ = KL$. Donc $\angle KLJ = \angle KJL = 35^\circ$ (le triangle JKL est isocèle).
Dans le triangle JKL, $\angle JKL = 180^\circ - 2(35^\circ)$, d'où $\angle JKL = 110^\circ$.
Puisque le quadrilatère $JKLM$ est inscrit dans un cercle, $\angle JML + \angle JKL = 180^\circ$.
Donc $\angle JML + 110^\circ = 180^\circ$, d'où $\angle JML = 70^\circ$.
Dans le triangle isocèle JLM, $LJ = LM$. Donc $\angle MJL = \angle JML = 70^\circ$.
Dans le triangle JLM, $w^\circ = 180^\circ - 2(70^\circ)$, d'où $w = 40$.

(d) *Solution 1*
Puisque le quadrilatère $DEFG$ est inscrit dans un cercle, $\angle DGF + \angle DEF = 180^\circ$, d'où $\angle DGF + z^\circ = 180^\circ$ ou $\angle DGF = 180^\circ - z^\circ$.
Puisque FGH est un angle plat, $\angle DGF + \angle DGH = 180^\circ$.
Donc $(180^\circ - z^\circ) + \angle DGH = 180^\circ$, d'où $\angle DGH = 180^\circ - 180^\circ + z^\circ$, ou $\angle DGH = z^\circ$.

Solution 2
Puisque $DEFG$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle, $\angle DGF + \angle DEF = 180^\circ$.
Puisque FGH est un angle plat, $\angle DGF + \angle DGH = 180^\circ$.
Donc $\angle DGF + \angle DGH = \angle DGF + \angle DEF$, d'où $\angle DGH = \angle DEF = z^\circ$.

2. (a) On remplit 5 rangées du tableau.
On sait qu'après avoir rempli n rangées, on a écrit n^2 entiers en tout.
Donc après avoir rempli 5 rangées du tableau, on a écrit 25 entiers ($5^2 = 25$).
Le 25e entier écrit dans le tableau est le dernier entier de la 5e rangée, soit un 9.

Rangée 1	1								
Rangée 2	1	2	3						
Rangée 3	1	2	3	4	5				
Rangée 4	1	2	3	4	5	6	7		
Rangée 5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮									

(b) Après avoir rempli 10 rangées du tableau, on a écrit 100 entiers ($10^2 = 100$).
Donc, le 100e entier que l'on a écrit est le dernier entier de la rangée 10.
Le dernier entier de la rangée n est le $n^{\text{ième}}$ entier impair.
Le premier entier impair est $2(1) - 1$, ou 1 ; le deuxième entier impair est $2(2) - 1$, ou 3 ; le troisième entier impair est $2(3) - 1$, ou 5.
Le $n^{\text{ième}}$ impair est $2n - 1$ (1 de moins que le $n^{\text{ième}}$ entier pair $2n$).
La 10e rangée se termine par le 10e entier impair, soit $2(10) - 1$, ou 19.
Donc, le 100e entier que l'on écrit dans le tableau est 19.

(c) Après avoir rempli 44 rangées, on a écrit 1936 entiers dans le tableau ($44^2 = 1936$).
Après avoir rempli 45 rangées, on a écrit 2025 entiers dans le tableau ($45^2 = 2025$).
Donc, le 2017e entier écrit dans le tableau est situé dans la rangée 45.
Le dernier entier écrit dans la rangée 45 est le 45e entier impair, soit $2(45) - 1$, ou 89.
Le 2025e entier écrit dans le tableau est 89. Le 2017e entier écrit dans le tableau est donc 8 de moins ($2025 - 2017 = 8$) que 89, soit $89 - 8$, ou 81.

(d) Chaque rangée, après la première, contient tous les entiers de la rangée précédente, suivis des deux entiers consécutifs suivants.

Par exemple, la rangée 3 contient tous les entiers de la rangée 2 (c.-à-d., $1, 2, 3$), suivis des deux entiers consécutifs suivants, 4 et 5.
Ainsi la première fois qu'un entier parait dans le tableau, il parait comme dernier entier d'une rangée ou comme avant-dernier entier d'une rangée.
Puisque le dernier entier d'une rangée est le $n^{\text{ième}}$ entier impair, le dernier entier d'une rangée est toujours impair et l'avant-dernier entier est toujours pair.
La première fois que 96 parait dans le tableau, il parait comme avant-dernier entier de la rangée (puisque 96 est pair) et 97 est le dernier entier de cette rangée.
Puisque la rangée n se termine par le $n^{\text{ième}}$ entier impair, $2n-1$, alors lorsque $2n-1=97$, on a $2n=98$, d'où $n=49$.
Donc, le dernier entier de la rangée 49 est 97 et l'avant-dernier entier de cette rangée est 96.
Puisque 96 parait la première fois dans le tableau dans la rangée 49, alors 96 parait aussi dans chaque rangée après la rangée 49 et ne parait pas avant la rangée 49.
L'entier 96 parait donc dans 152 des 200 premières rangées $(200-48=152)$ du tableau.

3. (a) Les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation $y=-15$ et de la parabole d'équation $y=-x^2+2x$, vérifient les deux équations. Ils vérifient donc l'équation $-15=-x^2+2x$, ou $x^2-2x-15=0$, ou $(x+3)(x-5)=0$. Donc $x=-3$ ou $x=5$.
Puisque les coordonnées des deux points d'intersection vérifient l'équation $y=-15$, les deux points d'intersection ont pour coordonnées $(-3,-15)$ et $(5,-15)$.

(b) Le point d'abscisse 4 sur la parabole d'équation $y=-x^2-3x$ a pour ordonnée $-4^2-3(4)$, ou -28. La droite coupe donc la parabole au point $(4,-28)$.
La droite coupe l'axe des ordonnées au point $(0,8)$. La droite a donc pour pente $\dfrac{-28-8}{4-0}$, ou $\dfrac{-36}{4}$, ou -9. Puisque la droite a une pente de -9 et une ordonnée à l'origine de 8, elle a pour équation $y=-9x+8$.
Les coordonnées des points d'intersection de la droite d'équation $y=-9x+8$ et de la parabole d'équation $y=-x^2-3x$ vérifient les deux équations. Elles vérifient donc l'équation $-9x+8=-x^2-3x$, ou $x^2-6x+8=0$, ou $(x-2)(x-4)=0$. Donc $x=2$ ou $x=4$.
Les points d'intersection ont donc pour abscisses $x=4$ et $x=2$. Donc $a=2$.

(c) Le point d'abscisse p, sur la parabole d'équation $y=-x^2+kx$, a pour ordonnée $-p^2+kp$.
La droite coupe donc la parabole au point $(p,-p^2+kp)$.
De même, la droite coupe aussi la parabole au point $(q,-q^2+kq)$.
La droite qui passe aux points $(p,-p^2+kp)$ et $(q,-q^2+kq)$ a pour pente $\dfrac{(-p^2+kp)-(-q^2+kq)}{p-q}$, où $p\neq q$, ou $p-q\neq 0$.

On simplifie la pente pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{(-p^2+kp)-(-q^2+kq)}{p-q} &= \frac{q^2-p^2+kp-kq}{p-q}\\ &= \frac{(q-p)(q+p)+k(p-q)}{p-q}\\ &= \frac{(q-p)(q+p)}{p-q}+\frac{k(p-q)}{p-q}\\ &= \frac{-(p-q)(q+p)}{p-q}+\frac{k(p-q)}{p-q}\\ &= -(q+p)+k\\ &= k-q-p\end{aligned}$$

La droite a pour pente $k-q-p$ et elle passe au point $(p,-p^2+kp)$.
L'équation de la droite est donc $y-(-p^2+kp)=(k-q-p)(x-p)$.
(La droite de pente m et qui passe au point (x_1,y_1) a pour équation $y-y_1=m(x-x_1)$.)
On reporte $x=0$ dans l'équation $y-(-p^2+kp)=(k-q-p)(x-p)$ pour déterminer la valeur correspondante de y, l'ordonnée à l'origine de la droite.

$$\begin{aligned}y-(-p^2+kp) &= (k-q-p)(x-p)\\ y-(-p^2+kp) &= (k-q-p)(0-p)\\ y+p^2-kp &= -kp+pq+p^2\\ y &= -p^2+kp-kp+pq+p^2\\ y &= pq\end{aligned}$$

La droite qui coupe la parabole d'équation $y=-x^2+kx$ en $x=p$ et en $x=q$ $(p\neq q)$ a pour ordonnée à l'origine pq.

(d) Lorsque la courbe définie par $x=\frac{1}{k^3}y^2+\frac{1}{k}y$ coupe la parabole d'équation $y=-x^2+kx$, les coordonnées des deux points d'intersection ($(0,0)$ et T) vérifient les deux équations. Les abscisses des deux points d'intersection vérifient donc l'équation
$x=\frac{1}{k^3}(-x^2+kx)^2+\frac{1}{k}(-x^2+kx)$ $(k\neq 0)$.
On simplifie pour obtenir :

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{k^3}(-x^2+kx)^2+\frac{1}{k}(-x^2+kx)\\ k^3x &= (-x^2+kx)^2+k^2(-x^2+kx)\\ k^3x &= x^4-2kx^3+k^2x^2-k^2x^2+k^3x\\ 0 &= x^4-2kx^3\\ 0 &= x^3(x-2k)\end{aligned}$$

Puisque $x^3(x-2k)=0$, les abscisses des points d'intersection sont $x=0$ et $x=2k$.
Donc, l'abscisse du point T est $x=2k$. Son ordonnée est $-(2k)^2+k(2k)$, ou $-4k^2+2k^2$, ou $-2k^2$.
Puisque l'ordonnée du point T est une expression du second degré sans terme constant ni terme du premier degré en k, l'équation de la parabole sur laquelle les points T sont situés ne contient qu'un terme du second degré.
En d'autre mots, tous les points $T(2k,-2k^2)$ sont situés sur une parabole dont l'équation

est de la forme $y = ax^2$.
On reporte les coordonnées de T dans cette équation pour obtenir $-2k^2 = a(2k)^2$, ou $-2k^2 = 4ak^2$, ou $-2 = 4a$ (puisque $k \neq 0$), ou $a = -\frac{1}{2}$.
(On peut véfirier que $x = 2k$ et $y = -2k^2$ vérifient l'équation $y = ax^2 + bx + c$ seulement si $a = -\frac{1}{2}$ et $b = c = 0$.)
L'équation de la parabole est donc $y = -\frac{1}{2}x^2$.

4. (a) Soit $N = abcdefghi$ le plus grand nombre zigzag de 9 chiffres.
On déterminera N en attribuant chacun des chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9 aux inconnues a, b, c, d, e, f, g, h et i.
On commence en attribuant à a la plus grande valeur possible, $a = 9$, de manière à créer le plus grand nombre zigzag possible.
On ne peut pas avoir $b = 8$, car toute valeur possible de c donnerait $a > b > c$.
En d'autres mots, dans le premier groupe de trois chiffres adjacents, le chiffre du milieu serait inférieur au premier chiffre et supérieur au dernier chiffre.
Dans le but de créer le plus grand nombre zigzag, on attribue donc à b la plus grande valeur suivante, soit 7.
Puisque $a > b$, on doit avoir $b < c$. On doit donc avoir $c = 8$ (puisque 9 a déjà été attribué).
Jusqu'à maintenant, on a
$$N = 978defghi.$$
Si le plus grand nombre zigzag de 9 chiffres commence par 9, il doit commencer par 978.
On continue d'attribuer des valeurs aux chiffres, tout en s'assurant que pour chaque groupe de trois chiffres adjacents, le chiffre du milieu est soit supérieur aux deux autres chiffres, ou il est inférieur aux deux autres chiffres.
Puisque $b < c$, alors $c > d$.
On doit donc avoir $d < e$ et puisque N doit être aussi grand que possible, on choisit $d = 5$ et $e = 6$. On a donc
$$N = 97856fghi.$$
Puisque $d < e$, alors $e > f$, d'où $f < g$.
On choisit donc $f = 3$ et $g = 4$ de manière que N soit aussi grand que possible.
Puisque $f < g$, alors $g > h$ et $h < i$. On choisit donc $h = 1$ et $i = 2$.
Le plus grand nombre zigzag de 9 chiffres est $N = 978563412$.

(b) On procède par étapes en démontrant certains faits.

<u>1^er fait : $G(6, 2) = P(6, 5)$</u>

On considère un nombre zigzag particulier de 6 chiffres compté par $G(6, 2)$, par exemple, $n = 251634$.
On forme un nouveau nombre zigzag de 6 chiffres en soustrayant chacun des chiffres de n du nombre 7, ce qui donne $N = 526143$. On remarque que N un nombre zigzag de 6 chiffres qui est compté par $P(6, 5)$.
On considère maintenant un nombre zigzag quelconque compté par $G(6, 2)$, soit $n = 2bcdef$, où b, c, d, e, f sont les chiffres $1, 3, 4, 5, 6$ dans un ordre quelconque de manière que $2 < b$, $b > c$, $c < d$, $d > e$ et $e < f$.
On forme un nouveau nombre zigzag de 6 chiffres en soustrayant chacun des chiffres de n du nombre 7, ce qui donne $N = 5(7-b)(7-c)(7-d)(7-e)(7-f)$.
Puisque b, c, d, e, f sont les chiffres $1, 3, 4, 5, 6$ dans un ordre quelconque, alors $7 - b$,

$7-c, 7-d, 7-e, 7-f$ sont les chiffres $6, 4, 3, 2, 1$ dans un ordre quelconque.
Puisque $2 < b$, alors $-2 > -b$, d'où $7-2 > 7-b$, ou $5 > 7-b$.
Puisque $b > c$, alors $-b < -c$, d'où $7-b < 7-c$.
De même, $7-c > 7-d$, $7-d < 7-e$ et $7-e > 7-f$.
Donc, N est un nombre zigzag de 6 chiffres compté par $P(6,5)$.
De plus, si $2bcdef$ et $2BCDEF$ sont deux nombres zigzag différents comptés par $G(6,2)$, alors une des situations suivantes doit être vraie : $b \neq B$ ou $c \neq C$ ou $d \neq D$ ou $e \neq E$ ou $f \neq F$.
Ceci indique que $5(7-b)(7-c)(7-d)(7-e)(7-f)$ et $5(7-B)(7-C)(7-D)(7-E)(7-F)$ sont deux nombres différents comptés par $G(6,2)$, car au moins une paire de chiffres correspondants sera composée de chiffres distincts.
En d'autres mots, chaque nombre zigzag compté par $G(6,2)$ correspond à un nombre zigzag différent compté par $P(6,5)$, d'où $G(6,2) \leq L(6,5)$. (Il pourrait y avoir des nombres zigzag comptés par $P(6,5)$ qui n'ont pas été considérés par cette approche.)
Or, on peut utiliser la même procédure avec un nombre zigzag quelconque compté par $P(6,5)$ pour obtenir un nombre zigzag compté par $G(6,2)$, ce qui démontre que $P(6,5) \leq G(6,2)$.
Donc $G(6,5) = P(6,2)$.

2e fait : $G(6,a) = P(6,7-a)$ pour $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

On peut utiliser un argument semblable pour montrer que $G(6,a) = P(6,7-a)$ pour chacune des valeurs de a, $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

On peut démontrer l'énoncé (ii) :

$$\begin{aligned} & G(6,1)+G(6,2)+G(6,3)+G(6,4)+G(6,5)+G(6,6) \\ = & P(6,6)+P(6,5)+P(6,4)+P(6,3)+P(6,2)+P(6,1) \\ = & P(6,1)+P(6,2)+P(6,3)+P(6,4)+P(6,5)+P(6,6) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut généraliser le 2e fait de manière qu'il soit utile pour la partie (c).

3e fait : $G(n,a) = P(n, n+1-a)$ pour chaque paire d'entiers a et n où $1 \leq a \leq n \leq 9$

Pour s'en convaincre, on utilise un argument semblable à celui du 1er cas, mais en soustrayant chaque chiffre du nombre zigzag compté par $G(n,a)$ du nombre $n+1$, de manière à obtenir un nombre zigzag correspondant compté par $P(n,(n+1)-a)$.

On démontre maintenant que $G(6,3) = P(5,3) + P(5,4) + P(5,5)$.

4e fait : Le nombre de nombres zigzag $35cdef$ est égal à $P(5,4)$

On utilise $G(6,35)$ pour représenter le nombre de nombres zigzag de la forme $35cdef$. (On utilisera une notation analogue plus loin.)
On considère un nombre zigzag de 6 chiffres compté par $G(6,35)$, disons $n = 351624$.
On forme un nombre de 5 chiffres en supprimant le premier chiffre de n, ce qui donne 51624, puis en remplaçant le 4, le 5 et le 6 par 3, 4 et 5, respectivement, ce qui donne $N = 41523$.
On remarque N est un nombre zigzag de 5 chiffres compté par $P(5,4)$.
On considère un nombre zigzag arbitraire de 6 chiffres compté par $G(6,35)$, disons

$n = 35cdef$, où c, d, e, f sont les chiffres $1, 2, 4, 6$ dans un ordre quelconque tels que $3 < 5$, $5 > c$, $c < d$, $d > e$ et $e < f$.
On forme un nombre zigzag de 5 chiffres en supprimant le premier chiffre de n, ce qui donne $5cdef$, (dont les chiffres sont $1, 2, 4, 5, 6$ dans un ordre quelconque).
On rappelle que $5 > c$, $c < d$, $d > e$ et $e < f$.
On remplace ensuite le 4, le 5 et le 6 par les chiffres 3, 4 et 5 respectivement, ce qui donne $4c'd'e'f'$.
Puisque les chiffres du nombre $5cdef$ sont $1, 2, 4, 5, 6$ et que les chiffres du nombre $4c'd'e'f'$ sont $1, 2, 3, 4, 5$ (placés dans le même ordre), on n'a pas changé l'ordre relatif des chiffres.
On a donc toujours $5 > c'$, $c' < d'$, $d' > e'$ et $e' < f'$.
Donc, N est un nombre zigzag de 5 chiffres compté par $P(5, 4)$.
De plus, si $35cdef$ et $35CDEF$ sont deux nombres zigzag comptés par $G(6, 3)$, alors une des situations suivantes doit être vraie : $b \neq B$ ou $c \neq C$ ou $d \neq D$ ou $e \neq E$ ou $f \neq F$.
Donc $4c'd'e'f'$ et $4C'D'E'F'$ sont deux nombres distincts comptés par $P(5, 4)$. (Par exemple, si $c' = C'$, on devait avoir $c = C$.)
En d'autres mots, chaque nombre zigzag compté par $G(6, 35)$ correspond à un nombre zigzag différent compté par $P(5, 4)$. Donc $G(6, 35) \leq P(5, 4)$.
On peut aussi renverser cette procédure à partir d'un nombre arbitraire compté par $P(5, 4)$ (remplacer les chiffres $3, 4, 5$ par $4, 5, 6$ et placer le chiffre 3 en avant) pour obtenir un nombre zigzag compté par $G(6, 35)$, ce qui montre que $P(5, 4) \leq G(6, 35)$.
Donc, $G(6, 35) = P(5, 4)$.

5e fait : $G(6, 3a) = P(5, a - 1)$ pour $a = 4, 5, 6$

En utilisant un argument semblable à celui pour le 4e fait, on peut montrer que pour $a = 4, 5, 6$, on a $G(6, 3a) = P(5, a - 1)$.

On démontre l'énoncé (i), tenant compte que le deuxième chiffre de tout nombre zigzag compté par $G(6, 3)$ doit être un 4, un 5 ou un 6 et que tout nombre zigzag compté par $G(6, 3)$ doit donc être de la forme $34cdef$, $35cdef$ ou $36cdef$:

$$G(6, 3) = G(6, 34) + G(6, 35) + G(6, 36) = P(5, 3) + P(5, 4) + P(5, 5),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le fait suivant est une généralisation du 5e fait. On l'utilisera pour résoudre la partie (c).

6e fait : $G(n, ab) = P(n - 1, b - 1)$ pour tous les chiffres n, a, b $(1 \leq a < b \leq n \leq 9)$

Pour s'en convaincre, on utilise un argument semblable à celui utilisé pour le 5e fait, en retranchant le premier chiffre a et en diminuant de 1 chaque chiffre de $a + 1$ à n, pour obtenir tous les chiffres de a à $n - 1$.

(c) Soit T le nombre total de nombres zigzag de 8 chiffres. Un nombre zigzag de 8 chiffres commence par un des chiffres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et son deuxième chiffre est plus grand ou plus petit que le premier chiffre.
Donc, T est égal à la somme de

$$p = P(8, 1) + P(8, 2) + P(8, 3) + P(8, 4) + P(8, 5) + P(8, 6) + P(8, 7) + P(8, 8)$$

et de

$$g = G(8, 1) + G(8, 2) + G(8, 3) + G(8, 4) + G(8, 5) + G(8, 6) + G(8, 7) + G(8, 8).$$

D'après le 3e fait, $P(8,1) = G(8,8)$, $P(8,2) = G(8,7)$, $P(8,3) = G(8,6)$ et ainsi de suite. Donc

$$p = G(8,8) + G(8,7) + G(8,6) + G(8,5) + G(8,4) + G(8,3) + G(8,2) + G(8,1) = g$$

d'où $T = 2(G(8,1) + G(8,2) + G(8,3) + G(8,4) + G(8,5) + G(8,6) + G(8,7) + G(8,8))$.
On calcule la valeur de chaque terme en remplissant un tableau de valeurs de $G(n,k)$ pour $3 \leq n \leq 8$ et $1 \leq k \leq 8$.
On remarque que lorsque $k \geq n$, alors $G(n,k) = 0$, puisqu'aucun nombre zigzag de n ne peut commencer par k si $k > n$ et si $k = n$, un nombre zigzag de n chiffres qui commence par n ne peut alors avoir un deuxième chiffre plus grand que le premier.
De plus, les seuls nombres zigzag de 3 chiffres sont 132, 231, 213 et 312, puisque les autres arrangements des chiffres 1, 2 et 3 (soit 123 et 321) ne sont pas conformes à la définition d'un nombre zigzag.
Donc $G(3,1) = 1$, $G(3,2) = 1$ et $G(3,3) = 0$.
On peut donc commencer à remplir le tableau :

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	1	0	0	0	0	0	0
4				0	0	0	0	0
5					0	0	0	0
6						0	0	0
7							0	0
8								0

Pour remplir le tableau, on établit une relation entre les valeurs de G et celles de la rangée précédente.
Pour un chiffre n ($4 \leq n \leq 8$) et un chiffre k ($k < n$), on a :

$$\begin{aligned}
G(n,k) &= G(n,k(k+1)) + G(n,k(k+2)) + \cdots + G(n,k(n-1)) + G(n,kn) \\
&\qquad \text{(puisque le deuxième chiffre doit être supérieur à } k\text{)} \\
&= P(n-1,k) + P(n-1,k+1) + \cdots + P(n-1,n-2) + P(n-1,n-1) \\
&\qquad \text{(d'après le 6}^{\text{e}}\text{ fait)} \\
&= G(n-1,n-k) + G(n-1,n-k-1) + \cdots + G(n-1,2) + G(n-1,1) \\
&\qquad \text{(d'après le 3}^{\text{e}}\text{ fait)}
\end{aligned}$$

On utilise cette formule pour obtenir :

$$\begin{aligned}
G(4,1) &= G(3,3) + G(3,2) + G(3,1) = 2 \\
G(4,2) &= G(3,2) + G(3,1) = 2 \\
G(4,3) &= G(3,1) = 1 \\
G(5,1) &= G(4,4) + G(4,3) + G(4,2) + G(4,1) = 5 \\
G(5,2) &= G(4,3) + G(4,2) + G(4,1) = 5 \\
G(5,3) &= G(4,2) + G(4,1) = 4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

On continue de la même manière, rangée par rangée, pour obtenir :

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	1	0	0	0	0	0	0
4	2	2	1	0	0	0	0	0
5	5	5	4	2	0	0	0	0
6	16	16	14	10	5	0	0	0
7	61	61	56	46	32	16	0	0
8	272	272	256	224	178	122	61	0

Donc, $T = 2(272 + 272 + 256 + 224 + 178 + 122 + 61)$, ou $T = 2770$.
Il y a donc 2770 nombres zigzag de 8 chiffres.