Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Gauss 2017

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

le mercredi 10 mai 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 11 mai 2017

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2016 University of Waterloo

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Jeff Anderson
Terry Bae
Jacquelene Bailey
Shane Bauman
Carmen Bruni
Ersal Cahit
Serge D'Alessio
Janine Dietrich
Jennifer Doucet
Fiona Dunbar
Mike Eden
Barry Ferguson
Judy Fox
Steve Furino
Rob Gleeson
John Galbraith
Alain Gamache
Robert Garbary
Sandy Graham
Conrad Hewitt
Angie Hildebrand
Carrie Knoll
Judith Koeller
Bev Marshman
Mike Miniou
Brian Moffat
Dean Murray
Jen Nelson
J.P. Pretti
Kim Schnarr
Carolyn Sedore
Kevin Shonk
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga
Christine Vender
Heather Vo
Ashley Webster

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Sarah Garrett, J.D. Hogarth P.S., Fergus, ON
John McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
David Switzer, Scott Central P.S., Sandford, ON
Rachael Verbruggen, University of Waterloo, Waterloo, ON
Ashley Webster, University of Waterloo, Waterloo, ON
Laurissa Werhun, Parkdale C.I., Toronto, ON
Robert Wong, Vernon Barford School, Edmonton, ON
Chris Wu, Rippleton P.S., Toronto, ON
Lori Yee, William Dunbar P.S., Pickering, ON

7e année

1. On a : $(2+4+6)-(1+3+5)=12-9=3$

Réponse : (B)

2. D'après la bande la plus longue, environ 50 élèves jouent au soccer.
Puisqu'il s'agit de la bande la plus longue, plus d'élèves pratiquent ce sport que tout autre sport.

Réponse : (C)

3. Michel a 280 \$ en billets de 20 \$. Puisque $280 \div 20 = 14$, il a 14 billets de 20 \$.

Réponse : (C)

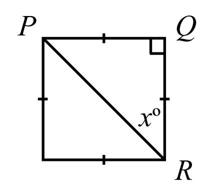
4. Il y a deux multiplications d'entiers positifs qui donnent un résultat de 14, soit 2×7 et 1×14.
Puisque les deux entiers doivent être des entiers de 1 à 10, on doit avoir 2×7.
La somme de 2 et de 7 est 9.

Réponse : (D)

5. Sous forme fractionnaire, trois millièmes est égal à $\frac{3}{1000}$.
Sous forme décimale, trois millièmes est égal à 0,003 ($3 \div 1000 = 0{,}003$).

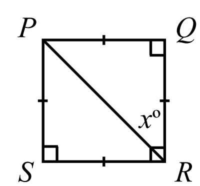
Réponse : (E)

6. *Solution 1*



Puisque la figure est un carré, alors $PQ = QR$ et $\angle PQR = 90^\circ$.
Puisque $PQ = QR$, le triangle PQR est isocèle et on a donc $\angle QPR = \angle QRP = x^\circ$.
Or, la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.
Puisque $\angle PQR = 90^\circ$, alors $\angle QPR + \angle QRP = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
Puisque $\angle QPR = \angle QRP$, alors $\angle QRP = 90^\circ \div 2 = 45^\circ$. Donc $x = 45$.

Solution 2



La diagonale PR coupe le carré $PQRS$ en deux triangles identiques (isométriques), soit les triangles PQR et PSR.
Puisque ces triangles sont identiques, $\angle PRS = \angle PRQ = x^\circ$.
Puisque $PQRS$ est un carré, alors $\angle QRS = 90^\circ$.
Donc $\angle PRS + \angle PRQ = 90^\circ$, d'où $x^\circ + x^\circ = 90^\circ$, ou $2x = 90$.
Donc $x = 45$.

Réponse : (B)

7. *Solution 1*

On écrit la fraction sous la forme d'un nombre fractionnaire : $\frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$.
Puisque $\frac{3}{4}$ est plus près de 1 que de 0, alors $8\frac{3}{4}$ est plus près de 9 que de 8.
L'entier le plus près de $\frac{35}{4}$ est 9.

Solution 2

On écrit la fraction sous la forme décimale : $\frac{35}{4} = 35 \div 4 = 8{,}75$.
Puisque 0,75 est plus près de 1 que de 0, alors 8,75 est plus près de 9 que de 8.
L'entier le plus près de $\frac{35}{4}$ est 9.

Réponse : (C)

8. On évalue chaque expression lorsque $n = 101$:

$$\begin{aligned} 3n &= 3 \times 101 = 303 \\ n+2 &= 101+2 = 103 \\ n-12 &= 101-12 = 89 \\ 2n-2 &= 2 \times 101 - 2 = 202 - 2 = 200 \\ 3n+2 &= 3 \times 101 + 2 = 303 + 2 = 305. \end{aligned}$$

Seule l'expression $2n-2$ a pour valeur un nombre pair lorsque $n = 101$. (De fait, l'expression $2n-2$ a toujours pour valeur un nombre pair, peu importe la valeur entière de n. Pourquoi ?)

Réponse : (D)

9. Puisque les trois nombres ont une somme de 153, leur moyenne est égale à $\frac{153}{3}$, ou 51.
Or, la moyenne de trois entiers consécutifs est égale au nombre du milieu.
Donc, le nombre du milieu est 51 et le plus grand des trois entiers est donc 52.
(On peut vérifier que $50 + 51 + 52 = 153$.)

Réponse : (A)

10. Chacun des 4 petits triangles est équilatéral. Leurs côtés ont donc tous la même longueur.
Puisque chacun de ces triangles a un périmètre de 9 cm, chacun a des côtés de 3 cm ($\frac{9}{3} = 3$).
Chaque côté du triangle PQR est composé de deux sections de 3 cm. Chacun a donc une longueur de 6 cm.
Le triangle PQR a donc un périmètre de 3×6 cm, ou 18 cm.

Réponse : (E)

11. Les fractions ont pour dénominateurs respectifs 7 et 63.
Puisque $7 \times 9 = 63$ et que les fractions sont égales, le numérateur de la deuxième fraction doit être égal à 3×9.
On a donc $\dfrac{3}{7} = \dfrac{3 \times 9}{7 \times 9} = \dfrac{27}{63}$.
Le nombre que l'on doit placer dans le $\square$ pour que l'égalité soit vraie est donc 27.

Réponse : (A)

12. Si on achète 6 casse-tête au cout de 10 \$ chacun, cela coute 6×10 \$, ou 60 \$.
Or, une boite de 6 casse-tête coute 50 \$. C'est donc moins cher d'acheter des casse-tête par boites de 6 que de les acheter à la pièce.
Si on achète 4 boites de 6 casse-tête, on obtient 24 casse-tête au cout de 4×50 \$, ou 200 \$.
L'achat d'un autre casse-tête de 10 \$ donne un total de 25 casse-tête au cout minimal de 210 \$.

Réponse : (A)

13. L'image d'une figure par une translation a la même orientation que la figure. Les côtés correspondants sont donc parallèles deux à deux.
Parmi les triangles donnés, seul le triangle D a la même orientation que le triangle ombré.
Donc, le triangle D peut être obtenu comme image du triangle ombré par une translation.

Réponse : (D)

14. Puisqu'il est 14 h 30 à Gander lorsqu'il est 13 h 00 à Toronto, l'heure de Gander est 1 heure et 30 minutes en avance de l'heure de Toronto.
Un vol qui part à 15 h 00 (heure de Toronto) et qui dure 2 heures et 50 minutes arrive à Gander à 17 h 50 (heure de Toronto).
Or, l'heure de Gander a une heure et 30 minutes d'avance.
L'avion arrive donc à 19 h 20 (heure de Gander).

Réponse : (A)

15. Henri était plus lent que Faiz. Il termine donc la course derrière Faiz.
Rémi était plus rapide que Henri et Faiz. Il termine donc la course devant eux.
À la fin, on a donc Rémi devant Faiz devant Henri.
Toma était plus rapide que Rémi, mais plus lent qu'Omar.
À la fin, on a donc Omar devant Toma devant Rémi devant Faiz devant Henri.
Donc, Faiz a terminé en quatrième position.

Réponse : (A)

16. Les diviseurs positifs de 20 sont 1, 2, 4, 5, 10 et 20.
Donc, 6 des 20 nombres sur le disque sont des diviseurs de 20.
Or, la flèche peut s'arrêter dans n'importe quel des 20 secteurs avec la même probabilité. Il y a donc 6 résultats favorables sur 20 résultats équiprobables possibles.
Il y a donc une probabilité de $\frac{6}{20}$ pour que la flèche s'arrête dans un secteur dont le numéro est un diviseur de 20.

Réponse : (E)

17. *Solution 1*
Puisque 78 est 2 de moins que 80 et que 82 est 2 de plus que 80, 78 et 82 ont une moyenne de 80.
Puisque les quatre entiers ont une moyenne de 80, 83 et x doivent aussi avoir une moyenne de 80.
Or, 83 est 3 de plus que 80. Donc, x doit être 3 de moins que 80.
(Donc $x = 80 - 3$, ou $x = 77$. On peut vérifier que $78, 83, 82$ et 77 ont bien une moyenne de 80.)

Solution 2
Puisque les quatre entiers ont une moyenne de 80, ils ont une somme de 4×80, ou 320.
Or 78, 83 et 82 ont une somme de 243. Donc $x = 320 - 243$, ou $x = 77$.
L'entier x est donc 3 de moins que la moyenne 80.

Réponse : (D)

18. Un escompte de 20 % sur un livre qui se vend 100 \$ correspond à 0,20 × 100 \$, ou 20 \$.
Selon l'option (A), le prix en solde est de 80 \$ (100 \$ − 20 \$ = 80 \$).

Un escompte de 10 % sur un livre qui se vend 100 \$ correspond à 0,10 × 100 \$, ou 10 \$.
Le prix en solde est de 90 \$ (100 \$ − 10 \$ = 90 \$).
Un deuxième escompte de 10 % du nouveau prix de 90 \$ correspond à 0,10 × 90 \$, ou 9 \$.
Selon l'option (B), le prix en solde est de 81 \$ (90 \$ − 9 \$ = 81 \$).

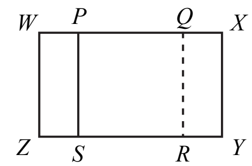
Un escompte de 15% sur un livre qui se vend 100 \$ correspond à 0,15 × 100 \$, ou 15 \$.
Le prix en solde est de 85 \$ (100 \$ − 15 \$ = 85 \$).
Un deuxième escompte de 5 % du nouveau prix de 85 \$ correspond à 0,05 × 85 \$, ou 4,25 \$.
Selon l'option (C), le prix en solde est de 80,75 \$ (85 \$ − 4,25 \$ = 80,75 \$).

Un escompte de 5% sur un livre qui se vend 100 \$ correspond à 0,05 × 100 \$, ou 5 \$.
Le prix en solde est de 95 \$ (100 \$ − 5 \$ = 95 \$).
Un deuxième escompte de 15 % du nouveau prix de 95 \$ correspond à 0,15 × 95 \$, ou 14,25 \$.
Selon l'option (D), le prix en solde est de 80,75 \$ (95 \$ − 14,25 \$ = 80,75 \$).

Les quatre options ne donnent pas toutes le même prix en solde et l'option (A) donne le meilleur prix en solde.

Réponse : (A)

19. Dans la figure ci-contre, les rectangles $WQRZ$ et $PXYS$ représentent les deux feuilles de papier 11 cm$\times$ 8 cm.
Le carré $PQRS$, qui représente la partie superposée, a des côtés de 8 cm.



Donc $WQ = ZR = PX = SY = 11$ cm et $WZ = QR = PS = XY = PQ = SR = 8$ cm.
Dans le rectangle $WQRZ$, $WQ = WP + PQ = 11$ cm.
Donc $WP = 11 - PQ$, d'où $WP = 11 - 8$, ou $WP = 3$ cm.
Dans le rectangle $WXYZ$, $WX = WP + PX$, d'où $XY = 3 + 11$, ou $XY = 14$ cm.
Puisque $WX = 14$ cm et $XY = 8$ cm, l'aire de $WXYZ$ est égale à (14×8) cm^2, ou 112 cm^2.

Réponse : (B)

20. Les points P, Q, R, S et T divisent le côté inférieur du parc en six segments de même longueur.
Chaque segment a donc une longueur de 600 m $\div$ 6, ou 100 m.
Si Baya et Anne s'étaient rencontrées la première fois au point Q, alors Baya aurait parcouru une distance de $(600 + 400 + 4 \times 100)$ m, ou 1400 m, et Anne aurait parcouru une distance de $(400 + 2 \times 100)$ m, ou 600 m.
Lorsqu'elles se rencontrent, Baya et Anne ont marché pendant le même intervalle de temps.
Donc, le rapport de la vitesse de Baya à la vitesse d'Anne est égal au rapport de la distance parcourue par Baya à la distance parcourue par Anne.
Donc, si elles s'étaient rencontrées la première fois au point Q, le rapport de leurs vitesses aurait été égal à 1400 : 600, ou 14 : 6, ou 7 : 3.
De même, si elles s'étaient rencontrées la première fois au point R, Baya aurait parcouru une distance de $(600 + 400 + 3 \times 100)$ m, ou 1300 m, et Anne aurait parcouru une distance de $(400 + 3 \times 100)$ m, ou 700 m.
Dans ce cas, le rapport de leurs vitesses aurait été égal à 1300 : 700, ou 13 : 7.
Or, Baya et Anne se sont rencontrées la première fois entre Q and R.
Donc, Baya a parcouru une plus grande distance que si elles s'étaient rencontrées à Q et une plus petite distance que si elles s'étaient rencontrées à R.
Donc, le rapport de la vitesse de Baya à la vitesse d'Anne est inférieur à 7 : 3 et supérieur à 13 : 7.
On doit déterminer le choix de réponse qui est inférieur à 7 : 3 et supérieur à 13 : 7.
Pour ce faire, on peut exprimer chaque rapport sous la forme d'un nombre fractionnaire.
On a $7 : 3 = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ et $13 : 7 = \frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$.
On convertit les choix de réponse : $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$, $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, $\frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$, $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$ et $\frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}$.
Le seul choix de réponse qui est inférieur à $2\frac{1}{3}$ et supérieur à $1\frac{6}{7}$ est $2\frac{1}{4}$.
Le seul rapport qui pourrait être le rapport de la vitesse de Baya à la vitesse d'Anne est 9 : 4.

Réponse : (B)

21. *Solution 1*
Le 1$^{\text{er}}$ et le 10$^{\text{e}}$ rectangle contribuent la même longueur au périmètre de la figure.
Chacun contribue les longueurs des deux côtés verticaux (deux longueurs de 2), une longueur complète d'un côté horizontal (le côté supérieur du 1$^{\text{er}}$ rectangle ou le côté inférieur du 10$^{\text{e}}$ rectangle, chacun de longueur 4), et la moitié de la longueur du côté opposé.
Le 1$^{\text{er}}$ et le 10$^{\text{e}}$ rectangle contribuent donc chacun $2 + 2 + 4 + 2$, ou 10 au périmètre de la figure.
Chacun des 8 autres rectangles contribue une même longueur au périmètre de la figure.
Chacun contribue les longueurs des deux côtés verticaux (deux longueurs de 2), la moitié de la longueur du côté supérieur (de longueur 4) et la moitié de la longueur du côté inférieur (de longueur 4). Chacun de ces rectangles contribue donc $2+2+2+2$, ou 8 au périmètre de la figure.
Le périmètre de la figure est donc égal à $(2 \times 10) + (8 \times 8)$, ou $20 + 64$, ou 84.

Solution 2
Pour déterminer le périmètre de la figure, on peut considérer la longueur des segments verticaux et celle des segments horizontaux.
Chacun des 10 rectangles a deux côtés verticaux (un à gauche et un à droite) dont les longueurs contribuent au périmètre de la figure.
Ces 20 côtés ont chacun une longueur de 2. Ces longueurs contribuent une longueur totale de 20×2, ou 40 au périmètre de la figure.
Puisque ces 20 côtés sont les seuls côtés verticaux de la figure, on peut maintenant considérer les côtés horizontaux.

Les côtés horizontaux font partie des côtés supérieurs ou des côtés inférieurs des rectangles.
Les 9 premiers rectangles contribuent chacun la moitié de la longueur d'un côté inférieur. Il contribuent donc $\frac{1}{2} \times 4 \times 9$, ou 18 au périmètre de la figure.
Le 10^{e} rectangle contribue la longueur complète de son côté inférieur au périmètre de la figure.
De même, le 1^{er} rectangle contribue la longueur complète de son côté supérieur, soit 4, au périmètre de la figure et les 9 rectangles suivants contribuent chacun la moitié de la longueur d'un côté. Ils contribuent donc $\frac{1}{2} \times 4 \times 9$, ou 18 au périmètre de la figure.
Les côtés contribuent une longueur totale de $18 + 4 + 4 + 18$, ou 44, au périmètre de la figure.

Puisque tous les côtés de la figure ont été pris en considération, la figure a un périmètre de $40 + 44$, ou 84.

Solution 3
Chacun des 10 rectangles a un périmètre de $2 \times (2 + 4)$, ou 12, pour un total de 10×12, ou 120.
Lorsqu'on place les rectangles pour former la figure, on doit soustraire de ce total pour obtenir le périmètre de la figure.
On doit soustraire la longueur de tous les côtés qui chevauchent.
Il y a 9 endroits où il y a chevauchement, soit entre le 1^{er} rectangle et le 2^{e}, entre le 2^{e} rectangle et le 3^{e}, et ainsi de suite.
À chaque chevauchement, on doit soustraire la moitié de la longueur de chaque côté qui chevauche.
En tout, on doit donc soustraire $9 \times (2 + 2)$, ou 36.
On doit donc soustraire 36 du total de 120. La figure a donc un périmètre de $120 - 36$, ou 84.

Réponse : (D)

22. Le chiffre des unités du produit $1ABCDE \times 3$ est un 1. Donc, le chiffre des unités du produit $3 \times E$ doit être un 1.
Donc, E doit être un 7. Il n'y a aucune autre possibilité.
On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B\,C\,D\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,B\,C\,D\,7\,1 \end{array}$$

Lorsqu'on commence à effectuer cette multiplication, on obtient $3 \times 7 = 21$ et le 2 représente 2 dizaines (qui devient une retenue de 2 dans la colonne des dizaines).
Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times D + 2$ (dizaines) pour obtenir 7 (dizaines) dans la colonne des dizaines de la réponse. Si on avait fait $3 \times D$, on aurait obtenu 5 (dizaines).
Donc, D doit être un 5. Il n'y a aucune autre possibilité. On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B\,C\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,B\,C\,5\,7\,1 \end{array}$$

Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times C + 1$ (dizaines) pour obtenir un 5 dans la colonne des centaines de la réponse.
Si on avait fait $3 \times C$, on aurait obtenu 4 (centaines).
Donc, C doit être un 8. Il n'y a aucune autre possibilité. On sait que $3 \times 8 + 1 = 25$ (centaines), ce qui représente 5 centaines et une retenue de 2 dans la colonne des milliers. On a donc :

$$\begin{array}{rr} & 1\,A\,B\,8\,5\,7 \\ \times & 3 \\ \hline & A\,B\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times B + 2$ (milliers) pour obtenir un 8 dans la colonne des milliers de la réponse. Si on avait fait $3 \times B$, on aurait obtenu 6 (milliers). Donc, B doit être un 2. Il n'y a aucune autre possibilité. On sait que $3 \times 2 + 2 = 8$ (milliers). On a donc :

$$\begin{array}{rr} & 1\,A\,2\,8\,5\,7 \\ \times & 3 \\ \hline & A\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times A$ (dix milliers) pour obtenir un 2 dans la colonne des dix milliers de la réponse.
Donc, A doit être un 4. Il n'y a aucune autre possibilité. On a donc :

$$\begin{array}{rr} & 1\,4\,2\,8\,5\,7 \\ \times & 3 \\ \hline & 4\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

On peut vérifier cette multiplication pour s'assurer qu'elle est bonne.
Donc $A + B + C + D + E = 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 26$.

Réponse : (B)

23. On a 8 pièces de 10 ¢ et 3 pièces de 25 ¢. On remplit le tableau ci-dessous qui indique les sommes différentes d'argent (en cents) que l'on peut former en employant diverses combinaisons de pièces. On raie les sommes qui ont déjà paru dans les rangées précédentes.

N$^{\text{bre}}$ de pièces de 10 ¢

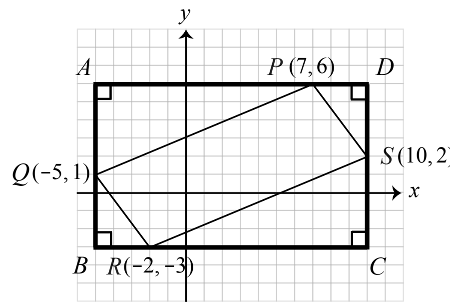
N$^{\text{bre}}$ de pièces de 25 ¢

25 ¢ \ 10 ¢	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	10	20	30	40	50	60	70	80
1	25	35	45	55	65	75	85	95	105
2	~~50~~	~~60~~	~~70~~	~~80~~	90	100	110	120	130
3	~~75~~	~~85~~	~~95~~	~~105~~	115	125	135	145	155

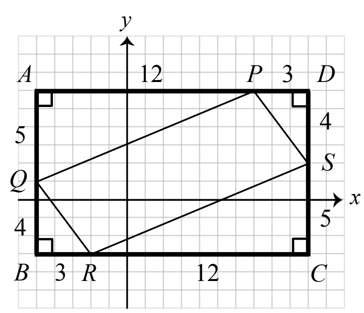
On omet le résultat 0 du tableau, puisqu'on devait utiliser au moins une des 11 pièces de monnaie. Il est donc possible de former 27 sommes différentes en employant une pièce ou plus des 11 pièces de monnaie.

Réponse : (A)

24. On construit d'abord un rectangle $ABCD$ autour du quadrilatère $PQRS$, comme dans la figure ci-contre.
Les côtés verticaux AB et DC passent aux points respectifs Q et S.
Les côtés horizontaux AD et BC passent aux points respectifs P et R.
On déterminera l'aire de $PQRS$ en soustrayant l'aire des triangles rectangles AQP, QBR, CSR et SDP de l'aire de $ABCD$.



Pour déterminer les longueurs des cathètes des triangles rectangles, on compte les nombres d'unités de longueur à l'horizontale ou à la verticale ou on soustrait les abscisses ou les ordonnées des extrémités.
Par exemple, puisque AB est vertical et qu'il passe en $Q(-5, 1)$, A et B ont la même abscisse que Q, soit -5.
La longueur de AP est ainsi égale à l'abscisse de P moins celle de A, soit $7 - (-5)$, ou 12.
De même, la longueur de BR est égale à $-2 - (-5)$, ou 3.
Puisque DC est vertical et qu'il passe en $S(10, 2)$, D et C ont la même abscisse que S, soit 10.
Donc, la longueur de PD est égale à $10 - 7$, ou 3, et la longueur de RC est égale à $10 - (-2)$, ou 12.
De plus, puisque AD est horizontal et qu'il passe en $P(7, 6)$, A et D ont la même ordonnée que P, soit 6.
La longueur de AQ est donc égale à l'ordonnée de A moins celle de Q.
Elle est donc égale à $6 - 1$, ou 5.
De même, la longueur de DS est égale à $6 - 2$, ou 4.
Puisque BC est horizontal et qu'il passe en $R(-2, -3)$, B et C ont la même ordonnée que R, soit -3.
La longueur de QB est donc égale à $1 - (-3)$, ou 4, et celle de SC est égale à $2 - (-3)$, ou 5.
L'aire du triangle AQP est égale à $\frac{1}{2} \times AQ \times AP$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2} \times 5 \times 12$, ou 30.
L'aire du triangle CSR est aussi égale à 30.
L'aire du triangle QBR est égale à $\frac{1}{2} \times QB \times BR$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2} \times 4 \times 3$, ou 6.



L'aire du triangle SDP est aussi égale à 6.
Puisque $AB = AQ + QB = 5 + 4 = 9$ et $BC = BR + RC = 3 + 12 = 15$, l'aire de $ABCD$ est égale à 9×15, ou 135.
L'aire de $PQRS$ est donc égale à $135 - 30 \times 2 - 6 \times 2$, ou $135 - 60 - 12$, ou 63.

Réponse : (B)

25. *Solution 1*
Ashley a écrit les entiers de 1 à 2017. Elle doit ensuite additionner ces entiers, moins ceux qu'elle a soulignés, soit les multiples de 2, les multiples de 3 et les multiples de 5. Lors des soustractions, il faut s'assurer qu'elle ne soustrait pas un même nombre plus d'une fois, comme 30 qui est un multiple de 2, de 3 et de 5, mais qui ne parait qu'une fois dans la liste.
On peut calculer la somme des entiers de 1 à n à l'aide de l'expression $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Par exemple, pour $n = 6$, on peut calculer $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ en additionnant les termes pour obtenir 21 ou en utilisant l'expression $\dfrac{6(6+1)}{2}$ pour obtenir $\dfrac{42}{2}$, ou 21.

On utilise l'expression pour obtenir la somme des entiers de 1 à 2017 :
$1+2+3+4+\cdots+2016+2017$ est égal à $\frac{2017(2018)}{2}$, ou $\frac{4\,070\,306}{2}$, ou $2\,035\,153$.

Pour obtenir la somme des nombres qui n'ont pas été soulignés, on doit soustraire de $2\,035\,153$ tous les entiers de 1 à 2017 qui sont multiples de 2, multiples de 3 ou multiples de 5, tout en s'assurant qu'on ne soustrait pas un même nombre plus d'une fois.

On détermine d'abord la somme les entiers de 1 à 2017 qui sont des multiples de 2.
Il s'agit de la somme de $2+4+6+8+\cdots+2014+2016$, ou $2(1+2+3+4+\cdots+1007+1008)$.
D'après la formule, $1+2+3+4+\cdots+1007+1008$ est égal à $\frac{1008(1009)}{2}$, ou $\frac{1\,017\,072}{2}$, ou $508\,536$. Donc $2+4+6+8+\cdots+2014+2016 = 2\times 508\,536 = 1\,017\,072$.

De même, on détermine la somme des entiers de 1 à 2017 qui sont des multiples de 3.
Il s'agit de la somme de $3+6+9+12+\cdots+2013+2016$, ou $3(1+2+3+4+\cdots+671+672)$.
D'après la formule, $1+2+3+4+\cdots+671+672$ est égal à $\frac{(672)(673)}{2}$, ou $\frac{452\,256}{2}$, ou $226\,128$.
Donc $3+6+9+12+\cdots+2013+2016 = 3\times 226\,128 = 678\,384$.

On détermine aussi la somme les entiers de 1 à 2017 qui sont des multiples de 5
Il s'agit de la somme de $5+10+15+20+\cdots+2010+2015$, ou $5(1+2+3+4+\cdots+402+403)$.
D'après la formule, $1+2+3+4+\cdots+402+403$ est égal à $\frac{403(404)}{2}$, ou $\frac{162\,812}{2}$, ou $81\,406$.
Donc $5+10+15+20+\cdots+2010+2015 = 5\times 81\,406 = 407\,030$.
Le tableau suivant résume nos calculs à date.

Description	Nombres additionnés	Somme
Entiers de 1 à 2017	$1+2+3+4+\cdots+2016+2017$	$2\,035\,153$
Entiers qui sont des multiples de 2	$2+4+6+8+\cdots+2014+2016$	$1\,017\,072$
Entiers qui sont des multiples de 3	$3+6+9+12+\cdots+2013+2016$	$678\,384$
Entiers qui sont des multiples de 5	$5+10+15+20+\cdots+2010+2015$	$407\,030$

Si on soustrait de $2\,035\,153$ les trois sommes suivantes dans le tableau, c'est-à-dire la somme des multiples de 2, des multiples de 3 et des multiples de 5, est-ce qu'on obtient la somme demandée ?
La réponse est non. Pourquoi ?
Il y a des nombres qui paraissent dans plus d'une liste et qui ont été soustraits plus d'une fois.
Par exemple, tous les entiers qui sont multiples de 2 et de 3 (et donc multiples de 6) paraissaient dans deux listes et ils ont été soustraits deux fois.
Il en est de même pour les entiers qui sont multiples de 2 et de 5 (et donc multiples de 10) et des nombres qui sont multiples de 3 et de 5 (et donc multiples de 15).
On devra donc rajouter la somme de tous les multiples de 6, de tous les multiples de 10 et de tous les multiples de 15.

Somme des multiples de 6 : $6+12+18+24+\cdots+2010+2016 = 6(1+2+3+4+\cdots+335+336)$
On sait que $1+2+3+4+\cdots+335+336$ est égal à $\frac{336(337)}{2}$, ou $\frac{(336)(337)}{2}$, ou $\frac{113\,232}{2}$, ou $56\,616$. La somme des multiples de 6 est donc égale à $6\times 56\,616$, ou $339\,696$.

Somme des multiples de 10 : $10+20+30+40+\cdots+2000+2010 = 10(1+2+3+4+\cdots+200+201)$
On sait que $1+2+3+4+\cdots+200+201$ est égal à $\frac{(201)(202)}{2}$, ou $\frac{40\,602}{2}$, ou $20\,301$.
La somme des multiples de 10 est donc égale à $10\times 20\,301$, ou $203\,010$.

Somme des multiples de 15 : $15+30+45+60+\cdots+1995+2010 = 15(1+2+3+4+\cdots+133+134)$

On sait que $1+2+3+4+\cdots+133+134$ est égal à $\dfrac{(134)(135)}{2}$, ou $\dfrac{18\,090}{2}$, ou 9045.

La somme des multiples de 15 est donc égale à 15×9045, ou 135 675.

Le tableau suivant résume nos calculs à date.

Description	Nombres additionnés	Somme
Entiers de 1 à 2017	$1+2+3+4+\cdots+2016+2017$	2 035 153
Entiers qui sont des multiples de 2	$2+4+6+8+\cdots+2014+2016$	1 017 072
Entiers qui sont des multiples de 3	$3+6+9+12+\cdots+2013+2016$	678 384
Entiers qui sont des multiples de 5	$5+10+15+20+\cdots+2010+2015$	407 030
Entiers qui sont des multiples de 6	$6+12+18+24+\cdots+2010+2016$	339 696
Entiers qui sont des multiples de 10	$10+20+30+40+\cdots+2000+2010$	203 010
Entiers qui sont des multiples de 15	$15+30+45+60+\cdots+1995+2010$	135 675

On considère donc la somme des entiers de 1 à 2017, on soustrait la somme des multiples de 2, des multiples de 3 et des multiples de 5, puis on rajoute la somme des multiples de 6, des multiples de 10 et des multiples de 15. On obtient :

$$2\,035\,153 - 1\,017\,072 - 678\,384 - 407\,030 + 339\,696 + 203\,010 + 135\,675 = 611\,048$$

Est-ce la somme que l'on demande ?
La réponse est encore non, mais on n'est pas loin !

On considère les entiers de 1 à 2017 qui sont des multiples de 2, de 3 et de 5 (et donc des multiples de 30, car $2 \times 3 \times 5 = 30$).
Ashley a souligné chacun de ces entiers.
Or, chaque multiple de 30 a été soustrait trois fois de la somme 2 035 153 (une fois comme multiple de 2, une fois comme multiple de 3 et une fois comme multiple de 5), puis a été rajouté trois fois (une fois comme multiple de 6, une fois comme multiple de 10 et une fois comme multiple de 15).
Donc, chaque multiple of 30 doit être soustrait de 611 048 pour obtenir la somme demandée.
Somme des multiples de 30 : $30+60+90+120+\cdots+1980+2010 = 30(1+2+3+4+\cdots+66+67)$
On sait que $1+2+3+4+\cdots+66+67$ est égal à $\dfrac{(67)(68)}{2}$, ou $\dfrac{4556}{2}$, ou 2278.
La somme des multiples de 30 est donc égale à 30×2278, ou 68 340.
La somme des entiers qui n'ont pas été soulignés est égale à $611\,048 - 68\,340$, ou 542 708.

Solution 2
On considère d'abord les entiers de 1 à 60.
Lorsqu'Ashley souligne les entiers divisibles par 2 ou par 5, cela élimine les entiers qui se terminent par 0, 2, 4, 5, 6 ou 8.
Il reste alors les entiers 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 27, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49, 51, 53, 57 et 59. Parmi ceux-ci, 3, 9, 21, 27, 33, 39, 51 et 57 sont divisibles par 3.
Parmi les entiers de 1 à 60, seuls les entiers suivants ne seront pas soulignés :

$$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59$$

On remarque que les huit derniers entiers sont tous 30 de plus que les huit premiers entiers, dans l'ordre.
Cette régularité se poursuit de manière que dans chaque bloc de 30 entiers, huit entiers correspondants ne seront pas soulignés.

Puisque 2010 est le plus grand multiple de 30 inférieur à 2017, Ashley doit additionner les entiers suivants :

1	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	49	53	59
61	67	71	73	77	79	83	89
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1981	1987	1991	1993	1997	1999	2003	2009
2011	2017						

Soit S la somme de ces entiers.
Avant de continuer, on justifie pourquoi la régularité se poursuit :

> Chaque entier strictement positif est un multiple de 30, ou 1 de plus qu'un multiple de 30, ou 2 de plus qu'un multiple de 30, ainsi de suite, ou 29 de plus qu'un multiple de 30. De façon algébrique, on dit que chaque entier strictement positif peut être écrit selon une des expressions suivantes,
>
> $$30k, 30k+1, 30k+2, 30k+3, \ldots, 30k+27, 30k+28, 30k+29$$
>
> selon le reste lorsqu'on l'a divisé par 30.
> Tout entier avec un reste pair, lorsqu'on l'a divisé par 30, est pair puisque 30 est pair. De même, tout entier dont le reste est divisible par 3 ou par 5 lorsqu'on l'a divisé par 30 est lui-même divisible par 3 ou par 5, respectivement.
> Il reste donc les formes suivantes :
>
> $$30k+1, 30k+7, 30k+11, 30k+13, 30k+17, 30k+19, 30k+23, 30k+29$$
>
> Aucun entier représenté par une de ces expression n'est souligné, puisque par exemple, $30k+11$ est 1 de plus qu'un multiple de 2 ou de 5 (c'est-à-dire de $30k+10$) et 2 de plus qu'un multiple de 3 (c'est-à-dire de $30k+9$) et il n'est donc pas divisible par 2, par 3 ou par 5.

Les 8 entiers de la première rangée du tableau ci-dessus ont une somme de 120.
Or, chaque nombre de la 2e rangée du tableau est 30 de plus que le nombre correspondant de la 1re rangée. Les nombres de la 2e rangée ont donc une somme égale à $120 + 8 \times 30$.
De même, les nombres de la 3e rangée ont une somme égale à $120 + 8 \times 60$, et ainsi de suite.
On sait que $2010 = 67 \times 30$ et que $1980 = 66 \times 30$. Il y a donc 67 rangées complètes dans le tableau. Donc :

$$\begin{aligned}
S &= 120 + (120 + 8 \times 30) + (120 + 8 \times 60) + \cdots + (120 + 8 \times 1980) + (2011 + 2017) \\
&= 120 \times 67 + 8 \times (30 + 60 + \cdots + 1980) + 4028 \\
&= 8040 + 8 \times 30 \times (1 + 2 + \cdots + 65 + 66) + 4028 \\
&= 12\,068 + 240 \times (33 \times 67) \\
&= 12\,068 + 530\,640 \\
&= 542\,708
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que les entiers de 1 à 66 peuvent être regroupés en paires de nombres ayant une somme de 67 :

$$1 + 2 + \cdots + 65 + 66 = (1 + 66) + (2 + 65) + \cdots + (33 + 34) = 67 + 67 + \cdots + 67 = 33 \times 67$$

Réponse : (A)

8e année

1. Michel a 280 \$ en billets de 20 \$. Le nombre de billets de 20 \$ est donc égal à $280 \div 20$, ou 14.

Réponse : (C)

2. On a : $4^2 - 2^3 = 16 - 8 = 8$.

Réponse : (A)

3. Il y a 5 résultats équiprobables possibles et 1 résultat favorable.
Donc, la probabilité pour que la flèche s'arrête dans la section 4 est égale à $\frac{1}{5}$.

Réponse : (E)

4. Le nombre d'élèves de 8e année qui font partie de l'équipe d'échecs est égal à 10 % de 160, ou $\frac{10}{100}$ de 160, ou $\frac{1}{10}$ de 160, ou 16.

Réponse : (B)

5. Puisque $44 = 2 \times 11$ et que $22 = 2 \times 11$, alors :
$44 \times 22 = 4 \times 11 \times 2 \times 11 = (4 \times 11 \times 2) \times 11 = 88 \times 11$

Réponse : (B)

6. En fonction de x, les longueurs des côtés du triangle ont une somme de $x + x + 1 + x - 1$, ou $3x$.
Puisque le triangle a un périmètre de 21, alors $3x = 21$. Donc $x = 7$.

Réponse : (B)

7. D'après le diagramme, 20 élèves ont choisi rose et 25 élèves ont choisi bleu.
Le rapport du nombre d'élèves qui ont choisi rose au nombre d'élèves qui ont choisi bleu est de 20 : 25.
On simplifie ce rapport (on divise chaque nombre par 5), pour obtenir le rapport équivalent 4 : 5.

Réponse : (A)

8. *Solution 1*
Pour obtenir le nombre, on procède à rebours.
Puisqu'on a diminué le nombre intermédiaire de 6 pour obtenir 15, le nombre intermédiaire est 21 $(21 - 6 = 15)$.
Puisqu'on a triplé le nombre initial pour obtenir 21, le nombre initial est 7 $(3 \times 7 = 21)$.

Solution 2
Le nombre initial est x. Lorsqu'on le triple, on obtient $3x$.
Lorsqu'on diminue ce résultat de 6, on obtient $3x - 6$ qui est égal à 15.
On résout l'équation $3x - 6 = 15$: puisqu'on sait que $21 - 6 = 15$, alors $3x = 21$; puisqu'on sait que $3 \times 7 = 21$, alors $x = 7$.

Réponse : (D)

9. Tian parcourt 500 m en faisant 625 pas. Puisque $500 \div 625 = 0{,}8$, elle parcourt 0,8 m par pas.
En faisant 10 000 pas à ce même taux, elle parcourra $0{,}8 \times 10\,000$ m, ou 8000 m.
Puisqu'il y a 1000 m dans un kilomètre et que $8000 = 8 \times 1000$, Tian parcourra 8 km.

Réponse : (D)

10. Puisque les segments PQ et RS se coupent en T, les angles PTR et STQ sont opposés par le sommet. Donc $\angle STQ = \angle PTR = 88^\circ$.
Puisque $TS = TQ$, le triangle STQ est isocèle. Donc $\angle TSQ = \angle TQS = x^\circ$.
Les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°.
Donc $88^\circ + x^\circ + x^\circ = 180^\circ$, d'où $2x = 180 - 88$, ou $2x = 92$, ou $x = 46$.

Réponse : (B)

11. Le volume d'un prisme est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur.
Or, l'aire de la base est égale à 4×5 cm^2, ou 20 cm^2, et le prisme a une hauteur de x cm.
Puisque le prisme a un volume de 60 cm^3, alors $20x = 60$, d'où $x = 3$.

Réponse : (D)

12. Puisque $\angle ACB = 90^\circ$, le triangle ACB est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Si la longueur de AB est égale à x m, alors $x^2 = 8^2 + 15^2$, ou $x^2 = 64 + 225$, ou $x^2 = 289$.
Puisque $x > 0$, alors $x = \sqrt{289}$, ou $x = 17$. Donc, Carla marche une distance de 17 m.
En marchant de A à C à B, David marche une distance de 8 m + 15 m, ou 23 m.
Donc, David marche 6 m de plus que Carla ($23 - 17 = 6$).

Réponse : (D)

13. Chaque terme de l'expression $10 + 20 + 30 + \cdots + 990 + 1000$ est 10 fois plus grand que le terme correspondant de l'expression $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$. Donc, la somme que l'on cherche est 10 fois plus grande que la somme donnée.
Puisque $1+2+3+\cdots+99+100 = 5050$, alors $10+20+30+\cdots+990+1000$ est égal à 5050×10, ou 50 500.

Réponse : (C)

14. Si trois des élèves reçoivent chacun le plus petit nombre possible de stylos, alors le quatrième élève recevra le plus grand nombre possible de stylos.
Puisque chaque élève reçoit au moins un stylo, le plus petit nombre de stylos que l'élève A peut recevoir est 1.
Or, les élèves reçoivent tous un nombre différent de stylos. Le plus petit nombre de stylos que l'élève B peut recevoir est donc 2 et le plus petit nombre de stylos que l'élève C peut recevoir est 3.
Ces élèves reçoivent un total de 6 stylos et il en reste donc 14 pour l'élève D ($20 - 6 = 14$).
Le plus grand nombre de stylos qu'un élève peut recevoir est 14.

Réponse : (C)

15. Les entiers pairs entre 1 et 103 sont $2 = 2\times 1, 4 = 2\times 2, 6 = 2\times 3, 8 = 2\times 4$, jusqu'à $102 = 2\times 51$ inclusivement.
Puisqu'il y a 51 entiers pairs dans la liste $2, 4, 6, \ldots, 100, 102$, il y a 51 entiers pairs entre 1 et 103.
On cherche ensuite un entier N de manière qu'il y ait 51 entiers impairs entre 4 et N.
On remarque que cette borne inférieure, 4, est 3 de plus que la borne inférieure précédente, 1.
Si on augmente chacun des 51 entiers pairs de la liste précédente de 3, on obtiendra 51 entiers impairs supérieurs à 4.
Ces entiers impairs sont $2 \times 1 + 3 = 5, 2 \times 2 + 3 = 7, 2 \times 3 + 3 = 9, 2 \times 4 + 3 = 11$ et ainsi de suite jusqu'à $2 \times 51 + 3 = 105$ inclusivement.
Puisqu'il y a 51 entiers impairs dans la liste $5, 7, 9, \ldots, 103, 105$, il y a 51 entiers impairs entre 4 et 106.
Donc le nombre d'entiers pairs entre 1 et 103 est le même que le nombre d'entiers impairs entre 4 et 106.

Réponse : (E)

16. On nomme les points S, T, U, V et W, comme dans la figure 1.
Les triangles ombrés sont équilatéraux, de même que le triangle PQR. Leurs angles mesurent donc 60°.
Les angles PSV et PTV mesurent donc 120°, puisque chacun est un angle supplémentaire d'un angle de 60°.
Dans le quadrilatère $PSVT$,

$$\angle SVT = 360^\circ - \angle PSV - \angle SPT - \angle PTV$$

d'où $\angle SVT = 360^\circ - 120^\circ - 60^\circ - 120^\circ$, ou $\angle SVT = 60^\circ$.
$PSVT$ est un parallélogramme, puisque ses angles opposés sont isométriques deux à deux.
Puisque $SV = TV = 2$, alors $PS = PT = 2$ (les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques).
On joint S et T, comme dans la figure 2.
Puisque le triangle STV est isocèle ($SV = TV$) et que $\angle SVT = 60^\circ$, le triangle est équilatéral avec des côtés de longueur 2. Il est donc isométrique aux triangles ombrés.
On joint U à X et W à Y, comme dans la figure 3. De la même manière, les triangles UQX, UXV, WRY et WYV sont isométriques aux triangles ombrés.
Ainsi le triangle PQR peut être divisé en 9 triangles isométriques.
Puisque 3 des 9 triangles sont ombrés, $\frac{3}{9}$ de la surface du triangle PQR est ombrée, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ de la surface.

Figure 1

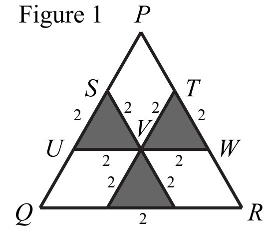


Figure 2

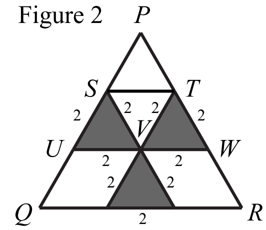
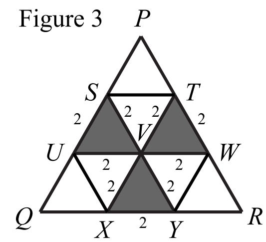


Figure 3



Réponse : (B)

17. L'étendue des tailles des joueuses est la différence entre la taille de la plus grande et celle de la plus petite. Or, la plus grande joueuse, Mahé, a une taille de 188 cm et les tailles des joueuses ont une étendue de 33 cm. Donc Aglaé, la plus petite, a une taille de $(188 - 33)$ cm, ou 155 cm. Donc, l'énoncé (D) permet de déterminer la taille d'Aglaé et il est donc le seul des cinq énoncés qui le permet.
(Pourquoi chacun des quatre autres énoncés ne donne-t-il pas suffisamment d'information pour déterminer la taille d'Aglaé ?)

Réponse : (D)

18. Lorsque Blaise et René conduisent leur voiture l'une vers l'autre à des vitesses contantes respectives de 50 km/h et de 40 km/h, la distance entre elles diminue à une vitesse de $(50 + 40)$ km/h, ou 90 km/h.
Puisqu'il y a une distance de 120 km entre les voitures au départ et que la distance diminue à une vitesse de 90 km/h, elles vont se rencontrer après $\dfrac{120}{90}$ h, ou $\dfrac{4}{3}$ h, ou $1\frac{1}{3}$ h.
(Ou : Après une heure, les voitures se seront rapprochées de 90 km et il restera 30 km à faire. À une vitesse de 90 km/h, cela prendra $\frac{1}{3}$ h, ou 20 minutes, soit 1 h 20 minutes en tout.)
Puisque $\frac{1}{3}$ d'une heure correspond à 20 minutes, les voitures vont se rencontrer après 1 h 20 minutes.

Réponse : (E)

19. Trois des amis ont une moyenne d'âge de 12 ans et 3 mois, ou 147 mois ($12 \times 12 + 3 = 144 + 3 = 147$).
Puisque la moyenne d'âge est égale à la somme des âges divisée par 3, la somme des âges de ces 3 amis est égale à 3×147 mois, ou 441 mois.
Les quatre autres amis ont une moyenne d'âge de 13 ans et 5 mois, ou 161 mois ($12 \times 13 + 5 = 156 + 5 = 161$).
La somme des âges de ces 4 amis est donc égale à 4×161 mois, ou 644 mois.
La somme des âges des 7 amis est de $(441 + 644)$ mois, ou 1085 mois. La moyenne d'âge des 7 amis est de 155 mois ($1085 \div 7 = 155$).

Réponse : (E)

20. Le chiffre des unités du produit $1ABCDE \times 3$ est un 1. Donc, le chiffre des unités du produit $3 \times E$ doit être un 1.
Donc, E doit être un 7. Il n'y a aucune autre possibilité.
On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B\,C\,D\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,B\,C\,D\,7\,1 \end{array}$$

Lorsqu'on commence à effectuer cette multiplication, on obtient $3 \times 7 = 21$ et le 2 représente 2 dizaines (qui devient une retenue de 2 dans la colonne des dizaines).
Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times D + 2$ (dizaines) pour obtenir 7 (dizaines) dans la colonne des dizaines de la réponse. Si on avait fait $3 \times D$, on aurait obtenu 5 (dizaines).
Donc, D doit être un 5. Il n'y a aucune autre possibilité. On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B\,C\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,B\,C\,5\,7\,1 \end{array}$$

Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times C + 1$ (dizaines) pour obtenir un 5 dans la colonne des centaines de la réponse.
Si on avait fait $3 \times C$, on aurait obtenu 4 (centaines).
Donc, C doit être un 8. Il n'y a aucune autre possibilité. On sait que $3 \times 8 + 1 = 25$ (centaines), ce qui représente 5 centaines et une retenue de 2 dans la colonne des milliers. On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,B\,8\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,B\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times B + 2$ (milliers) pour obtenir un 8 dans la colonne des milliers de la réponse. Si on avait fait $3 \times B$, on aurait obtenu 6 (milliers). Donc, B doit être un 2. Il n'y a aucune autre possibilité. On sait que $3 \times 2 + 2 = 8$ (milliers). On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,A\,2\,8\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline A\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

Pour continuer la multiplication, on fait $3 \times A$ (dix milliers) pour obtenir un 2 dans la colonne des dix milliers de la réponse.
Donc, A doit être un 4. Il n'y a aucune autre possibilité. On a donc :

$$\begin{array}{r} 1\,4\,2\,8\,5\,7 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline 4\,2\,8\,5\,7\,1 \end{array}$$

On peut vérifier cette multiplication pour s'assurer qu'elle est bonne.
Donc $A + B + C + D + E = 4 + 2 + 8 + 5 + 7 = 26$.

Réponse : (B)

21. Sur le premier dé à partir du bas, on voit une face qui a 2 points et une face qui a 4 points. Puisque les nombres de points sur deux faces opposées ont toujours une somme de 7, la face opposée à la face de 2 points a 5 points et la face opposée à la face de 4 points a 3 points. Donc la face supérieure de ce dé (celle qui est cachée entre deux dés) a donc 1 point ou 6 points.

    Sur le deuxième dé à partir du bas, il y a un total de 7 points sur ses faces supérieure et inférieure. (Il n'est pas nécessaire de savoir le nombre de points sur chacune de ces faces, mais on peut tout de même déterminer qu'il s'agit de 1 point et de 6 points.)

    De même, sur le troisième dé à partir du bas, il y a un total de 7 points sur ses faces supérieure et inférieure.

    Il y a 3 points sur la face supérieure du quatrième dé à partir du bas. Il y a donc 4 points sur sa face inférieure (celle qui est cachée entre deux dés).

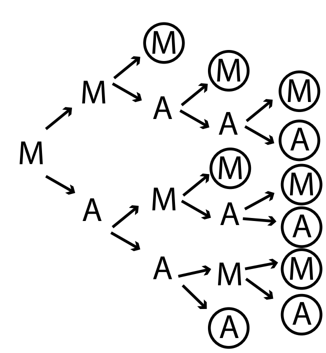
    La somme des points cachés sur les faces entre les dés est donc égale à 19 ($1 + 7 + 7 + 4 = 19$) ou à 24 ($6 + 7 + 7 + 4 = 24$).
    Seule la réponse 24 parait dans les choix de réponse.

Réponse : (C)

22. Pour que l'expression $Y^X - W^V$ ait la plus grande valeur possible, on attribue à Y^X la plus grande valeur possible, tout en attribuant à W^V la plus petite valeur possible.
    Pour que Y^X ait la plus grande valeur possible, on choisit les plus grandes valeurs possibles pour Y et X. On attribuera aussi à W et à V les deux plus petites valeurs possibles.
    Donc Y et X auront pour valeurs respectives 4 et 5 dans un ordre quelconque.
    Puisque $4^5 = 1024$ et $5^4 = 625$, on choisit $Y = 4$ et $X = 5$ pour que la valeur de Y^X soit aussi grande que possible.
    De même, W et V auront pour valeurs respectives 2 et 3 dans un ordre quelconque.
    Puisque $2^3 = 8$ et $3^2 = 9$, on choisit $W = 2$ et $V = 3$ pour que la valeur de W^V soit aussi petite que possible.
    La plus grande valeur possible de l'expression $Y^X - W^V$ est égale à $4^5 - 2^3$, ou $1024 - 8$, ou 1016.
    Ainsi $X + V = 5 + 3$, ou $X + V = 8$.

Réponse : (D)

23. On utilisera la lettre M pour représenter une partie que Marc a gagnée et la lettre A pour représenter une partie qu'Alain a gagnée.
    On utilise un diagramme en arbre pour représenter tous les résultats possibles.
    La lettre M à l'extrême gauche indique la première partie gagnée par Marc.
    La colonne immédiatement à la droite de ce M indique les deux résultats possibles de la deuxième partie : Marc peut gagner (M) ou Alain peut gagner (A).
    Les troisième, quatrième et cinquième colonnes représentent les résultats possibles respectifs des 3e, 4e et 5e parties.

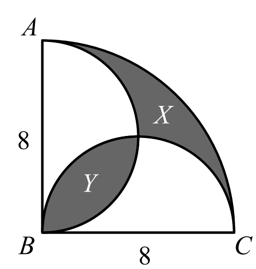


    Chaque branche de l'arbre est composée de flèches qui relient les résultats des parties successives jusqu'à ce qu'un champion soit déclaré.
    Une fois que Marc a gagné trois parties ou qu'Alain a gagné trois parties, la branche est terminée

et la lettre représentant le champion est encerclée.
Puisque le premier joueur qui gagne trois parties est déclaré champion, Marc pourrait devenir champion en gagnant les deuxième et troisième parties, puisqu'il a déjà gagné la première.
Cette façon de devenir champion est représentée par la première branche de l'arbre ou le M final est encerclé pour indiquer que Marc est champion
On peut aussi la représenter en écrivant MMM.
Puisqu'on nous demande de déterminer la probabilité pour que Marc devienne champion, on identifie les branches qui contiennent trois M (celles qui se terminent par un M encerclé).
Il y a 6 telles branches : MMM, MMAM, MMAAM, MAMM, MAMAM et MAAMM.
Toutes les autres branches se terminent par un A encerclé, ce qui indique que dans ces cas, Alain a gagné trois parties et est déclaré champion.
Puisque chacun a les mêmes chances de gagner une partie, Marc peut gagner une partie avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et Alain peut gagner une partie avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.
Parmi les six façons pour Marc de devenir champion (voir la liste ci-haut), une seule se termine après trois parties (MMM).
La probabilité pour que Marc devienne champion après 3 parties est égale à la probabilité pour qu'il gagne la 2^{e} partie, soit $\frac{1}{2}$, multipliée par la probabilité pour qu'il gagne la troisième partie, soit $\frac{1}{2}$.
La probabilité pour que Marc devienne champion après 3 parties est donc égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{4}$.
Parmi les six façons pour Marc de devenir champion, deux se terminent après quatre parties (MMAM, MAMM).
La probabilité pour que Marc gagne les 2^{e} et 4^{e} parties et qu'Alain gagne la 3^{e} partie (MMAM) est égale à la probabilité pour qu'il gagne la 2^{e} partie, soit $\frac{1}{2}$, multipliée par la probabilité pour qu'Alain gagne la 3^{e} partie, soit $\frac{1}{2}$, multipliée par la probabilité pour que Marc gagne la 4^{e} partie, soit $\frac{1}{2}$.
Dans ce cas, la probabilité pour que Marc devienne champion est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{8}$.
De même, la probabilité pour que Marc devienne champion en gagnant les 3^{e} et 4^{e} parties et en perdant la 2^{e} partie est égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{8}$.
Enfin, Marc peut gagner après exactement cinq parties (il y a 3 possibilités : MMAAM, MAMAM ou MAAMM).
Chacune de ces possibilités a une probabilité égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{16}$.
Si Marc a gagné la première partie, la probabilité pour qu'il devienne champion est égale à $\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16}$, ou $\frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16}$, ou $\frac{4+4+3}{16}$, ou $\frac{11}{16}$.

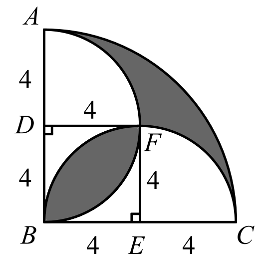
Réponse : (C)

24. X représentera l'aire de la région ombrée à l'extérieur des deux demi-cercles.
Y représentera l'aire de la région ombrée à l'intérieur des deux demi-cercles.

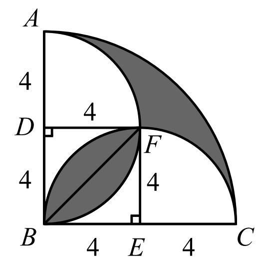


Lorsqu'on additionne l'aire des deux demi-cercles, on compte deux fois l'aire Y (puisque Y est l'aire de la partie où les deux demi-cercles chevauchent).
Donc si on additionne l'aire des deux demi-cercles, qu'on soustrait Y et qu'on ajoute X, on obtient l'aire du quart de disque ABC.
L'aire du quart de disque ABC est donc égale à
(l'aire du demi-cercle de diamètre AB)+(l'aire du demi-cercle de diamètre BC)$-Y+X$.
Or, l'aire du quart de disque ABC est égale à $\frac{1}{4}\pi(8)^2$, ou 16π.
L'aire du demi-cercle de diamètre AB est égale à $\frac{1}{2}\pi(4)^2$, ou 8π.
L'aire du demi-cercle de diamètre BC est aussi égale à 8π.

Donc $16\pi = 8\pi + 8\pi - Y + X$, ou $16\pi = 16\pi - Y + X$, d'où $Y = X$.



Soit D le milieu de AB et E le milieu de BC. Donc $BD = 4$ et $BE = 4$.
On construit un carré $DBEF$. On montrera que F est situé sur chaque demi-cercle.
Puisque ABC est un quart de disque, $\angle ABC = 90°$.
Puisque D est le milieu du diamètre AB, que $BDFE$ est un carré et que $AB = 8$, alors $BD = DF = 4$ et DF est donc un rayon du demi-cercle de diamètre AB. Donc F est situé sur ce demi-cercle.
De même, puisque E est le milieu du diamètre BC, que $BDFE$ est un carré et que $BC = 8$, alors $BE = EF = 4$ et EF est donc un rayon du demi-cercle de diamètre BC et F est situé sur ce demi-cercle.
On détermine maintenant la valeur de Y.



On trace la diagonale BF du carré $DBEF$.
Par symétrie, BF divise la région ombrée d'aire Y en deux régions de même aire.
L'aire de chacune de ces régions, $\frac{Y}{2}$, est égale à l'aire du quart de cercle BEF moins l'aire du triangle BEF.
Donc $\frac{Y}{2} = \frac{1}{4}\pi(4)^2 - \frac{1}{2}(4)(4)$, d'où $\frac{Y}{2} = 4\pi - 8$, ou $Y = 8\pi - 16$.

L'aire totale des deux régions ombrées est égale à $X + Y$, ou $2Y$, ou $16\pi - 32$.
Parmi les choix de réponse, $16\pi - 32$ est plus près de 18,3.

Réponse : (D)

25. *Solution 1*
Soit n, d et r les nombres respectifs de bols noirs, dorés et rouges (n, d et r sont des entiers non négatifs).
Puisque Boris empile 600 bols, alors $n + d + r = 600$. De plus, on sait que n est un multiple de 2, d est un multiple de 3 et r est un multiple de 6.
On récrit l'équation sous la forme $d = 600 - n - r$ et on considère le membre de droite de l'équation.
Puisque 600 est un multiple de 2, que n est un multiple de 2 et que r est un multiple de 2 (tout multiple de 6 est un multiple de 2), alors $600 - n - r$ est un multiple de 2 (la différence de deux nombres pairs est paire).
Puisque le membre de droite de l'équation est un multiple de 2, le membre de gauche, d, est aussi un multiple de 2.
Or, on sait que d est un multiple de 3. Puisque d est aussi un multiple de 2, il est un multiple pair de 3, c'est-à-dire un multiple de 6.
De même, on récrit l'équation sous la forme $n = 600 - d - r$ et on considère le membre de droite de l'équation : 600 est un multiple de 6, d est un multiple de 6 et r est un multiple de 6. Donc $600 - d - r$ est un multiple de 6 (la différence de multiples de 6 est un multiple de 6).
Puisque le membre de droite est un multiple de 6, le membre de gauche, n, est aussi un multiple de 6.
Donc n, d et r sont des multiples de 6. On peut donc écrire $n = 6N$, $d = 6D$ et $r = 6R$, où N, D et R sont des entiers non négatifs.
L'équation $n + d + r = 600$ devient donc $6N + 6D + 6R = 600$, qui est équivalente à l'équation $N + D + R = 100$ (on a divisé chaque membre de l'équation par 6).

Chaque solution de l'équation $N + D + R = 100$ correspond à une façon pour Boris d'empiler 600 bols et inversement, chaque façon pour Boris d'empiler les bols correspond à une solution de l'équation $N + D + R = 100$.
Par exemple, la solution $N = 30, D = 50, R = 20$ correspond à $n = 6\times 30 = 180, d = 6\times 50 = 300$, $r = 6 \times 20 = 120$, ce qui correspond à Boris qui empile 180 bols noirs en dessous de 300 bols dorés en dessous de 120 bols rouges.
Puisque $N + D + R = 100$, alors chacune des variables N, D et R a une valeur maximale de 100.
Si $N = 100$, alors $D = R = 0$.
Si $N = 99$, alors $D + R = 100 - B = 1$ et on a donc $D = 0$ et $R = 1$, ou $D = 1$ et $R = 0$.
Donc une fois qu'on attribue des valeurs à N et à D, il n'y a aucun choix pour la valeur de R qui est déterminée par l'équation $R = 100 - N - D$.
Donc pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $N + D + R = 100$, on doit déterminer le nombre de couples (N, D) qui mènent à une solution.
Ainsi dans l'exemple ci-dessous, on a montré que chacun des couples $(100, 0)$, $(99, 0)$ et $(99, 1)$ détermine une solution de l'équation.
On continue de cette manière pour déterminer tous les couples (N, D) (qui détermineront chacun une valeur de R) qui vérifient $N + D + R = 100$.

Valeur de N	Valeur de D	Nombres de bols : n, d, r
100	0	600, 0, 0
99	0	594, 0, 6
99	1	594, 6, 0
98	0	588, 0, 12
98	1	588, 6, 6
98	2	588, 12, 0
97	0	582, 0, 18
97	1	582, 6, 12
97	2	582, 12, 6
97	3	582, 18, 0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$100 - m$	0	$6(100 - m), 0, 6m$
$100 - m$	1	$6(100 - m), 6, 6(m - 1)$
$100 - m$	2	$6(100 - m), 12, 6(m - 2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$100 - m$	m	$6(100 - m), 6m, 0$

On voit, d'après le tableau, que si N est égal à $100 - m$, m étant un entier non négatif inférieur ou égal à 100, alors D peut prendre n'importe quelle valeur entière de 0 à m et qu'il y a alors $m + 1$ valeurs possibles de D.
En d'autres mots, si $N = 100$, il y a 1 valeur possible de D, si $N = 99$, il y a 2 valeurs possibles de D, si $N = 98$, il y a 3 valeurs possibles de D et ainsi de suite.
Chaque baisse de 1 dans le nombre de valeurs possibles de N donne 1 valeur possible de plus de D, jusqu'à ce qu'on arrive à $N = 0$ ($m = 100$), ce qui donne $m + 1$ valeurs, soit $100 + 1$ valeurs, ou 101 valeurs possibles de D $(0, 1, 2, 3, \ldots, 100)$.
Le nombre total de solutions de l'équation $N + D + R = 100$ est donc égal à $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 + 101$.
Or, on sait que la somme des entiers de 1 à s, soit $1 + 2 + 3 + \cdots + s$, est égale à $\dfrac{s(s + 1)}{2}$.

On obtient donc $1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 + 101 = \dfrac{101(102)}{2} = 5151$.
Puisque chacune de ces solutions correspond à une façon pour Boris d'empiler les bols, il y a 5151 façons pour lui d'empiler les bols selon les conditions données.

Solution 2
Soit n le nombre de groupes de 2 bols noirs, d le nombre de groupes de 3 bols dorés de r le nombre de groupes de 6 bols rouges dans une pile.
Il y a donc $2n$ bols noirs, $3d$ bols dorés et $6r$ bols rouges.
Puisqu'il y a 600 bols dans une pile, alors $2n + 3d + 6r = 600$.
On remarque que les nombres de bols noirs, de bols dorés et de bols rouges déterminent la pile (on ne peut pas replacer les bols d'une autre façon). Le nombre de façons d'empiler les bols est donc le même que le nombre de solutions de l'équation $2n + 3d + 6r = 600$, n, d et r étant des entiers supérieurs ou égaux à 0.
Puisque r est supérieur ou égal à 0 et que $6r$ est inférieur ou égal à 600, alors les valeurs possibles de r sont $0, 1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100$.

Lorsque $r = 0$, l'équation devient $2n + 3d = 600$.
Puisque d est supérieur ou égal à 0 et que $3d$ est inférieur ou égal à 600, alors d est inférieur ou égal à 200.
Puisque $2n$ et 600 sont pairs, alors $3d$ est pair, alors d est pair.
Les valeurs possibles de d sont donc $0, 2, 4, \ldots, 196, 198, 200$.
Puisque $200 = 100 \times 2$, il y a 101 valeurs possibles de d.
Lorsque $d = 0$, l'équation devient $2n = 600$, d'où $n = 300$.
Lorsque $d = 2$, l'équation devient $2n = 600 - 3 \times 2$, ou $2n = 594$, d'où $n = 297$.
À chaque fois que d augmente de 2, le nombre de bols dorés augmente de 6 et le nombre de bols noirs doit alors diminuer de 6, ce qui fait que n diminue de 3.
Donc à mesure que les valeurs de d augmentent par tranches de 2, à partir de 2 jusqu'à 200, les valeurs correspondantes de n diminuent par tranches de 3, à partir de 297 jusqu'à 0.
Donc, pour chaque valeur paire de d, il y a une valeur correspondante entière de n.
Donc lorsque $r = 0$, l'équation admet 101 solutions.

Lorsque $r = 1$, l'équation devient $2n + 3d = 600 - 6 \times 1$, ou $2n + 3d = 594$.
Comme ci-haut, d est un nombre pair supérieur ou égal à 0 et inférieur ou égal à $594 \div 3$, ou 198.
Les valeurs possibles de d sont donc $0, 2, 4, \ldots, 194, 196, 198$.
Pour chaque valeur possible de d, il y a une valeur correspondante entière de n.
Donc lorsque $r = 1$, l'équation admet 100 solutions.

On considère une valeur particulière de r. L'équation devient $2b + 3d = 600 - 6r$.
Comme ci-haut, d est un nombre pair supérieur ou égal à 0.
La plus grande valeur possible de d est $\dfrac{600 - 6r}{3}$, ou $200 - 2r$.
Il y a donc $(100 - r) + 1$, ou $101 - r$ valeurs possibles de d. (Pourquoi ?)
À chaque valeur particulière de d, il y a une valeur correspondante entière de n.
Donc pour chaque valeur particulière de r, de 0 à 100, l'équation admet $101 - r$ solutions.

On résume à l'aide d'un tableau :

r	d	n	N$^{\text{bre}}$ de solutions
0	$0, 2, 4, \ldots, 196, 198, 200$	$300, 297, 294, \ldots, 6, 3, 0$	101
1	$0, 2, 4, \ldots, 194, 196, 198$	$297, 294, 291, \ldots, 6, 3, 0$	100
2	$0, 2, 4, \ldots, 192, 194, 196$	$294, 291, 288, \ldots, 6, 3, 0$	99
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
98	$0, 2, 4$	$6, 3, 0$	3
99	$0, 2$	$3, 0$	2
100	0	0	1

Le nombre total de façons d'empiler les bols est donc égal à :

$$101 + 100 + 99 + \cdots + 3 + 2 + 1$$

Or, les entiers de 1 à 100 peuvent être regroupés en 50 paires de nombres ayant chacune une somme de 101 $(1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, \ldots, 50 + 51)$.
Le nombre total de façons d'empiler les bols est donc égal à $101 + 50 \times 101$, ou 5151.

Réponse : (E)