Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2017

le mercredi 12 avril 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 avril 2017

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Dans la boite E, 6 des 30 tasses sont mauves.
Dans la boite E, le rapport du nombre de tasses mauves au nombre total de tasses est égal à $\frac{6}{30} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100}$.
Donc, 20 % des tasses dans la boite E sont mauves.

(b) Lundi, 30 % des 90 tasses de Daniel étaient mauves. Donc, 30 % $\times$ 90 tasses, ou $\frac{30}{100} \times 90$ tasses, ou 27 tasses étaient mauves.

Daniel avait 9 tasses mauves dans la boite D et 6 tasses mauves dans la boite E.
Il avait donc 12 tasses mauves dans la boite F ($27 - 9 - 6 = 12$).

(c) Daniel avait 90 tasses en tout, dont 27 tasses mauves.
Mardi, Aviva a ajouté 9 tasses mauves, ce qui a donné 36 tasses mauves ($27 + 9 = 36$) en tout et un total de 99 tasses ($90 + 9 = 99$).
Basile a apporté des tasses jaunes qu'il a ajoutés aux 99 tasses.
Soit j le nombre de tasses jaunes que Basile a apportées.
Il y a donc un total de $99 + j$ tasses, dont 36 tasses mauves (puisque Basile n'a apporté que des tasses jaunes).

Puisqu'il y a encore 30 % des tasses qui sont mauves, alors $\frac{30}{100}$ de $99 + j$ doit être égal à 36.
Donc $\frac{30}{100} \times (99 + j) = 36$, ou $30(99 + j) = 3600$, d'où $99 + j = 120$, ou $j = 21$.
Donc, Basile a apporté 21 tasses.

2. (a) Abdi arrive à 5 h 02. Il paie donc 5,02 \$.
Caleb arrive à 5 h 10. Il paie donc 5,10 \$.
En tout, ils paient 5,02 \$ + 5,10 \$, ou 10,12 \$.

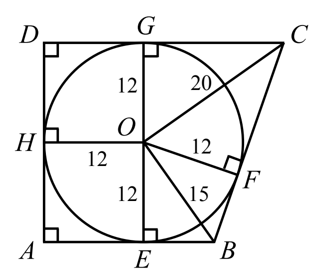
(b) Si Daniel et Émilie étaient arrivés en même temps, ils auraient payé le même prix, soit 12,34 \$ $\div$ 2, ou 6,17 \$.
Ils seraient donc arrivés tous les deux à 6 h 17.
Si Daniel était arrivé 5 minutes plus tôt, à 6 h 12, et Émilie était arrivée 5 minutes plus tard, à 6 h 22, alors Daniel serait arrivé 10 minutes avant Émilie et ils auraient payé un total de 12,34 \$.
Donc, Daniel est arrivé à 6 h 12 et Émilie est arrivée à 6 h 22. (On peut vérifier que ces heures d'arrivée ont une différence de 10 minutes et que le prix total est de 6,12 \$ + 6,22 \$, ou 12,34 \$.)

(c) Pour minimiser le prix que Karla a payé, on maximise le prix qu'Isaac et Jacob ont payé. Or, Isaac et Jacob sont arrivés ensemble et Karla est arrivée plus tard. Cela laisse entendre que Karla a payé plus qu'Isaac ou Jacob. Si Isaac et Jacob payaient chacun $\frac{1}{3}$ de l'addition totale, Karla paierait le dernier tiers, ce qui indiquerait qu'elle est arrivée en même temps qu'eux. Si Isaac et Jacob payaient chacun plus de $\frac{1}{3}$ de l'addition totale, Karla en paierait moins d'un tiers, ce qui indiquerait qu'elle est arrivée avant eux.
On doit donc conclure qu'Isaac et Jacob doivent payer aussi près de $\frac{1}{3}$ de l'addition, sans le dépasser. Or, $18{,}55 \div 3 = 6{,}18333\ldots$ Donc, Isaac et Jacob doivent chacun payer 6,18 \$ et Karla doit payer 6,19 \$ (18,55 \$ − 6,18 \$ − 6,18 \$ = 6,19 \$).
On peut vérifier que si Isaac et Jacob payaient même un cent de plus, Karla paierait moins que chacun d'eux, ce qui signifie qu'elle serait arrivée avant eux :
18,55 \$ − 6,19 \$ − 6,19 \$ = 6,17 \$.

(d) Si Lara arrivait plus tôt que 5 h 39, elle paierait moins de 5,39 \$, ce qui indique que Fabien paierait plus de 6,59 \$ (car 11,98 \$ − 5,39 \$ = 6,59).
Ceci indique que Fabien arriverait après la période de tarification spéciale et ceci contredit l'énoncé. Donc, Lara arrive à 5 h 39 ou après.
Si Lara arrive à partir de 5 h 39 et pas plus tard que 5 h 59, elle paie la somme qui correspond à son heure d'arrivée (de 5,39 \$ à 5,59 \$) .
Fabien paierait alors une somme allant de 6,39 \$ à 11,98 \$ (car 11,98 \$ − 5,59 \$ = 6,39 \$ et 11,98 \$ − 5,39 \$ = 6,59 \$).
Chaque somme de 6,39 \$ à 6,59 \$ à une heure d'arrivée possible pour Fabien, de 6 h 39 à 6 h 59, pendant la période de tarification spéciale.
Donc, chaque heure d'arrivée possible de Lara, de 5 h 39 à 5 h 59, correspond à une heure d'arrivée possible de Fabien, de 6 h 39 à 6 h 59.
Chacune de ces heures est située durant la période de tarification spéciale et les deux heures correspondantes donnent toujours un prix total de 11,98 \$.
Pour s'en convaincre, disons que Lara arrive x minutes après 5 h 39 (x étant un entier et $0 \leq x \leq 20$), alors Fabian arriverait x minutes avant 6 h 59 et le prix total serait de 5,39 \$ + x ¢ + 6,59 \$ − x ¢ , ou 11,98 \$.
Puisque l'heure d'arrivée de Lara et celle de Fabien peuvent être changées l'une pour l'autre pour donner le même prix total, 11,98 \$, Lara pourrait aussi arriver à partir de 6 h 39 jusqu'à 6 h 59.
Il reste à considérer les heures de 6 h 00 à 6 h 38.
Si Lara arrivait dans cet intervalle de temps, le prix varierait de 6,00 \$ à 6,38 \$ et celui de Fabien varierait de 5,60 \$ à 5,98 \$ (car 11,98 \$ − 6,38 \$ = 5,60 \$ et 11,98 \$ − 6,00 \$ = 5,98 \$).
Puisqu'il n'y a aucune heure qui corresponde à un prix dans cet intervalle, il est impossible que Lara soit arrivée à partir de 6 h 39 jusqu'à 6 h 59.

3. (a) Puisque $\angle OPQ = 90°$, le triangle OPQ est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, $OQ^2 = OP^2 + PQ^2$, d'où $OQ^2 = 18^2 + 24^2$, ou $OQ^2 = 900$. Donc $OQ = 30$ (puisque $OQ > 0$).
Le segment de droite OS est un rayon du cercle. Il a donc une longueur de 18.
Donc $SQ = OQ - OS$, d'où $SQ = 30 - 18$, ou $SQ = 12$.

(b) Les côtés AB, BC, CD et DA du quadrilatère sont tangents au cercle aux points respectifs E, F, G et H.

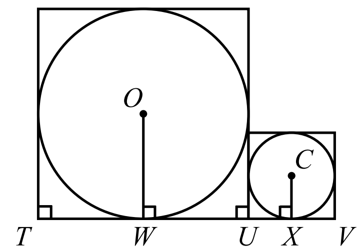


Les rayons OE, OF, OG et OH sont donc perpendiculaires aux côtés correspondants.
Dans le quadrilatère $DHOG$, $\angle OGD = \angle GDH = \angle DHO = 90°$. Donc $\angle GOH = 90°$.
Puisque $OH = OG = 12$ (ce sont des rayons du cercle), alors $DHOG$ est un carré avec des côtés de longueur 12.
De même, $HAEO$ est aussi un carré avec des côtés de longueur 12.
Puisque $\angle OGC = 90°$, le triangle OGC est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, $GC^2 = OC^2 - OG^2$, d'où $GC^2 = 20^2 - 12^2$, ou $GC^2 = 256$. Donc $GC = 16$ (puisque $GC > 0$).
De la même manière, on peut montrer que $FC = 16$.
Puisque $\angle OEB = 90°$, le triangle OEB est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, $EB^2 = OB^2 - OE^2$, d'où $EB^2 = 15^2 - 12^2$, ou $EB^2 = 81$.
Donc $EB = 9$ (puisque $EB > 0$). De la même manière, on peut montrer que $FB = 9$.
Le périmètre de $ABCD$ est égal à $GD + DH + HA + AE + EB + BF + FC + CG$, ou

$4 \times 12 + 2 \times 9 + 2 \times 16$, ou 98.

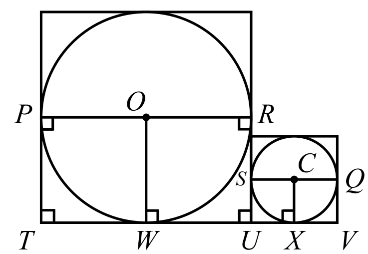
(c) Dans la figure 1 :
Puisque les cercles sont inscrits dans les carrés, TU est tangent au grand cercle au point W et UV est tangent au petit cercle au point X.
Le rayon OW est perpendiculaire à TU et le rayon CX est perpendiculaire à UV.

Figure 1



Dans la figure 2 :
Le diamètre du grand cercle est égal à la longueur d'un côté du grand carré.
Pour le voir, on nomme P et R les points de contact du cercle avec les côtés verticaux du carré.
On trace PO et RO.
Le rayon OP est perpendiculaire à PT et le rayon OR est perpendiculaire à RU.

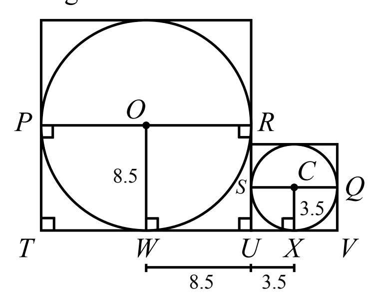
Figure 2



Dans le quadrilatère $PTWO$, $\angle OPT = \angle PTW = \angle TWO = 90°$. Donc $\angle POW = 90°$.
De même, dans le quadrilatère $RUWO$, $\angle ROW = 90°$.
Donc, $\angle POW + \angle ROW = 180°$ et le segment PR passe donc au point O. Il est donc un diamètre du grand cercle.
Dans le quadrilatère $PTUR$, les quatre angles mesurent $90°$. $PTUR$ est donc un rectangle.
De même, si S et Q sont les points de contact du petit cercle avec les côtés verticaux du petit carré, alors SQ est un diamètre du petit cercle et $SUVQ$ est un rectangle.

Dans la figure 3 :
Puisque le grand carré a une aire de 289, ses côtés ont une longueur de $\sqrt{289}$, ou 17.
Le diamètre du grand cercle a la même longueur que ces côtés. Donc $PR = TU = 17$.
Puisque O est le milieu de PR et que OW est perpendiculaire à TU, alors W est le milieu de TU.
Donc $WU = OR = OW = 17 \div 2 = 8{,}5$.
Puisque le petit carré a une aire de 49, ses côtés ont une longueur de 7.

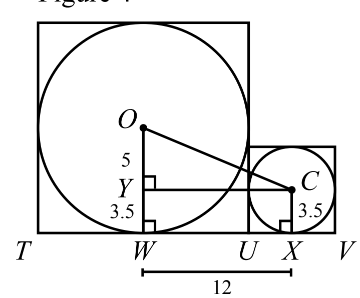
Figure 3



De même, X est le milieu de UV, donc $UX = SC = CX = 7 \div 2 = 3{,}5$.

Dans la figure 4 :
Au point C, on construit un segment parallèle à XW, qui joint OW en Y.
Dans le quadrilatère $YWXC$, CY est parallèle à XW, YW est parallèle à XW et CX est perpendiculaire à XW.
Donc $YWXC$ est un rectangle. Donc, $CX = YW = 3{,}5$ et $CY = XW = XU + WU = 3{,}5 + 8{,}5 = 12$.
Puisque $\angle OYC = 90°$, le triangle OYC est rectangle. De plus, $CY = 12$ et $OY = OW - YW = 8{,}5 - 3{,}5 = 5$.

Figure 4



D'après le théorème de Pythagore, $OC^2 = CY^2 + OY^2$, d'où $OC^2 = 12^2 + 5^2$, ou $OC^2 = 144 + 25$, ou $OC^2 = 169$.
Donc $OC = \sqrt{169}$, ou $OC = 13$ (puisque $OC > 0$).

4. (a) L'aire totale du rectangle Koeller avec $m = 14$ et $n = 10$ est égale à $m \times n$, c'est-à-dire à 14×10, ou 140.
Le rectangle ombré à l'intérieur a pour dimensions $(m-2)$ sur $(n-2)$, puisqu'il y a des carrés blancs tout autour et chaque dimension du grand rectangle est diminuée de 2.
L'aire du rectangle ombré qui correspond au rectangle Koeller 14×10 est donc égale à $(14-2) \times (10-2)$, ou 12×8, ou 96.
L'aire de la partie non ombrée est égale à la différence entre l'aire totale et celle de la partie ombrée. Elle est donc égale à $mn - (m-2)(n-2)$, ou $mn - (mn - 2m - 2n + 4)$, ou $2m + 2n - 4$, soit $2 \times 14 + 2 \times 10 - 4$, ou 44.
Le rapport r de l'aire de la partie ombrée à l'aire de la partie non ombrée est égal à $\frac{96}{44}$, ou $\frac{24}{11}$ (ou 24 : 11).

(b) On a vu, dans la partie (a), que pour un rectangle Koeller m sur n, l'aire de la partie ombrée est égale à $(m-2)(n-2)$ et l'aire de la partie non ombrée est égale à $2m+2n-4$.
Donc, $r = \frac{(m-2)(n-2)}{2m+2n-4}$. Lorsque $n = 4$, $r = \frac{2(m-2)}{2m+4} = \frac{2(m-2)}{2(m+2)} = \frac{m-2}{m+2}$.
On récrit $\frac{m-2}{m+2}$ comme suit : $\frac{m+2-4}{m+2} = \frac{m+2}{m+2} - \frac{4}{m+2} = 1 - \frac{4}{m+2}$.
On cherche toutes les valeurs entières et strictement positives de u pour lesquelles $r = 1 - \frac{4}{m+2} = \frac{u}{77}$, m étant un entier quelconque et $m \geq 3$.
On récrit cette équation :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4}{m+2} &= \frac{u}{77} \\ 1 - \frac{u}{77} &= \frac{4}{m+2} \\ \frac{77-u}{77} &= \frac{4}{m+2} \\ (m+2)(77-u) &= 4 \times 77 \end{aligned}$$

Puisque u et m sont des entiers, $(m+2)(77-u)$ est le produit de deux entiers.
Étant donné deux entiers strictement positifs a et b tels que $ab = 4 \times 77 = 2^2 \times 7 \times 11$, il y a six possibilités (a, b) où $a < b$.
Ce sont : $(1, 308), (2, 154), (4, 77), (7, 44), (11, 28)$ et $(14, 22)$.
Puisque $m \geq 3$, alors $m + 2 \geq 5$. Donc, $m + 2$ ne peut être égal à $1, 2$ ou 4.
Par contre, $m+2$ peut être égal à n'importe quel des 9 autres diviseurs, soit $7, 11, 14, 22, 28, 44, 77, 154$ ou 308.
On utilise le tableau suivant pour déterminer les valeurs possibles de u sachant que $(m+2)(77-u) = 2^2 \times 7 \times 11$ et $m + 2 \geq 5$.

$m+2$	7	11	14	22	28	44	77	154	308
$77-u$	44	28	22	14	11	7	4	2	1
u	33	49	55	63	66	70	73	75	76

Les valeurs entières de u pour lesquelles il existe un rectangle Koeller avec $n = 4$ et $r = \frac{u}{77}$ sont $u = 33, 49, 55, 63, 66, 70, 73, 75, 76$.
(Par exemple, pour le rectangle Koeller 5 sur 4, on a $r = \frac{m-2}{m+2} = \frac{3}{7} = \frac{33}{77}$, d'où $u = 33$.)

(c) Comme dans la partie (b), $r = \dfrac{(m-2)(n-2)}{2m+2n-4}$.

Lorsque $n = 10$, $r = \dfrac{8(m-2)}{2m+16} = \dfrac{4(m-2)}{m+8}$.

On récrit cette équation :

$$\begin{aligned}
r &= \frac{4(m-2)}{m+8} \\
\frac{r}{4} &= \frac{m-2}{m+8} \\
\frac{r}{4} &= \frac{m+8-10}{m+8} \\
\frac{r}{4} &= \frac{m+8}{m+8} - \frac{10}{m+8} \\
\frac{r}{4} &= 1 - \frac{10}{m+8} \\
\frac{10}{m+8} &= 1 - \frac{r}{4} \\
\frac{10}{m+8} &= 1 - \frac{u}{4p^2} \quad \text{(puisque } r = \frac{u}{p^2}\text{)} \\
\frac{10}{m+8} &= \frac{4p^2-u}{4p^2} \\
40p^2 &= (m+8)(4p^2-u)
\end{aligned}$$

Puisque p, u et m sont des entiers, $(m+8)(4p^2-u)$ est le produit de deux entiers.
On doit déterminer tous les nombres premiers p pour lesquels il existe exactement 17 valeurs entières positives de u pour des rectangles Koeller qui vérifient l'équation $40p^2 = (m+8)(4p^2-u)$.
Pour $p = 2, 3, 5, 7$ et pour $p \geq 11$, on procède comme suit :

- On détermine la valeur de $40p^2$.
- On compte le nombre de diviseurs de $40p^2$.
- On élimine les valeurs possibles de $m+8$, éliminant ainsi les valeurs possibles de $4p^2-u$.
- On compte le nombre de valeurs de u en comptant le nombre de valeurs de $4p^2-u$.

Lorsque $p = 2$, alors $40p^2 = 40 \times 2^2 = 2^5 \times 5$. Donc $2^5 \times 5 = (m+8)(16-u)$.
Chaque diviseur de $2^5 \times 5$ peut s'écrire sous forme $2^i \times 5^j$, i et j étant des entiers et $0 \leq i \leq 5$, $0 \leq j \leq 1$.
Il y a donc 6 valeurs possibles de i (chacun des entiers de 0 à 5) et 2 valeurs possibles de j (0 ou 1). Il y a donc 6×2 diviseurs, ou 12 diviseurs de $2^5 \times 5$.
Puisque $2^5 \times 5 = (m+8)(16-u)$, il existe au plus 12 valeurs entières de $16-u$ (les 12 diviseurs de $2^5 \times 5$) et il existe donc au plus 12 valeurs entières de u.
Donc lorsque $p = 2$, il ne peut y avoir exactement 17 valeurs entières positives de u.

Lorsque $p = 5$, alors $40p^2 = 40 \times 5^2 = 2^3 \times 5^3$. Donc $2^3 \times 5^3 = (m+8)(100-u)$.
Chaque diviseur de $2^3 \times 5^3$ peut s'écrire sous forme $2^i \times 5^j$, i et j étant des entiers et $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 3$.
Il y a donc 4 valeurs possibles de i et 4 valeurs possibles de j. Il y a donc 4×4 diviseurs, ou 16 diviseurs de $2^3 \times 5^3$.
Puisque $2^3 \times 5^3 = (m+8)(100-u)$, il existe au plus 16 valeurs entières de $100-u$, et il existe donc au plus 16 valeurs entières de u.
Donc lorsque $p = 5$, il ne peut y avoir exactement 17 valeurs entières positives de u.

Lorsque $p = 3$, alors $40p^2 = 40 \times 3^2 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Donc $2^3 \times 3^2 \times 5 = (m + 8)(36 - u)$.
Chaque diviseur de $2^3 \times 3^2 \times 5$ peut s'écrire sous forme $2^i \times 3^j \times 5^k$, i, j et k étant des entiers et $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 2$, $0 \leq k \leq 1$.
Il y a donc $4 \times 3 \times 2$ diviseurs, ou 24 diviseurs de $2^3 \times 3^2 \times 5$.
Puisque $m \geq 3$, alors $m + 8 \geq 11$. Les diviseurs de $2^3 \times 3^2 \times 5$ que $m + 8$ ne peut avoir pour valeur sont donc $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ et 10.
Puisqu'il y a 9 diviseurs que $m + 8$ ne peut avoir pour valeur, il y a 9 diviseurs que $36 - u$ ne peut avoir pour valeur. (On peut déterminer ces diviseurs en divisant $2^3 \times 3^2 \times 5$ par chacun des 9 diviseurs $1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ et 10.)
Il y a donc 15 valeurs entières de $36 - u$ $(24 - 9 = 15)$ et il y a donc 15 valeurs entières de u lorsque $p = 3$.
Donc lorsque $p = 3$, il ne peut y avoir exactement 17 valeurs entières positives de u.

Lorsque $p = 7$, alors $40p^2 = 40 \times 7^2 = 2^3 \times 5 \times 7^2$. Donc $2^3 \times 5 \times 7^2 = (m + 8)(196 - u)$.
Chaque diviseur de $2^3 \times 5 \times 7^2$ peut s'écrire sous forme $2^i \times 5^j \times 7^k$, i, j et k étant des entiers et $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 1$, $0 \leq k \leq 2$.
Il y a donc $4 \times 2 \times 3$ diviseurs, ou 24 diviseurs de $2^3 \times 5 \times 7^2$.
Puisque $m + 8 \geq 11$, les diviseurs de $2^3 \times 5 \times 7^2$ que $m + 8$ ne peut avoir pour valeur sont $1, 2, 4, 5, 7, 8$ et 10.
Puisqu'il y a 7 diviseurs que $m+8$ ne peut avoir pour valeur, il y a 7 diviseurs que $196-u$ ne peut avoir pour valeur. (On peut déterminer ces diviseurs en divisant $2^3 \times 5 \times 7^2$ par chacun des 7 diviseurs $1, 2, 4, 5, 7, 8$ et 10. On remarque que chacun des diviseurs que $196 - u$ peut avoir pour diviseur est inférieur à 196, ce qui indique que u prend des valeurs positives.)
Il y a donc 17 valeurs de $196 - u$ $(24 - 7 = 17)$ et donc 17 valeurs entières de u lorsque $p = 7$.

Pour tous les autres nombres premiers p $(p \geq 11)$, on a $40p^2 = 2^3 \times 5 \times p^2$, d'où $2^3 \times 5 \times p^2 = (m + 8)(4p^2 - u)$.
Puisque $p \neq 2$ et $p \neq 5$, chaque diviseur de $2^3 \times 5 \times p^2$ peut être écrit sous forme $2^i \times 5^j \times p^k$, i, j et k étant des entiers et $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 1$, $0 \leq k \leq 2$.
Il y a donc $4 \times 2 \times 3$ diviseurs, ou 24 diviseurs de $2^3 \times 5 \times p^2$.
Puisque $m + 8 \geq 11$ et $p \geq 11$, les diviseurs de $2^3 \times 5 \times p^2$ que $m + 8$ ne peut avoir pour valeur sont $1, 2, 4, 5, 8$ et 10.
Puisqu'il y a 6 diviseurs que $m + 8$ ne peut avoir pour valeur, il y a 6 diviseurs que $4p^2 - u$ ne peut avoir pour valeur. (On peut déterminer ces diviseurs en divisant $2^3 \times 5 \times p^2$ par chacun des 6 diviseurs $1, 2, 4, 5, 8$ et 10. On remarque que chacun des diviseurs que $4p^2 - u$ peut avoir pour diviseur est inférieur à $4p^2$, ce qui indique que u prend des valeurs positives.)
Il y a donc 18 valeurs entières de $4p^2 - u$ $(24 - 6 = 18)$ et il y a donc 18 valeurs entières de u pour tous nombres premiers p $(p \geq 11)$.

Donc, $p = 7$ est le seul nombre premier pour lequel il existe exactement 17 valeurs entières strictement positives de u pour des rectangles Koeller avec $n = 10$ et $r = \dfrac{u}{p^2}$.