



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le mercredi 12 avril 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 avril 2017

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 75 minutes

©2017 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
 - Chacune vaut 2 ou 3 points.
 - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
 - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
 - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
 - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
 - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
 - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Lundi, Daniel avait 90 tasses, chacune étant mauve ou jaune. Il a placé les tasses dans trois boîtes comme suit :

Boîte D : 9 tasses mauves et 23 tasses jaunes, soit 32 tasses en tout

Boîte E : 6 tasses mauves et 24 tasses jaunes, soit 30 tasses en tout

Boîte F : 28 tasses en tout



(a) Quel pourcentage des tasses dans la boîte E étaient mauves ?



(b) Lundi, 30 % des tasses de Daniel étaient mauves. Combien y avait-il de tasses mauves dans la boîte F ?



(c) Mardi, Aviva apporte 9 tasses mauves qu'elle ajoute aux tasses de Daniel. Basile apporte des tasses jaunes qu'il ajoute aux tasses de Daniel. Après ces ajouts, il y a encore 30 % des tasses de Daniel qui sont mauves. Combien de tasses Basile a-t-il apportées ?

2. Lundi le restaurant Matinal offre une tarification spéciale. Si un client arrive entre 4 h 30 et 7 h 00, l'heure à laquelle il arrive, en heures et en minutes, devient le prix d'un déjeuner, en dollars et en cents. Par exemple, si un client arrive à 5 h 23, il paie 5,23 \$.



(a) Abdi arrive à 5 h 02 et Caleb arrive à 5 h 10. Combien paient-ils en tout ?



(b) Robert arrive 10 minutes avant Émilie et chacun est arrivé pendant la période de tarification spéciale. En tout, ils paient 12,34 \$. À quelle heure chacun est-il arrivé ?



(c) Isaac et Jacob arrivent ensemble et Karla arrive plus tard. Chacun est arrivé pendant la période de tarification spéciale. En tout, ils paient 18,55 \$. Quel est le prix minimum que Karla aurait pu payer ?

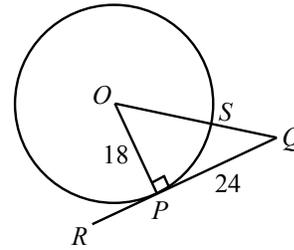


(d) Lara et Fabien arrivent séparément pendant la période de tarification spéciale. En tout, ils paient 11,98 \$. Déterminer les intervalles de temps pendant lesquels Lara aurait pu arriver.

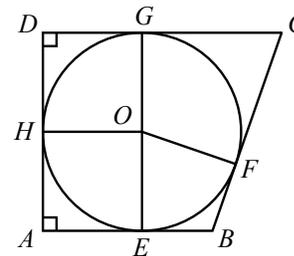
3. Une *tangente* à un cercle est une droite ou un segment de droite qui touche le cercle en exactement un point et ne le toucherait pas de nouveau même si on l'étendait à l'infini dans les deux sens. Lorsqu'une tangente à un cercle de centre O touche le cercle au point P , le rayon OP est perpendiculaire à la tangente.



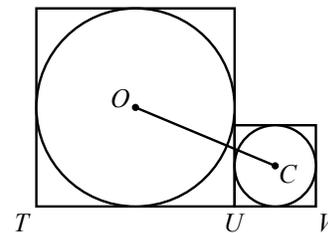
- (a) Dans la figure ci-contre, O est le centre d'un cercle de rayon 18. QR est tangent au cercle au point P . Le segment de droite OQ coupe le cercle au point S . Déterminer la longueur de SQ .



- (b) On dit qu'un cercle est *inscrit* dans un quadrilatère si chaque côté du quadrilatère est tangent au cercle. Dans la figure ci-contre, un cercle de centre O est inscrit dans un quadrilatère $ABCD$, touchant AB en E , BC en F , CD en G et DA en H . Sachant que le cercle a un rayon de 12, que $OB = 15$, $OC = 20$ et $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, quel est le périmètre du quadrilatère $ABCD$?

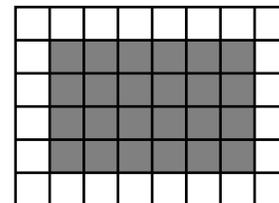


- (c) Dans la figure ci-contre, deux cercles de centres O et C sont inscrits dans deux carrés. Le grand carré a une aire de 289 et le petit carré a une aire de 49. Sachant que T, U et V sont situés sur une même droite, déterminer la longueur de OC .



4. Un rectangle *Koeller* :

- est un rectangle m sur n , m et n étant des entiers avec $m \geq 3$ et $n \geq 3$,
- avec des droites parallèles à ses côtés qui le divisent en carrés 1 sur 1 et
- dont les carrés 1 sur 1 qui longent ses côtés sont blancs et les carrés 1 sur 1 qui ne longent pas ses côtés sont ombrés.



La figure est un exemple d'un rectangle Koeller avec $m = 8$ et $n = 6$.

Étant donné un rectangle Koeller, soit r le rapport de l'aire de la partie ombrée à l'aire de la partie non ombrée.



- (a) Quelle est la valeur de r pour un rectangle Koeller avec $m = 14$ et $n = 10$?



- (b) Déterminer toutes les valeurs entières et strictement positives de u pour lesquelles il existe un rectangle Koeller avec $n = 4$ et $r = \frac{u}{77}$.



- (c) Déterminer tous les nombres premiers p pour lesquels il existe exactement 17 valeurs entières strictement positives de u pour des rectangles Koeller avec $n = 10$ et $r = \frac{u}{p^2}$.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2017! Chaque année, plus de 220 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2017.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2017/2018
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours