Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2017

le mercredi 12 avril 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 13 avril 2017
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Les stylos rouges se vendent en boites de 6 stylos.
Donc, 5 boites de stylos rouges contiennent 30 stylos ($5 \times 6 = 30$).
Les stylos bleus se vendent en boites de 9 stylos.
Donc, 3 boites de stylos bleus contiennent 27 stylos ($3 \times 9 = 27$).
En tout, Igor a acheté 57 stylos ($30 + 27 = 57$).

(b) Rachel a acheté 21 boites de stylos rouges, soit un total de 126 stylos rouges ($21 \times 6 = 126$).
Elle a acheté 369 stylos en tout. Elle a donc acheté 243 stylos bleus ($369 - 126 = 243$).
Puisque les stylos bleus se vendent en boites de 9 stylos, elle a acheté 27 boites de stylos bleus ($243 \div 9 = 27$).

(c) *Solution 1*
Supposons que Suzanne achète r boites de stylos rouges et b boites de stylos bleus, r et b étant des entiers positifs ou nuls.
Donc, elle achète $6r$ stylos rouges et $9b$ stylos bleus.
Si elle achetait 31 stylos en tout, on aurait $6r + 9b = 31$.
Or, si on factorise le membre de gauche de cette équation, on obtient $3(2r + 3b) = 31$.
Puisque r et b sont des entiers, alors $2r + 3b$ est aussi un entier, ce qui signifie que le membre de gauche de l'équation est un multiple de 3.
Puisque le membre de droite, 31, n'est pas un multiple de 3, l'équation n'admet aucune solution. C'est-à-dire qu'il n'existe pas d'entiers r et b qui vérifient l'équation $6r+9b = 31$.
Donc, il est impossible pour Suzanne d'acheter exactement 31 stylos.

Solution 2
Supposons que Suzanne achète r boites de stylos rouges et b boites de stylos bleus, r et b étant des entiers positifs ou nuls.
Donc, elle achète $6r$ stylos rouges et $9b$ stylos bleus.
Si elle achetait 31 stylos en tout, elle aurait $6r + 9b = 31$.
La plus petite valeur possible de b est 0 et la plus grande valeur possible de b est 3, puisque si $b \geq 4$, alors le nombre de stylos achetés serait supérieur ou égal à 36 ($4 \times 9 = 36$).
On isole r dans l'équation $6r + 9b = 31$ pour obtenir $6r = 31 - 9b$, puis $r = \dfrac{31 - 9b}{6}$.
On utilise cette équation, ainsi que les les valeurs de b qui varient de 0 à 3 pour calculer les valeurs correspondantes de r. Les valeurs sont placées dans le tableau suivant :

b	$r = \dfrac{31 - 9b}{6}$
0	$r = \dfrac{31 - 9(0)}{6} = \dfrac{31}{6}$
1	$r = \dfrac{31 - 9(1)}{6} = \dfrac{22}{6}$
2	$r = \dfrac{31 - 9(2)}{6} = \dfrac{13}{6}$
3	$r = \dfrac{31 - 9(3)}{6} = \dfrac{4}{6}$

Pour chacune des valeurs de b, la valeur correspondante de r n'est jamais un entier.
Donc, il n'existe pas d'entiers r et b qui vérifient l'équation $6r + 9b = 31$. Il est donc

impossible pour Suzanne d'acheter exactement 31 stylos.

2. (a) On exprime $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{4}$ au moyen du dénominateur commun 40 : $\frac{1}{5} = \frac{8}{40}$ et $\frac{1}{4} = \frac{10}{40}$.
On veut que $\frac{n}{40} > \frac{8}{40}$ et $\frac{n}{40} < \frac{10}{40}$. On doit donc avoir $n > 8$ et $n < 10$.
La seule valeur entière de n qui vérifie ces deux inéquations est $n = 9$.

(b) On exprime $\frac{m}{8}$ et $\frac{1}{3}$ au moyen du dénominateur commun 24 : $\frac{m}{8} = \frac{3m}{24}$ et $\frac{1}{3} = \frac{8}{24}$.
On veut que $\frac{3m}{24} > \frac{8}{24}$. On doit donc avoir $3m > 8$, ou $m > \frac{8}{3}$.
Puisque $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ et que m est un entier, alors $m \geq 3$.
On exprime $\frac{m+1}{8}$ et $\frac{2}{3}$ au moyen du dénominateur commun 24 : $\frac{m+1}{8} = \frac{3(m+1)}{24}$ et $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$.
On doit avoir $\frac{3(m+1)}{24} < \frac{16}{24}$. On doit donc avoir $3m + 3 < 16$, ou $3m < 13$, ou $m < \frac{13}{3}$.
Puisque $\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$ et que m est un entier, alors $m \leq 4$.
Les valeurs entières de m qui vérifient $m \geq 3$ et $m \leq 4$ sont $m = 3$ et $m = 4$.

(c) Au début du weekend, Fiona avait joué 30 matchs et gagné g matchs. Son ratio de victoires était donc égal à $\frac{g}{30}$.
Puisque son ratio de victoires était supérieur à 0,5, ou $\frac{1}{2}$, alors $\frac{g}{30} > \frac{1}{2}$.
Puisque $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$, on a $\frac{g}{30} > \frac{15}{30}$, d'où $g > 15$.
Pendant le weekend, Fiona joue 5 matchs pour un total de 35 matchs joués $(30 + 5 = 35)$.
Puisqu'elle a gagné 3 de ces matchs, elle a un total de $g+3$ victoires et son ratio de victoires est donc égal à $\frac{g+3}{35}$.
À la fin du weekend, le ratio de victoires de Fiona est inférieur à 0,7, ou $\frac{7}{10}$. On a donc $\frac{g+3}{35} < \frac{7}{10}$.
On récrit cette inéquation au moyen du dénominateur commun 70. On obtient $\frac{2(g+3)}{70} < \frac{49}{70}$, d'où $2(g+3) < 49$, ou $2g + 6 < 49$, ou $2g < 43$, ou $g < \frac{43}{2}$.
Puisque $\frac{43}{2} = 21\frac{1}{2}$ et que g est un entier, alors $g \leq 21$.
Les valeurs entières de g qui vérifient $g > 15$ et $g \leq 21$ sont $g = 16, 17, 18, 19, 20, 21$.

3. (a) Puisque les cordes DE et FG se coupent en X, alors $(DX)(EX) = (FX)(GX)$, ou $(DX)(8) = (6)(4)$. On a donc $DX = \frac{(6)(4)}{8}$, ou $DX = 3$.
DX a une longueur de 3.

(b) Puisque les cordes JK et LM se coupent en X, alors $(JX)(KX) = (LX)(MX)$, ou $(8y)(10) = (16)(y + 9)$. On a donc $80y = 16y + 144$, d'où $64y = 144$, ou $y = \frac{144}{64}$, ou $y = \frac{9}{4}$.

(c) Puisque les cordes PQ et ST se coupent en U, alors $(PU)(QU) = (SU)(TU)$.
Puisque $TU = TV + UV$, alors $TU = 6 + n$.
L'équation $(PU)(QU) = (SU)(TU)$ devient $(m)(5) = (3)(6 + n)$, ou $5m = 18 + 3n$.
Puisque les cordes PR et ST se coupent en V, alors $(PV)(RV) = (TV)(SV)$.
Puisque $SV = SU + UV$, alors $SV = 3 + n$.
L'équation $(PV)(RV) = (TV)(SV)$ devient $(n)(8) = (6)(3 + n)$, ou $8n = 18 + 6n$, ou $2n = 18$, ou $n = 9$.
On reporte $n = 9$ dans $5m = 18+3n$ pour obtenir $5m = 18+3(9)$, ou $5m = 45$, ou $m = 9$.
Donc $m = 9$ et $n = 9$.

4. (a) Dan, Yona et Tam ont respectivement 6, 4 et 8 bonbons après la 2e étape.
Puisqu'ils ont tous un nombre pair de bonbons, aucun bonbon n'est rejeté à la 1re étape.
Durant la 2e étape, Dan donne la moitié de ses 6 bonbons à Yona et reçoit la moitié des 8 bonbons de Tam. Il a maintenant 7 bonbons $(6 - 3 + 4 = 7)$.
Yona donne la moitié de ses 4 bonbons à Tam et reçoit la moitié des 6 bonbons de Dan. Elle a maintenant 5 bonbons $(4 - 2 + 3 = 5)$.
Tam donne la moitié de ses 8 bonbons à Dan et reçoit la moitié des 4 bonbons de Yona. Il a maintenant 6 bonbons $(8 - 4 + 2 = 6)$.
Puisque Dan a 7 bonbons et que Yan en a 5, ils se débarassent d'un bonbon chacun, tandis que Tam, qui a un nombre pair de bonbons, ne fait rien.
Ces étapes sont résumées dans le tableau ci-contre.

On continue à remplir le tableau jusqu'à la fin. À la fin, Dan, Yona et Tam ont chacun 4 bonbons.

	Dan	Yona	Tam
Au départ	3	7	10
Après la 1re étape	2	6	10
Après la 2e étape	6	4	8
Après la 2e étape	7	5	6
Après la 1re étape	6	4	6
Après la 2e étape	6	5	5
Après la 1re étape	6	4	4
Après la 2e étape	5	5	4
Après la 1re étape	4	4	4

(b) Dan, Yona et Tam ont respectivement 16, 0 et 0 bonbons au départ.
Les résultats après chaque étape sont donnés dans le tableau ci-contre. (Ceux de la 1re étape sont ignorés lorsque chaque élève a un nombre pair de bonbons.)
À la fin, chacun a 4 bonbons.

	Dan	Yona	Tam
Au départ	16	0	0
Après la 2e étape	8	8	0
Après la 2e étape	4	8	4
Après la 2e étape	4	6	6
Après la 2e étape	5	5	6
Après la 1re étape	4	4	6
Après la 2e étape	5	4	5
Après la 1re étape	4	4	4

(c) On examine d'abord ce qui arrive au nombre de bonbons après la 2e étape.
Supposons que Yona a c bonbons et que Dan (de qui Yona reçoit des bonbons) a d bonbons et supposons que c et d sont des entiers pairs.
Pendant la 2e étape, Yona donne la moitié de ses bonbons et il lui restera $\frac{c}{2}$ bonbons.
Pendant cette étape, Yona reçoit $\frac{d}{2}$ bonbons de Dan (la moitié des d bonbons de Dan).
Après la 2e étape, Yona aura $\frac{c}{2} + \frac{d}{2}$ bonbons, c'est-à-dire $\frac{c + d}{2}$ bonbons, ce qui représente

la moyenne des c bonbons et des d bonbons qu'elle et Dan avaient avant cette étape.

Mercredi, au départ, Dan a $2n$ bonbons tandis que Yona et Tam ont chacun $2n + 3$ bons. Puisque $2n + 3$ est 3 de plus qu'un multiple de 2, alors $2n + 3$ est un entier impair pour toute valeur entière de n.
On procède donc à la 1re étape et après cette étape, Dan a $2n$ bonbons ($2n$ est pair et Dan garde tous ses bonbons), tandis que Yona et Tam ont chacun $2n + 2$ bonbons.
Après la 2e étape, Yona aura la moyenne de ses $2n+2$ bonbons et des $2n$ bonbons de Dan, c'est-à-dire $\frac{(2n + 2) + 2n}{2}$ bonbons, ou $\frac{4n + 2}{2}$ bonbons, ou $2n + 1$ bonbons.
Tam aura la moyenne de ses $2n + 2$ bonbons et des $2n + 2$ bonbons de Yan, c'est-à-dire $2n + 2$ bonbons.

Dan aura la moyenne de ses $2n$ bonbons et des $2n + 2$ bonbons de Tam, c'est-à-dire $\frac{(2n + 2) + 2n}{2}$ bonbons, ou $\frac{4n + 2}{2}$ bonbons, ou $2n + 1$ bonbons.

Puisque Yona et Dan ont chacun un nombre impair de bonbons, on procède à la 1re étape.
On continue dans le tableau ci-contre.

	Dan	Yona	Tam
Au départ	$2n$	$2n+3$	$2n+3$
Après la 1re étape	$2n$	$2n+2$	$2n+2$
Après la 2e étape	$2n+1$	$2n+1$	$2n+2$
Après la 1re étape	$2n$	$2n$	$2n+2$
Après la 2e étape	$2n+1$	$2n$	$2n+1$
Après la 1re étape	$2n$	$2n$	$2n$

À la fin, chacun a $2n$ bonbons.

(d) Jeudi, au départ, Dan a 2^{2017} bonbons. Il en donne la moitié (c'est-à dire $\frac{1}{2} \times 2^{2017}$, ou 2^{2016}) à Yona et en reçoit 0 de Tam. À la fin de cette 2e étape, il a 2^{2016} bonbons.
On remplit un tableau pour suivre les premiers pas de cette procédure et se faire une idée de ce qui arrive. (On ignore toujours la 1re étape lorsque tous les nombres sont pairs.)

	Dan	Yona	Tam
Au départ	2^{2017}	0	0
Après la 2e étape	2^{2016}	2^{2016}	0
Après la 2e étape	2^{2015}	2^{2016}	2^{2015}
Après la 2e étape	2^{2015}	$2^{2014} + 2^{2015}$ $= 2^{2014} + 2 \times 2^{2014}$ $= 3 \times 2^{2014}$	$2^{2015} + 2^{2014}$ $= 2 \times 2^{2014} + 2^{2014}$ $= 3 \times 2^{2014}$
Après la 2e étape	$2^{2015} + 2^{2013}$ $= 2^2 \times 2^{2013} + 2^{2013}$ $= 5 \times 2^{2013}$	$2^{2013} + 2^{2015}$ $= 2^{2013} + 2^2 \times 2^{2013}$ $= 5 \times 2^{2013}$	$2^{2015} + 2^{2014}$ $= 2 \times 2^{2014} + 2^{2014}$ $= 3 \times 2^{2014}$

Comme on l'a montré dans la partie (c), après une 2e étape, chaque élève a un nombre de bonbons égal à la moyenne des nombres de bonbons de deux élèves au début de l'étape.
Si chaque élève, au début de l'étape, a un nombre de bonbons divisible par 2^k (k étant un entier strictement positif quelconque), alors à la fin de la 2e étape, chaque élève aura un nombre de bonbons qui est divisible par 2^{k-1}. Pourquoi ?
Si Yona a a bonbons et Dan a b bonbons, a et b étant chacun divisible par 2^k, alors après la 2e étape, le nombre de bonbons de Yona est égal à la moyenne $\frac{a + b}{2}$, ou $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

Puisque a est divisible par 2^k, alors $\frac{a}{2}$ est divisible par 2^{k-1} et de même, $\frac{b}{2}$ est divisible par 2^{k-1}. Leur somme est donc divisible par 2^{k-1} (et possiblement davantage).
On présente maintenant quatre remarques importantes qui nous mèneront à la conclusion.

1$^{\text{re}}$ remarque importante :
Au départ, les élèves ont respectivement 2^{2017}, 0 et 0 bonbons et chacun de ces nombres est divisible par 2^{2017}.
Après la 1$^{\text{re}}$ utilisation de la 2$^{\text{e}}$ étape, on obtient trois nombres qui sont divisibles par 2^{2016}.
Après la 2$^{\text{e}}$ utilisation de la 2$^{\text{e}}$ étape, on obtient trois nombres qui sont divisibles par 2^{2015}.
Après la 3$^{\text{e}}$ utilisation de la 2$^{\text{e}}$ étape, on obtient trois nombres qui sont divisibles par 2^{2014}, et ainsi de suite. (On peut le vérifier dans le tableau ci-dessus.)
Donc, en commençant avec 2^{2017}, 0 et 0 bonbons, on peut utiliser la 2$^{\text{e}}$ étape 2017 fois de suite.
On remarque qu'après chacune de ces 2017 fois, chaque élève a un nombre pair de bonbons et la 1$^{\text{re}}$ étape n'est donc jamais utilisée (aucun bonbon n'est rejeté) et le nombre total de bonbons est toujours égal à 2^{2017}.

2$^{\text{e}}$ remarque importante :
Au début de la 2$^{\text{e}}$ étape, si les élèves ont respectivement $2a, 2a$ et $2b$ bonbons (exactement deux élèves ont le même nombre de bonbons), alors après la 2$^{\text{e}}$ étape, ils auront respectivement $a + b, 2a$, et $a + b$ bonbons.
Il y aura donc exactement deux élèves qui ont le même nombre de bonbons.

3$^{\text{e}}$ remarque importante :
Au début de la 2$^{\text{e}}$ étape, si les élèves ont respectivement $2a, 2a$ et $2b$ bonbons ($a < b$), on dira qu'on a une situation « 2 bas, 1 haut », ou BBH (les deux nombres égaux sont inférieurs au troisième).
Dans ce cas, à la fin de la 2$^{\text{e}}$ étape, les élèves ont respectivement $a+b, 2a$ et $a+b$ bonbons, c'est-à-dire une situation « 2 hauts, 1 bas », ou HHB. (Puisque $a < b$, alors $a + a < b + a$, ou $2a < a + b$.)
Si on passe à la 2$^{\text{e}}$ étape avec cette situation HHB, on obtient une situation BBH.
Puisqu'au départ, il y a 2^{2017}, 0 et 0 bonbons, c'est-à-dire une situation BBH, alors après 2017 applications de la 2$^{\text{e}}$ étape, on aura une situation HHB.

4$^{\text{e}}$ remarque importante :
Si les élèves ont respectivement $2a, 2a$ et $2b$ bonbons, la différence positive entre le plus grand nombre de bonbons et le plus petit nombre de bonbons est égale à $2b-2a$ (ou $2a-2b$ lorsque $a > b$).
Après la 2$^{\text{e}}$ étape, ils ont respectivement $a+b, 2a$ et $a+b$ bonbons et la la différence positive entre le plus grand nombre de bonbons et le plus petit nombre de bonbons est égale à $b-a$ (ou $a - b$ lorsque $a > b$).
Donc, lorsqu'on applique la 2$^{\text{e}}$ étape une fois, la différence positive entre le plus grand nombre de bonbons et le plus petit nombre de bonbons est diminuée par un facteur de 2 (c.-à-d. que $a - b = \frac{1}{2}(2a - 2b)$).
Donc lorsque les élèves ont respectivement 2^{2017}, 0 et 0 bonbons au départ, avec une différence positive égale à 2^{2017}, et qu'on applique la 2$^{\text{e}}$ étape 2017 fois, on obtient une situation HHB avec une différence positive entre le plus grand nombre de bonbons et le plus petit nombre de bonbons égale à 1.
Après avoir appliqué la 2$^{\text{e}}$ étape 2017 fois, les nombres respectifs de bonbons sont donc $n + 1, n + 1$ et n (n étant un entier non négatif quelconque).

Conclusion :
Puisque la 1$^{\text{re}}$ étape n'a pas été utilisée, il reste encore 2^{2017} bonbons partagés par trois élèves.

Si n est impair, le nombre total de bonbons, $3n + 2$, est impair.
Puisque $3n + 2$ doit être égal à 2^{2017}, ceci n'est pas possible. Donc n doit être pair.
Puisque n est pair, alors $n + 1$ est impair et on utilise la 1re étape avec les $n + 1, n + 1$ et n bonbons, après quoi chaque élève a n bonbons.
Deux bonbons ont été rejetés dans cette 1re étape et il reste donc $2^{2017} - 2$ bonbons.
Puisque chaque élève a le même nombre de bonbons et qu'il reste $2^{2017} - 2$ bonbons en tout, chacun a $\dfrac{2^{2017} - 2}{3}$ bonbons à la fin.