Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2017

(11e année – Secondaire V)

le mardi 28 février 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 1er mars 2017
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $6 \times 2017 - 2017 \times 4 = 2017(6-4) = 2017(2) = 4034$

RÉPONSE : (D)

2. Dans la figure, il y a 7 rangées qui contiennent des carrés ombrés et chacune de ces rangées contient 7 carrés ombrés.
Il y a donc 49 carrés ombrés ($7 \cdot 7 = 49$).

RÉPONSE : (E)

3. Les nombres 2, 3 et 6 ont une somme de 11. Leur produit est égal à $2 \cdot 3 \cdot 6$, ou 36.

RÉPONSE : (C)

4. Puisque le réservoir perd 300 litres en 25 heures, l'eau sort du réservoir au taux de $\dfrac{300 \text{ L}}{25 \text{ h}}$, ou 12 L/h.

RÉPONSE : (A)

5. La représentation graphique de l'équation $y = -2x^2 + 4$ est une parabole.
Puisque le coefficient de x^2 est négatif, la parabole est ouverte vers le bas.
Puisque le terme constant de l'équation est positif, l'ordonnée à l'origine de la parabole (la valeur de y lorsque $x = 0$) est positive.
Seul le choix de réponse (D) correspond à ces caractéristiques. (Puisque le coefficient de x est 0 dans l'équation, la courbe doit être symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, comme il l'est dans le choix (D).)

RÉPONSE : (D)

6. Puisque la moyenne de 5 et de 9 est égale à 7 ($\frac{5+9}{2} = 7$), la moyenne de x et de 5 doit être 10 et la moyenne de x et de 9 doit être 12. (Les deux autres moyennes étaient 9 et 12 et 5 est plus grand que 9.)
Donc $\dfrac{x+5}{2} = 10$ et $\dfrac{x+9}{2} = 12$, d'où $x + 5 = 20$ et $x + 9 = 24$.
Chaque équation a pour solution $x = 15$.

RÉPONSE : (B)

7. Puisque $x = 1$ est une solution de l'équation $x^2 + ax + 1 = 0$, alors $1^2 + a(1) + 1 = 0$.
Donc $2 + a = 0$, ou $a = -2$.

RÉPONSE : (E)

8. On peut simplifier le membre de gauche de l'équation : $\dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4n} = \dfrac{2}{4n} + \dfrac{1}{4n} = \dfrac{3}{4n}$.
L'équation devient $\dfrac{3}{4n} = \dfrac{3}{12}$, d'où $4n = 12$.
Donc $n = 3$.

RÉPONSE : (E)

9. On doit déterminer l'heure qu'il était 100 heures avant 17 heures vendredi.
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée et que $100 = 4(24) + 4$, alors 100 heures correspondent à 4 jours et 4 heures.
À partir de 17 heures vendredi, on recule de 4 jours jusqu'à 17 heures lundi, puis on recule 4 heures de plus jusqu'à 13 heures lundi.
Kamila avait donc allumé son ordinateur à 13 h 00 lundi.

RÉPONSE : (D)

10. On considère quatre entiers strictement positifs, a, b, c et n tels que $a < b < c < n$ et $a + b + c + n = 100$.
Puisque $a < b < c < n$, alors $a+b+c+n < n+n+n+n$, ou $a+b+c+n < 4n$. Donc $100 < 4n$, ou $n > 25$. Puisque n est un entier, n est égal à 26 ou plus.
Est-il possible que n soit égal à 26 ? Si oui, on aurait $a + b + c = 100 - 26$, ou $a + b + c = 74$.
Avec $n = 26$, alors $a + b + c$ ne pourrait être supérieur à $23 + 24 + 25$, ou 72, ce qui contredit la conclusion précédente. Donc, on ne peut avoir $a + b + c = 74$.
Donc, n ne peut être égal à 26.
Est-il possible que n soit égal à 27 ? Si oui, on aurait $a + b + c = 100 - 27$, ou $a + b + c = 73$.
Avec $n = 27$, on pourrait avoir $a + b + c = 23 + 24 + 26$, ou $a + b + c = 73$. Donc, $n = 27$ est possible, ce qui fait que la plus petite valeur possible de n est 27. (D'autres valeurs de a, b, c sont possibles avec $n = 27$.)

Réponse : (D)

11. Chaque élève a apporté soit une pomme, une banane ou une orange.
Or, 20 % des élèves ont apporté une pomme et 35 % des élèves ont apporté une banane. Donc, 45 % des élèves ($100\,\% - 20\,\% - 35\,\% = 45\,\%$) ont apporté une orange.
Donc, les 9 élèves qui ont apporté une orange représentent 45 % de la classe.
Donc, 1 élève représente $45\,\% \div 9$ de la classe, ou 5 % de la classe.
Donc, il y a 20 élèves ($100\,\% \div 5\,\% = 20$) dans la classe.

Réponse : (D)

12. Cette question équivaut à demander combien il y a d'entiers de trois chiffres qui commencent par un 2 et qui sont supérieurs à 217.
Il s'agit des entiers de 218 à 299.
Il y a 82 tels entiers ($299 - 217 = 82$).

Réponse : (B)

13. La droite qui passe aux points $R(2, 4)$ et $Q(4, 0)$ a pour pente $\frac{4-0}{2-4}$, ou -2.
Puisqu'elle passe aussi au point $(4, 0)$, la droite a pour équation $y-0 = -2(x-4)$, ou $y = -2x+8$.
D'après cette équation, la droite une ordonnée à l'origine de 8 et P a donc pour coordonnées $(0, 8)$.
Le triangle OPQ est rectangle en O. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(OQ)(OP)$, ou $\frac{1}{2}(4)(8)$, ou 16.

Réponse : (E)

14. L'expression

$$\left(1 + \tfrac{1}{2}\right)\left(1 + \tfrac{1}{3}\right)\left(1 + \tfrac{1}{4}\right)\left(1 + \tfrac{1}{5}\right)\left(1 + \tfrac{1}{6}\right)\left(1 + \tfrac{1}{7}\right)\left(1 + \tfrac{1}{8}\right)\left(1 + \tfrac{1}{9}\right)$$

est égale à

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{5}{4}\right)\left(\tfrac{6}{5}\right)\left(\tfrac{7}{6}\right)\left(\tfrac{8}{7}\right)\left(\tfrac{9}{8}\right)\left(\tfrac{10}{9}\right),$$

ce qui est égal à

$$\tfrac{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}.$$

En annulant les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, on obtient $\frac{10}{2}$, ou 5.

Réponse : (A)

15. Puisque $\angle XMZ = 30^\circ$ et $\angle XMY = 180^\circ - \angle XMZ$, alors $\angle XMY = 150^\circ$.
Puisque les mesures des angles du triangle XMY ont une somme de 180°, alors :

$$\angle YXM = 180^\circ - \angle XYZ - \angle XMY = 180^\circ - 15^\circ - 150^\circ = 15^\circ$$

(OU : Puisque l'angle XMZ est un angle extérieur du triangle XMY, alors $\angle XMZ = \angle YXM + \angle XYM$, d'où $\angle YXM = 15^\circ$.)
Puisque $\angle XYM = \angle YXM$, le triangle XMY est isocèle et $MX = MY$.
Puisque M est le milieu de YZ, alors $MY = MZ$.
Puisque $MX = MY$ et $MY = MZ$, alors $MX = MZ$.
Le triangle XMZ est donc isocèle et $\angle XZM = \angle ZXM$.
Donc $\angle XZY = \angle XZM$, d'o'u $\angle XZY = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle XMZ)$, ou $\angle XZY = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ)$, ou $\angle XZY = 75^\circ$.

Réponse : (A)

16. Puisque $x + 2y = 30$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{5} + \frac{2y}{3} + \frac{2y}{5} + \frac{x}{3} &= \frac{x}{5} + \frac{2y}{5} + \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \\
&= \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}(2y) + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}(2y) \\
&= \frac{1}{5}(x + 2y) + \frac{1}{3}(x + 2y) \\
&= \frac{1}{5}(30) + \frac{1}{3}(30) \\
&= 6 + 10 \\
&= 16
\end{aligned}$$

Réponse : (B)

17. On suppose que la base du prisme mesure a cm sur b cm et que le prisme a une hauteur de h cm.
Puisque Aaron a 144 cubes dont les arêtes mesurent 1 cm, le prisme a un volume de 144 cm^3.
Donc $abh = 144$.
Puisque la base du prisme a un périmètre de 20 cm, alors $2a + 2b = 20$, ou $a + b = 10$.
Puisque a et b sont des entiers strictement positifs, on peut construire un tableau des valeurs possibles de a et de b et des valeurs de h qui en résultent, où $h = \dfrac{144}{ab}$. Par symétrie, on peut s'en tenir aux valeurs pour lesquelles $a \leq b$:

a	b	h
1	9	16
2	8	9
3	7	$\frac{48}{7}$
4	6	6
5	5	$\frac{144}{25}$

Puisque h doit être un entier, les seules valeurs possibles de h sont 16, 9 et 6.
La somme de ces hauteurs est égale à 16 cm + 9 cm + 6 cm, ou 31 cm.

Réponse : (A)

18. Pour tout nombre réel strictement positif x, $\lfloor x\rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x. Donc $\lfloor x\rfloor \leq x$.
Donc $\lfloor x\rfloor \cdot x \leq x \cdot x$, c'est-à-dire que $\lfloor x\rfloor \cdot x \leq x^2$.
Si $\lfloor x\rfloor \cdot x = 36$, alors $36 \leq x^2$.
Puisque $x > 0$, alors $x \geq 6$.
Lorsque $x = 6$, alors $\lfloor x\rfloor = \lfloor 6\rfloor = 6$. Donc, $x = 6$ est une solution de l'équation $\lfloor x\rfloor \cdot x = 36$.
Si $x > 6$, alors $\lfloor x\rfloor \cdot x > 6 \cdot 6$ et x ne peut donc pas être une solution de l'équation $\lfloor x\rfloor \cdot x = 36$.
L'équation $\lfloor x\rfloor \cdot x = 36$ admet donc une seule solution, soit $x = 6$.
De même, si $\lfloor y\rfloor \cdot y = 71$, alors $y^2 \geq 71$.
Puisque $y > 0$, alors $y \geq \sqrt{71} \approx 8{,}43$.
Puisque $y \geq \sqrt{71} \approx 8{,}43$, alors $\lfloor y\rfloor \geq 8$.
Supposons que $\lfloor y\rfloor = 8$.
L'équation $\lfloor y\rfloor \cdot y = 71$ devient $8y = 71$, d'où $y = \dfrac{71}{8}$. Donc $y = \dfrac{71}{8}$ est une solution de l'équation $\lfloor y\rfloor \cdot y = 71$.
Si $\lfloor y\rfloor > 8$, alors $\lfloor y\rfloor \geq 9$, donc $y \geq 9$ et $\lfloor y\rfloor \cdot y \geq 9 \cdot 9$. Dans ce cas, y ne peut donc pas être une solution de l'équation $\lfloor y\rfloor \cdot y = 71$.
L'équation $\lfloor y\rfloor \cdot y = 71$ admet donc une seule solution, soit $y = \dfrac{71}{8}$.
Donc $x + y = 6 + \dfrac{71}{8}$, ou $x + y = \dfrac{119}{8}$.

Réponse : (B)

19. Si $a > 0$, la distance de la droite verticale d'équation $x = a$ à l'axe des ordonnées est égale à a.
Si $a < 0$, cette distance est égale à $-a$.
Dans chaque cas, il y a exactement deux points sur cette droite verticale d'équation $x = a$ qui sont aussi à une distance a ou $-a$ (selon le cas) de l'axe des abscisses : (a, a) et $(a, -a)$. Ces points sont situés sur les droites horizontales respectives d'équations $y = a$ et $y = -a$.
(Si $a = 0$, la droite d'équation $x = a$ représente l'axe des ordonnées et le seul point sur cette droite qui est équidistant des deux axes est l'origine $(0, 0)$ qui n'est pas située sur la droite d'équation $3x + 8y = 24$.)
Si le point (a, a) est situé sur la droite d'équation $3x + 8y = 24$, alors $3a + 8a = 24$, d'où $a = \frac{24}{11}$.
Si le point $(a, -a)$ est situé sur la droite d'équation $3x + 8y = 24$, alors $3a - 8a = 24$, d'où $a = -\frac{24}{5}$.
La somme de ces deux valeurs de a est égale à $\frac{24}{11} + \left(-\frac{24}{5}\right)$, ou $\frac{120-264}{55}$, ou $-\frac{144}{55}$.

Réponse : (B)

20. Puisque m et n sont des entiers supérieurs à 1 et que $m^n = 2^{25} \times 3^{40}$, alors 2 et 3 sont des facteurs premiers de m (puisqu'ils sont des facteurs premiers de m^n) et ils doivent être les seuls facteurs premiers de m (s'il y en avait d'autres, ceux-ci seraient aussi des facteurs premiers de m^n).
Donc, $m = 2^a \times 3^b$, a et b étant des entiers strictement positifs quelconques.
Donc $m^n = (2^a \times 3^b)^n = 2^{an} \times 3^{bn}$.
Puisque $m^n = 2^{25} \times 3^{40}$, on a donc $an = 25$ et $bn = 40$.
Puisque a, b et n sont des entiers strictement positifs, alors n est un diviseur commun de 25 et 40.
Puisque $n > 1$, alors $n = 5$, d'où $a = 5$ et $b = 8$.
On a donc $m = 2^5 \times 3^8$, ou $m = 32 \times 6561$, ou $m = 209\,952$.
Donc $m + n = 209\,952 + 5$, ou $m + n = 209\,957$.

Réponse : (C)

21. Puisque $WXYZ$ est un entier positif de quatre chiffres, alors $WXYZ \leq 9999$. (De fait, $WXYZ$ est encore plus petit, car ses chiffres sont distincts.)
Puisque $WXYZ \leq 9999$, alors $TWUYV \leq 2(9999) = 19998$.
Puisque $T \neq 0$, alors $T = 1$.
On remarque que toute retenue d'une colonne à une autre ne peut être supérieure à 1. (Puisque $Z \leq 9$, alors $Z + Z \leq 18$. Ainsi lorsqu'on additionne les unités, la retenue dans la colonne des dizaines doit être 0 ou 1. De même, puisque $Y + Y \leq 18$, alors lorsqu'on additionne les dizaines, la valeur maximale que l'on puisse obtenir est 19 et la retenue dans la colonne des centaines est 1 ou 0. On peut répéter ce raisonnement avec les autres colonnes.)
Dans le tableau suivant, on examine les résultats possibles lorsqu'on additionne un chiffre c avec lui-même, avec ou sans une retenue de 1 :

c	$c + c$ sans retenue	$c + c$ plus une retenue de 1
0	0	1
1	2	3
2	4	5
3	6	7
4	8	9
5	10	11
6	12	13
7	14	15
8	16	17
9	18	19

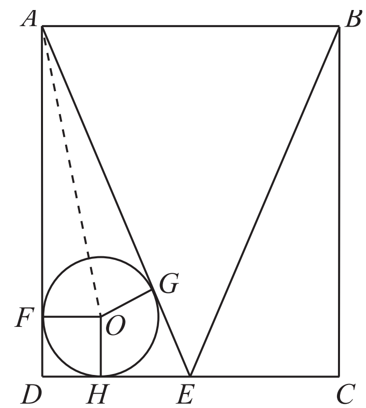
On utilise ce tableau pour déterminer W et Y.
Puisque les trois chiffres de la colonne des milliers sont les mêmes, le chiffre W doit être un 0 $(0 + 0 = 0)$ ou un 9 $(9 + 9 + 1 = 1\underline{9})$. Puisqu'il produit une retenue dans la colonne des dix milliers, il doit être un 9 (dans l'énoncé du problème, on a aussi $W \neq 0$). On remarque aussi que $X \geq 5$ pour produire une retenue dans la colonne des milliers.
Puisque les trois chiffres de la colonne des dizaines sont les mêmes, le chiffre Y doit être un 0 $(0 + 0 = 0)$ ou un 9 $(9 + 9 + 1 = 1\underline{9})$. Puisque $W = 9$ et que les chiffres T, U, V, W, X, Y, Z sont distincts, alors $Y = 0$.
Lorsqu'on additionne les chiffres de la colonne des unités, il n'y a donc aucune retenue.
Voici ce qu'on a à ce point-ci :

$$\begin{array}{cccccc} & & 9 & X & 0 & Z \\ + & & 9 & X & 0 & Z \\ \hline & 1 & 9 & U & 0 & V \end{array}$$

et $X \geq 5$ et $Z \leq 4$.
Puisque $T = 1$ et $W = 9$, alors Z peut être un 2, un 3 ou un 4 et X peut être un 5, un 6, un 7 ou un 8.
Si $X = 5$, alors $U = 0 = Y$, ce qui est impossible car les chiffres doivent être distincts. Donc $X \neq 5$.
Si $Z = 2$, alors $V = 4$. Dans ce cas, on ne peut avoir $X = 6$ (ce qui donnerait $U = 2 = Z$) ou $X = 7$ (ce qui donnerait $U = 4 = V$). On a donc $X = 8$, d'où $U = 6$.
Si $Z = 3$, alors $V = 6$. Dans ce cas, on ne peut avoir $X = 6$ ou $X = 8$. Donc $X = 7$, d'où $U = 4$.
Si $Z = 4$, alors $V = 8$. Dans ce cas, on ne peut avoir $X = 7$ ou $X = 8$. Donc $X = 6$, d'où $U = 2$.
Il y a donc trois valeurs possibles de U, soit 2, 4 et 6.
On peut vérifier que les trois additions possibles, $9802 + 9802 = 19604$, $9703 + 9703 = 19406$ et $9604 + 9604 = 19208$ vérifient les données du problème.

Réponse : (C)

22. On tranche le cylindre, le cône et la sphère au moyen d'un plan vertical qui passe par les centres des faces supérieure et inférieure du cylindre et par le centre de la sphère.



Les sections transversales respectives obtenues à partir du cylindre, du cône et de la sphère sont un rectangle, un triangle et un cercle.
Puisque la sphère touche au cylindre et au cône, la section qui en résulte donne un cercle qui est tangent à deux côtés du rectangle (en F et H) et à un côté du triangle (en G).
On joint O à F, à G et à H. Puisque les rayons sont perpendiculaires aux tangentes aux points de contact, OF est perpendiculaire à AD, OG est perpendiculaire à AE et OH est perpendiculaire à DE.
Soit r le rayon de la sphère (et donc du cercle). Donc $OF = OG = OH = r$.
Puisque le cylindre a un rayon de 12, alors $DE = 12$.
Puisque le cylindre a une hauteur de 30, alors $AD = 30$.
Puisque $FOHD$ a des angles droits en F, D et H, il doit avoir quatre angles droits. Il est donc un rectangle.
Puisque $OF = OH = r$, alors $FOHD$ est un carré avec $DH = DF = r$.
Puisque $DE = 12$ et $DH = r$, alors $EH = 12 - r$.
Puisque $AD = 30$ et $DF = r$, alors $AF = 30 - r$.
Puisque AG et AF sont des tangentes menées à partir d'un même point, alors $AG = AF = 30-r$.
(En effet, les triangles AFO et AGO sont rectangles, ils ont un côté commun AO et deux côtés égaux FO and GO. Ils sont donc isométriques.)
De même, $EG = EH = 12 - r$.
De plus, $AE = AG + GE$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADE, $AE = \sqrt{12^2 + 30^2}$, ou $AE = \sqrt{1044}$.
Donc $\sqrt{1044} = (30 - r) + (12 - r)$, d'où $2r = 42 - \sqrt{1044}$, ou $r = 21 - \frac{1}{2}\sqrt{1044}$, ou $r \approx 4{,}8445$.
Le choix de réponse le plus près de la valeur du rayon est 4,84.

Réponse : (A)

23. Puisque a est un entier strictement positif et que $a + \frac{b}{c}$ est un entier strictement positif, alors $\frac{b}{c}$ est un entier strictement positif. Donc, b est un multiple de c.
De même, puisque $\frac{a}{c} + b$ et b sont des entiers strictement positifs, alors a est un multiple de c.
On a donc $a = Ac$ et $b = Bc$, A et B étant des entiers strictement positifs quelconques.
L'équation $a+\frac{b}{c} = 101$ devient donc $Ac+B = 101$ et l'équation $\frac{a}{c}+b = 68$ devient $A+Bc = 68$.
On additionne les nouvelles équations, membre par membre, pour obtenir
$Ac + B + A + Bc = 101 + 68$, ou $A(c + 1) + B(c + 1) = 169$, ou $(A + B)(c + 1) = 169$.
Puisque $(A + B)(c + 1) = 169$, alors $c + 1$ est un diviseur 169.
Puisque $169 = 13^2$, les diviseurs positifs de 169 sont 1, 13 et 169.
Puisque A, B et c sont des entiers strictement positifs, alors $A + B \geq 2$ et $c + 1 \geq 2$.
Puisque ni $A + B$ ni $c + 1$ ne peut égaler 1, alors $A + B = c + 1 = 13$.
Donc $\dfrac{a + b}{c} = \dfrac{Ac + Bc}{c} = A + B = 13$. Donc $k = 13$.

Réponse : (A)

24. On nomme les équipes F, G, H, J, K, L, M et N.

On détermine d'abord le nombre total de matchs.

Puisque chaque paire d'équipes joue exactement un match l'une contre l'autre, chaque équipe joue 7 matchs (un match contre chacune des 7 autres équipes). Puisqu'il y a 8 équipes, il semble y avoir $8 \cdot 7$ matchs, mais chaque match a été compté deux fois dans ce total (par exemple, on a compté G contre K et K contre G). Le nombre de matchs est donc égal à $\frac{8 \cdot 7}{2}$, ou 28.

Le problème porte sur l'ensemble des 28 matchs du tournoi. On doit déterminer le nombre de résultats équiprobables que le tournoi peut envisager, ainsi que le nombre de ces résultats dans lesquels chaque équipe perd au moins un match et gagne au moins un match.

Puisqu'il y a 28 matchs et 2 résultats équiprobables par match, il y a 2^{28} résultats équiprobables pour le tournoi au complet. (On peut considérer que les matchs sont numérotés de 1 à 28 et que F rencontre G dans le match 1, F rencontre H dans le match 2 et ainsi de suite jusqu'au match 28 dans lequel M rencontre N. Un résultat possible pour le tournoi serait ainsi un « mot » de 28 lettres dont la 1re lettre est un F si F gagne ou un G si G gagne, la 2e lettre est un F ou un H, et ainsi de suite jusqu'à la dernière lettre qui est un M ou un N. Chaque mot possible correspond à un résultat possible pour le tournoi. Le nombre total de mots possibles, c'est-à-dire le nombre total de résultats équiprobables possibles pour le tournoi, est donc égal à $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$, ou 2^{28}.)

Pour déterminer la probabilité pour que chaque équipe perde au moins un match et gagne au moins un match, on déterminera la probabilité pour qu'il y ait une équipe qui perde 0 match ou qui gagne 0 match et on la soustraira de 1.

On comptera le nombre de résultats du tournoi dans lesquels une équipe gagne 0 match (c.-à-d. perd tous ses matchs) ou une équipe perd 0 match (c.-à-d. gagne tous ses matchs), ou les deux.

Pour déterminer le nombre de résultats du tournoi dans lesquels une équipe gagne tous ses matchs, on remarque qu'il y a 8 façons de choisir cette équipe (qu'on appelle X). Une fois cette équipe choisie, on sait qu'elle a gagné 7 matchs et il qu'il y a 21 matchs ($28 - 7 = 21$) dont le résultat n'importe pas. (On a des mots de 28 lettres dont 7 lettres sont déterminées et 21 lettres qui peuvent prendre une de deux valeurs.)

Puisque chacun de ces 21 matchs a 2 résultats équiprobables possibles, il y a $8 \cdot 2^{21}$ résultats de tournoi possibles dans lesquels une équipe a gagné tous ses matchs. (Il est impossible pour deux équipes de gagner tous ses matchs puisqu'elles doivent se rencontrer.) De même, il y a $8 \cdot 2^{21}$ résultats de tournoi dans lesquels une équipe a perdu tous ses matchs. (Pouvez-vous l'expliquer ?)

Y a-t-il des résultats de tournoi dans lesquels une équipe a gagné tous ses matchs *et* une autre équipe a perdu tous ses match ?

S'il y en a, il faudra soustraire leur nombre une fois du nombre total, puisqu'il aura été compté dans chaque total de $8 \cdot 2^{21}$ résultats de tournoi.

Pour déterminer le nombre de résultats de tournoi dans ce cas, on choisit une équipe X qui gagne tous ses matchs et une équipe Y qui perd tous ses matchs.

Une fois que X est choisi, les résultats de ses 7 matchs sont déterminés (7 victoires de X).

Une fois que Y est choisi, les résultats de ses 6 autres matchs sont déterminés (6 défaites plus le match que Y a perdu aux mains de X et qui a déjà été compté).

Donc les résultats de 15 matchs ($28 - 7 - 6 = 15$) doivent être déterminés.

Le nombre de résultats de tournoi possibles est égal à $8 \cdot 7 \cdot 2^{15}$, puisqu'il y a 8 façons de choisir X, puis 7 façons de choisir Y (n'importe quelle équipe à l'exception de X), puis 2^{15} façons de choisir les résultats des 15 autres matchs.

Le nombre de résultats de tournoi dans lesquels une équipe perd 0 match ou une équipe perd 0 match ou les deux est égal à $8 \cdot 2^{21} + 8 \cdot 2^{21} - 8 \cdot 7 \cdot 2^{15}$.

La probabilité pour qu'une équipe perde 0 match ou qu'une équipe gagne 0 match est égale à :

$$\frac{8\cdot 2^{21}+8\cdot 2^{21}-8\cdot 7\cdot 2^{15}}{2^{28}}=\frac{2^{15}(8\cdot 2^{6}+8\cdot 2^{6}-8\cdot 7)}{2^{28}}=\frac{2^{3}\cdot 2^{6}+2^{3}\cdot 2^{6}-2^{3}\cdot 7}{2^{13}}=\frac{2^{6}+2^{6}-7}{2^{10}}$$

La probabilité pour que chaque équipe perde au moins un match et gagne au moins un match est égale à $1-\frac{64+64-7}{1024}$, ou $1-\frac{121}{1024}$, ou $\frac{903}{1024}$.

Réponse : (D)

25. Soit $r=\sqrt{\frac{\sqrt{53}}{2}+\frac{3}{2}}$.
Donc $r^2=\frac{\sqrt{53}}{2}+\frac{3}{2}$, ou $2r^2=\sqrt{53}+3$, ou $2r^2-3=\sqrt{53}$.
En prenant le carré de chaque membre de cette dernière équation, on obtient $(2r^2-3)^2=53$, ou $4r^4-12r^2+9=53$, ou $4r^4-12r^2-44=0$, ou $r^4-3r^2-11=0$, ou $r^4=3r^2+11$.

Supposons que

$$r^{100}=2r^{98}+14r^{96}+11r^{94}-r^{50}+ar^{46}+br^{44}+cr^{40}, \qquad (*)$$

a, b et c étant des entiers quelconques strictement positifs.
Puisque $r\neq 0$, on peut diviser chaque membre par r^{40} :

$$r^{60}=2r^{58}+14r^{56}+11r^{54}-r^{10}+ar^{6}+br^{4}+c$$

Sachant que $r^4=3r^2+11$, on a :

$$\begin{aligned}
r^{60}-2r^{58}-14r^{56}-11r^{54}&=r^{54}(r^6-2r^4-14r^2-11)\\
&=r^{54}(r^2(3r^2+11)-2r^4-14r^2-11)\\
&=r^{54}(3r^4+11r^2-2r^4-14r^2-11)\\
&=r^{54}(r^4-3r^2-11)\\
&=r^{54}(0)\\
&=0
\end{aligned}$$

L'équation $(*)$ est donc équivalente à l'équation suivante qui est beaucoup plus simple :

$$r^{10}=ar^6+br^4+c$$

On exprime maintenant r^{10} et r^6 en fonction de r^2 et d'une constante. (Pour ce faire, il faudra aussi exprimer r^8 en fonction de r^2 et d'une constante. On fait appel au résultat $r^4=3r^2+11$ obtenu précédemment.)

$$r^6=r^2r^4=r^2(3r^2+11)=3r^4+11r^2=3(3r^2+11)+11r^2=20r^2+33$$
$$r^8=r^2r^6=r^2(20r^2+33)=20r^4+33r^2=20(3r^2+11)+33r^2=93r^2+220$$
$$r^{10}=r^2r^8=r^2(93r^2+220)=93r^4+220r^2=93(3r^2+11)+220r^2=499r^2+1023$$

L'équation

$$r^{10}=ar^6+br^4+c$$

est donc équivalente à

$$499r^2+1023=a(20r^2+33)+b(3r^2+11)+c$$

ou à :

$$0 = r^2(20a + 3b - 499) + (33a + 11b + c - 1023)$$

Si $20a + 3b = 499$ et $33a + 11b + c = 1023$, l'équation est vérifiée. (Si l'équation est vérifiée, on peut aussi conclure que $20a + 3b = 499$ et $33a + 11b + c = 1023$. Cela découle du fait que r^2 est un nombre irrationnel.)

Le problème est équivalent à celui de déterminer des entiers strictement positifs a, b et c tels que $20a + 3b = 499$ et $33a + 11b + c = 1023$.

On cherche d'abord des couples (a, b) d'entiers strictement positifs qui vérifient $20a + 3b = 499$, puis on vérifiera si les valeurs correspondantes de $c = 1023 - 33a - 11b$ sont strictement positives. Puisqu'on ne cherche qu'un triplet (a, b, c) d'entiers strictement positifs, il n'est pas nécessaire de justifier que l'on a déterminé toutes les solutions.

Puisque $20a$ a un chiffre des unités égal à 0 et que $20a + 3b = 499$, le chiffre des unités de $3b$ doit être un 9, ce qui signifie que le chiffre des unités de b doit être un 3.

Si $b = 3$, alors $20a = 499 - 3b$, d'où $20a = 490$. Dans ce cas, a n'est pas un entier.

Si $b = 13$, alors $20a = 499 - 3b$, d'où $20a = 460$, ou $a = 23$.

À partir de $(a, b) = (23, 13)$, on peut obtenir d'autres solutions en remarquant que $20(3) = 3(20)$. Ainsi en diminuant a de 3 et en augmentant b de 20, la somme $20a + 3b$ ne change pas.

Or à partir de $(a, b) = (23, 13)$, on obtient $c = 1023 - 33(23) - 11(13)$, ou $c = 121$.

Puisqu'on ne cherche qu'un triplet (a, b, c), alors $(a, b, c) = (23, 13, 121)$.

Enfin, $a^2 + b^2 + c^2 = 23^2 + 13^2 + 121^2 = 15\,339$.

Réponse : (D)