



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le mardi 28 février 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 1^{er} mars 2017

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 60 minutes

©2016 University of Waterloo

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

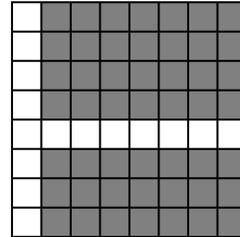
Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $6 \times 2017 - 2017 \times 4$?

- (A) 2 (B) 20170 (C) 0 (D) 4034 (E) 24

2. La figure ci-contre présente un quadrillage 8×8 . Combien de carrés 1×1 sont ombrés ?

- (A) 53 (B) 51 (C) 47
(D) 45 (E) 49

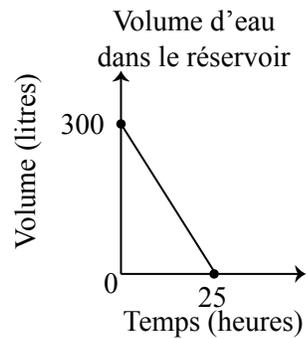


3. Trois des nombres 2, 3, 4 et 6 ont une somme de 11. Quel est le produit de ces trois nombres ?

- (A) 24 (B) 72 (C) 36 (D) 48 (E) 32

4. On vide un réservoir d'eau de 300 L à un taux constant. Le graphique ci-contre représente la relation entre le volume d'eau dans le réservoir et le temps écoulé pendant cette opération. À quel taux l'eau sort-elle du réservoir en litres par heure ?

- (A) 12 (B) 20 (C) 2,5
(D) 5 (E) 15



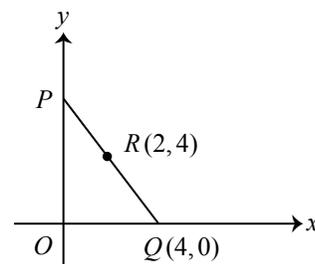
5. Laquelle des esquisses suivantes peut représenter $y = -2x^2 + 4$?

- (A) (B) (C)
- (D) (E)

6. Émilie écrit les nombres 5, x et 9. Valentin calcule la moyenne de chaque paire de nombres et obtient 7, 10 et 12. Quelle est la valeur de x ?
 (A) 5 (B) 15 (C) 3 (D) 25 (E) 1
7. Sachant que $x = 1$ est une solution de l'équation $x^2 + ax + 1 = 0$, quelle est la valeur de a ?
 (A) 3 (B) -1 (C) 1 (D) 2 (E) -2
8. Si $\frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} = \frac{3}{12}$, alors n est égal à :
 (A) 6 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 2 (E) 3
9. Kamila a éteint son ordinateur à 17 heures vendredi. Celui-ci avait été allumé pendant exactement 100 heures. À quelle heure Kamila avait-elle allumé son ordinateur ?
 (A) 13 h mardi (B) 21 h lundi (C) 14 h mardi
 (D) 13 h lundi (E) 21 h mercredi
10. La somme de quatre entiers strictement positifs distincts est égale à 100. Le plus grand de ces quatre entiers est n . Quelle est la plus petite valeur possible de n ?
 (A) 26 (B) 50 (C) 28 (D) 27 (E) 94

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Jeudi dernier, chaque élève de la classe de Monsieur Fermat a apporté un fruit en classe. Chacun a apporté une pomme, une banane ou une orange. De fait, 20 % des élèves ont apporté une pomme, 35 % des élèves ont apporté une banane et 9 élèves ont apporté une orange. Combien y avait-il d'élèves dans la classe ?
 (A) 18 (B) 64 (C) 24 (D) 20 (E) 40
12. On place des chiffres dans les deux cases de $2\square\square$, soit un chiffre par case, pour créer un entier positif de trois chiffres. De combien de façons peut-on le faire pour que l'entier de trois chiffres sont supérieur à 217 ?
 (A) 81 (B) 82 (C) 83 (D) 92 (E) 93
13. Dans la figure ci-contre, P est situé sur l'axe des ordonnées, Q a pour coordonnées $(4,0)$, et PQ passe au point $R(2,4)$. Quelle est l'aire du triangle OPQ ?
 (A) 8 (B) 12 (C) 32
 (D) 24 (E) 16



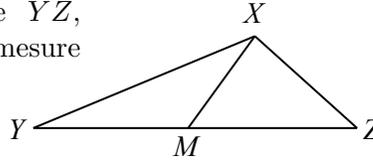
14. L'expression

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \left(1 + \frac{1}{9}\right)$$

est égale à :

- (A) 5 (B) $\frac{10}{9}$ (C) 9 (D) $9\frac{1}{8}$ (E) $\frac{1}{2}$

15. Dans la figure ci-contre, M est le milieu de YZ , $\angle XMZ = 30^\circ$ et $\angle XYZ = 15^\circ$. Quelle est la mesure de l'angle XZY ?



- (A) 75° (B) 65° (C) 60°
 (D) 80° (E) 85°
16. Si $x + 2y = 30$, quelle est la valeur de $\frac{x}{5} + \frac{2y}{3} + \frac{2y}{5} + \frac{x}{3}$?
 (A) 8 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 30
17. Aaron a 144 cubes identiques dont les arêtes mesurent 1 cm. Il utilise tous les cubes pour construire un prisme droit à base rectangulaire qu'il place à plat sur une table. La base du prisme a un périmètre de 20 cm. Quelle est la somme de toutes les hauteurs possibles du prisme ?
 (A) 31 cm (B) 25 cm (C) 15 cm (D) 22 cm (E) 16 cm
18. Étant donné un nombre réel strictement positif quelconque x , $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x . Par exemple, $\lfloor 4,2 \rfloor = 4$ et $\lfloor 3 \rfloor = 3$. Si $\lfloor x \rfloor \cdot x = 36$ et $\lfloor y \rfloor \cdot y = 71$ ($x, y > 0$), quelle est la valeur de $x + y$?
 (A) $\frac{107}{8}$ (B) $\frac{119}{8}$ (C) $\frac{125}{9}$ (D) $\frac{107}{6}$ (E) $\frac{101}{7}$
19. Un point est *équidistant des axes* si la distance verticale du point à l'axe des abscisses est égale à la distance horizontale du point à l'axe des ordonnées. Le point d'intersection de la droite verticale d'équation $x = a$ et de la droite d'équation $3x + 8y = 24$ est équidistant des deux axes. Quelle est la somme de toutes les valeurs possibles de a ?
 (A) 0 (B) $-\frac{144}{55}$ (C) $-\frac{11}{5}$ (D) $\frac{24}{11}$ (E) 8
20. Si m et n sont des entiers strictement positifs, avec $n > 1$, tels que $m^n = 2^{25} \times 3^{40}$, quelle est la valeur de $m + n$?
 (A) 209 962 (B) 1954 (C) 209 957 (D) 6598 (E) 1 049 760

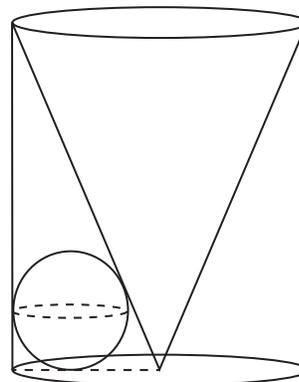
Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Dans la somme ci-contre, chaque lettre représente un chiffre distinct avec $T \neq 0$ et $W \neq 0$. Combien y a-t-il de valeurs différentes possibles de U ?

$$\begin{array}{r}
 W \ X \ Y \ Z \\
 + \ W \ X \ Y \ Z \\
 \hline
 T \ W \ U \ Y \ V
 \end{array}$$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3
 (D) 4 (E) 5

22. Un cylindre a un rayon de 12 et une hauteur de 30. La base circulaire supérieure du cylindre est la base d'un cône et le centre de la base circulaire inférieure du cylindre est le sommet du cône. On place une sphère à l'intérieur du cylindre de manière qu'elle touche au cône, à la base du cylindre et à la surface latérale du cylindre, comme dans la figure ci-contre. Laquelle des valeurs suivantes est plus près du rayon de la sphère?



- (A) 4,84 (B) 4,74 (C) 4,64
 (D) 4,54 (E) 4,44

23. Céline a choisi des entiers strictement positifs a , b et c .

Ariane a calculé la valeur de $a + \frac{b}{c}$ pour obtenir une réponse de 101.

Isabelle a calculé la valeur de $\frac{a}{c} + b$ pour obtenir une réponse de 68.

Véronic a calculé la valeur de $\frac{a+b}{c}$ pour obtenir une réponse de k .

Quelle est la valeur de k ?

- (A) 13 (B) 168 (C) 152 (D) 12 (E) 169

24. Huit équipes participent à un tournoi. Chaque paire d'équipes joue exactement un match l'une contre l'autre. Il n'y a aucun match nul. Si les deux résultats possibles de chaque match sont équiprobables, quelle est la probabilité pour que chaque équipe perde au moins un match et gagne au moins un match?

- (A) $\frac{1799}{2048}$ (B) $\frac{1831}{2048}$ (C) $\frac{1793}{2048}$ (D) $\frac{903}{1024}$ (E) $\frac{889}{1024}$

25. Soit $r = \sqrt{\frac{\sqrt{53}}{2} + \frac{3}{2}}$. Il existe exactement un triplet (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que :

$$r^{100} = 2r^{98} + 14r^{96} + 11r^{94} - r^{50} + ar^{46} + br^{44} + cr^{40}$$

Quelle est la valeur de $a^2 + b^2 + c^2$?

- (A) 11 421 (B) 20 229 (C) 16 291 (D) 15 339 (E) 17 115



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2017! Chaque année, plus de 235 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Hypatie
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours