Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2017

le jeudi 6 avril 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 7 avril 2017
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Puisque $5(2)+3(3)=19$, le couple (a,b) d'entiers strictement positifs qui vérifie l'équation $5a+3b=19$ est $(2,3)$. Donc $a=2$ et $b=3$.

   (b) On écrit les premières puissances de 2 en ordre croissant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

   On peut déterminer une puissance de 2 en multipliant la puissance précédente par 2.
   D'après le tableau, la plus petite puissance de 2 supérieure à 5 est 8 ($2^3=8$) et la plus grande puissance de 2 inférieure à 2017 est 1024 ($2^{10}=1024$). Puisque les valeurs de 2^n sont croissantes, ce sont les seules puissances de 2 dans cet intervalle.
   Donc, les valeurs de n qui vérifient $5<2^n<2017$ sont $n=3,4,5,6,7,8,9,10$.
   Il y a donc 8 entiers positifs n qui vérifient l'inéquation.

   (c) Chacun des 600 euros que Jules a achetés a couté 1,50 \$.
   Donc, les 600 euros ont couté $600 \times 1{,}50$ \$, ou 900 \$.
   Lorsqu'il convertit ces euros en dollars, au taux de 1 \$ pour 0,75 euros, Jules reçoit $600 \text{ Euros} \times \dfrac{1{,}00\,\$}{0{,}75 \text{ euros}}$, ou $\dfrac{600\,\$}{0{,}75}$, ou 800 \$.
   Donc, Jules avait 100 \$ en moins après les deux transactions ($900\,\$ - 800\,\$ = 100\,\$$).

2. (a) Puisque $x \neq 0$ et $x \neq 1$, on peut multiplier chaque membre de l'équation par $x(x-1)$ pour obtenir $\dfrac{5x(x-1)}{x(x-1)} = \dfrac{x(x-1)}{x} + \dfrac{x(x-1)}{x-1}$, ou $5=(x-1)+x$.
   Donc $5=2x-1$, ou $2x=6$, ou $x=3$. Donc, la seule solution est $x=3$.
   (On peut reporter $x=3$ dans l'équation initiale pour vérifier qu'il s'agit bien d'une solution.)

   (b) La somme des nombres de la deuxième colonne est égale à $20+4+(-12)$, ou 12.
   Donc, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont une somme de 12.
   Dans la première rangée, on a donc $0+20+a=12$, d'où $a=-8$.
   Dans la diagonale allant du haut à gauche vers le bas à droite, on a $0+4+b=12$, d'où $b=8$.
   Dans la troisième colonne, on a $a=-8$ et $b=8$, qui ont une somme de 0. Le troisième nombre doit donc être 12.
   Dans la deuxième rangée, on a $c+4+12=12$, d'où $c=-4$.
   On a donc $a=-8$, $b=8$ et $c=-4$.
   On peut compléter le carré magique pour obtenir :

0	20	-8
-4	4	12
16	-12	8

(c) (i) Si $100^2 - n^2 = 9559$, alors $n^2 = 100^2 - 9559$, d'où $n^2 = 10\,000 - 9559$, ou $n^2 = 441$.
Puisque $n > 0$, alors $n = \sqrt{441}$, ou $n = 21$.

(ii) D'après (i), $9559 = 100^2 - 21^2$.
En exprimant la différence de carrés dans le membre de droite comme le produit d'une somme et d'une différence, on obtient :

$$9559 = (100 + 21)(100 - 21) = 121 \cdot 79$$

Donc $(a, b) = (121, 79)$ vérifie les conditions du problème.
(De plus, les couples $(a, b) = (79, 121), (869, 11), (11, 869)$ vérifient les conditions. On ne peut pas obtenir ces deux derniers couples de la même façon.)

3. (a) L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à la somme de l'aire du triangle ABC et de celle du triangle ACD.
Puisque le triangle ABC est rectangle en B, son aire est égale à $\frac{1}{2}(AB)(BC)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(3)(4)$, ou 6.
Puisque le triangle ABC est rectangle en B, alors d'après le théorème de Pythagore, on a

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

puisque $AC > 0$. (On aurait pu affirmer que ABC est un triangle remarquable 3-4-5.)
Puisque le triangle ACD est rectangle en A, alors d'après le théorème de Pythagore, on a

$$AD = \sqrt{CD^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$

puisque $AD > 0$. (On aurait pu affirmer que ACD est un triangle remarquable 5-12-13.)
L'aire du triangle ACD est égale à $\frac{1}{2}(AC)(AD)$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(5)(12)$, ou 30.
L'aire du quadrilatère $ABCD$ est donc égale à $6 + 30$, ou 36.

(b) Soit a la base de chaque rectangle. Donc $QP = RS = TW = WX = UV = VY = a$.
Soit b la hauteur de chaque rectangle, c'est-à-dire que $QR = PS = TU = WV = XY = b$.
Le périmètre de la figure au complet est égale à :

$$QP + PS + SX + XY + VY + UV + TU + TR + QR$$

Il est donc égal à

$$a + b + SX + b + a + a + b + TR + b,$$

ou $3a + 4b + (SX + TR)$.
Or, $SX + TR = (TR + RS + SX) - RS = (TW + WX) - RS = a + a - a = a$.
Le périmètre de la figure au complet est donc égal à $4a + 4b$.
Or, chaque rectangle a un périmètre égal à $2a + 2b$ et on sait qu'il est égal à 21 cm.
Le périmètre de la figure au complet est égal à $2(2a + 2b)$, ce qui est égal à 42 cm.

(c) *Solution 1*
On suppose que le prisme mesure a cm sur b cm sur c cm.
On suppose aussi que la face qui a une aire de 27 cm^2 mesure a cm sur b cm et que la face qui a une aire de 32 cm^2 mesure a cm sur c cm. (Ces choix de variables n'entrainent aucune perte de généralité, puisque deux faces non opposées partagent une même dimension.)
Donc $ab = 27$ et $ac = 32$.
On sait que le prisme a un volume de 144 cm^3, d'où $abc = 144$.
Donc $bc = \dfrac{a^2b^2c^2}{a^2bc}$, ou $bc = \dfrac{(abc)^2}{(ab)(ac)}$. Donc $bc = \dfrac{144^2}{(27)(32)}$, ou $bc = 24$.

(On aurait pu remarquer que $abc = 144$ implique que $a^2b^2c^2 = 144^2$, ou $(ab)(ac)(bc) = 144^2$, d'où $bc = \dfrac{144^2}{(27)(32)}$.)
Donc, une troisième face du prisme a une aire de 24 cm^2.
Puisque le prisme a trois types de faces opposées, l'aire totale du prisme est égale à $2(27\text{ cm}^2 + 32\text{ cm}^2 + 24\text{ cm}^2)$, ou 166 cm^2.

Solution 2
On suppose que le prisme mesure a cm sur b cm sur c cm.
On suppose aussi que la face qui a une aire de 27 cm^2 mesure a cm sur b cm et que la face qui a une aire de 32 cm^2 mesure a cm sur c cm. (Ces choix de variables n'entrainent aucune perte de généralité, puisque deux faces non opposées partagent une même dimension.)
Donc $ab = 27$ et $ac = 32$.
On sait que le prisme a un volume de 144 cm^3, d'où $abc = 144$.
Puisque $abc = 144$ et $ab = 27$, alors $c = \frac{144}{27}$, ou $c = \frac{16}{3}$.
Puisque $abc = 144$ et $ac = 32$, alors $b = \frac{144}{32}$, ou $b = \frac{9}{2}$.
Donc $bc = \frac{16}{3} \cdot \frac{9}{2} = 24$.
En centimètres carrés, l'aire totale du prisme est égale à $2ab+2ac+2bc$, ou $2(27+32+24)$, ou 166.
Le prisme a donc une aire totale de 166 cm^2.

4. (a) *Solution 1*
On développe et on simplifie le membre de droite de chaque équation :

$$y = a(x-2)(x+4) = a(x^2+2x-8) = ax^2+2ax-8a$$
$$y = 2(x-h)^2+k = 2(x^2-2hx+h^2)+k = 2x^2-4hx+(2h^2+k)$$

Puisque ces équations représentent la même parabole, les coefficients correspondants doivent être égaux. On a donc $a = 2$, $2a = -4h$ et $-8a = 2h^2 + k$.
Puisque $a = 2$ et $2a = -4h$, alors $4 = -4h$, d'où $h = -1$.
Puisque $-8a = 2h^2 + k$, $a = 2$ et $h = -1$, alors $-16 = 2 + k$, d'où $k = -18$.
Donc $a = 2$, $h = -1$ et $k = -18$.

Solution 2
À partir de l'équation $y = a(x-2)(x+4)$, on peut déterminer l'équation de l'axe de symétrie à partir des abscisses à l'origine de la parabole.
Les abscisses à l'origine sont 2 et -4. Par symétrie, l'axe de symétrie a pour équation $x = \frac{1}{2}(2 + (-4))$, ou $x = -1$.
Puisque le sommet de la parabole est situé sur l'axe de symétrie, il a pour abscisse -1.
Puisque le sommet est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation de la parabole.
On reporte $x = -1$ dans l'équation $y = a(x-2)(x+4)$ pour obtenir l'ordonnée du sommet.
On obtient $y = a(-1-2)(-1+4)$, ou $y = -9a$.
Le sommet de la parabole a donc pour coordonnées $(-1, -9a)$.
La deuxième équation, $y = 2(x-h)^2 + k$, est sous forme canonique. Elle nous dit que le sommet a pour coordonnées (h, k) et que $a = 2$.
Puisque $a = 2$, le sommet a pour coordonnées $(-1, -18)$. Donc $h = -1$ et $k = -18$.
Donc $a = 2$, $h = -1$ et $k = -18$.

(b) Soit d la raison arithmétique (la constante qu'on ajoute à chaque terme pour obtenir le terme suivant).
Puisque le premier terme est 5, les 5 termes de la suite sont $5, 5+d, 5+2d, 5+3d, 5+4d$.
D'après l'énoncé, on a $5^2 + (5+d)^2 + (5+2d)^2 = (5+3d)^2 + (5+4d)^2$.
On a donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} 5^2 + (5+d)^2 + (5+2d)^2 &= (5+3d)^2 + (5+4d)^2 \\ 25 + (25+10d+d^2) + (25+20d+4d^2) &= (25+30d+9d^2) + (25+40d+16d^2) \\ 75+30d+5d^2 &= 50+70d+25d^2 \\ 0 &= 20d^2+40d-25 \\ 0 &= 4d^2+8d-5 \\ 0 &= (2d+5)(2d-1) \end{aligned}$$

Donc $d = -\frac{5}{2}$ ou $d = \frac{1}{2}$.
Le cinquième terme $5+4d$ a donc pour valeurs possibles $5+4(-\frac{5}{2})$ et $5+4(\frac{1}{2})$, c'est-à-dire -5 et 7.

(Pour ces deux valeurs de d, les suites sont $5, \frac{5}{2}, 0, -\frac{5}{2}, -5$ et $5, \frac{11}{2}, 6, \frac{13}{2}, 7$.)

5. (a) On détermine d'abord les carrés parfaits entre 1300 et 1400 et entre 1400 et 1500.
Puisque $\sqrt{1300} \approx 36{,}06$, le premier carré parfait supérieur à 1300 est 37^2, ou 1369.
Les carrés parfaits suivants sont 38^2 et 39^2, soit 1444 et 1521.
Puisque Dan est né entre l'an 1300 et l'an 1400 et que son année de naissance est un carré parfait, il est né en 1369.
Puisque Samuel est né entre l'an 1400 et l'an 1500 et que son année de naissance est un carré parfait, il est né en 1444.
Supposons que le 7 avril d'une certaine année, Dan avait m^2 ans et Samuel avait n^2 ans, m et n étant des entiers strictement positifs. Dan avait donc m^2 ans en l'an $1369+m^2$ et Samuel avait n^2 ans en l'an $1444+n^2$.
Puisqu'il s'agit de la même année, alors $1369+m^2 = 1444+n^2$, d'où $m^2-n^2 = 1444-1369$, ou $m^2-n^2 = 75$.
On cherche donc deux carrés parfaits inférieurs à 110 (puisque Dan et Samuel ont chacun moins de 110 ans) avec une différence de 75.
Les carrés parfaits inférieurs à 110 sont $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$.
Les deux qui diffèrent de 75 sont 100 et 25.
Donc $m^2 = 100$ et $n^2 = 25$.
C'est donc en l'an $1369+100$, ou 1469, que l'âge de chacun était un carré parfait.

(b) *Solution 1*
Le triangle ABC est rectangle lorsqu'un des énoncés suivants est vrai :
- AB est perpendiculaire à BC, ou
- AB est perpendiculaire à AC, ou
- AC est perpendiculaire à BC.

Puisque les points $A(1,2)$ et $B(11,2)$ ont la même ordonnée, alors AB est horizontal.
Pour que AB et BC soient perpendiculaires, BC doit être vertical.
Donc, $B(11,2)$ et $C(k,6)$ doivent avoir la même abscisse, c'est-à-dire qu'on doit avoir $k=11$.
Pour que AB et AC soient perpendiculaires, AC doit être vertical.
Donc, $A(1,2)$ et $C(k,6)$ doivent avoir la même abscisse, c'est-à-dire qu'on doit avoir $k=1$.

Pour que AC et BC soient perpendiculaires, leurs pentes doivent avoir un produit de -1.
La pente de AC est égale à $\dfrac{6-2}{k-1}$, ou $\dfrac{4}{k-1}$.
La pente de BC est $\dfrac{6-2}{k-11}$, ou $\dfrac{4}{k-11}$.
Donc, AC et BC sont perpendiculaires lorsque $\dfrac{4}{k-1}\cdot\dfrac{4}{k-11}=-1$.
En supposant que $k\neq 1$ et $k\neq 11$, l'équation devient $16=-(k-1)(k-11)$, ou $16=-k^2+12k-11$, ou $k^2-12k+27=0$.
On factorise pour obtenir $(k-3)(k-9)=0$. Donc, AC et BC sont perpendiculaires lorsque $k=3$ ou $k=9$.

Le triangle ABC est donc rectangle lorsque k est égal à $1, 3, 9$ ou 11.

Solution 2
Le triangle ABC est rectangle si les longueurs de ses côtés vérifient la relation de Pythagore.
Il est donc rectangle si $AB^2+BC^2=AC^2$ ou $AB^2+AC^2=BC^2$ ou $AC^2+BC^2=AB^2$.
Avec $A(1,2)$ et $B(11,2)$, on a $AB^2=(11-1)^2+(2-2)^2$, ou $AB^2=100$.
Avec $A(1,2)$ et $C(k,6)$, on a $AC^2=(k-1)^2+(6-2)^2$, ou $AC^2=(k-1)^2+16$.
Avec $B(11,2)$ et $C(k,6)$, on a $BC^2=(k-11)^2+(6-2)^2$, ou $BC^2=(k-11)^2+16$.
En se référant aux relations de Pythagore ci-dessus, le triangle ABC est rectangle lorsque l'une des équations suivantes est satisfaite :

(i)

$$\begin{aligned}100+((k-11)^2+16)&=(k-1)^2+16\\100+k^2-22k+121+16&=k^2-2k+1+16\\220&=20k\\k&=11\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}100+((k-1)^2+16)&=(k-11)^2+16\\100+k^2-2k+1+16&=k^2-22k+121+16\\20k&=20\\k&=1\end{aligned}$$

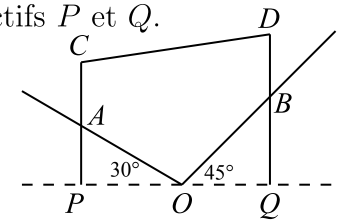
(iii)

$$\begin{aligned}((k-1)^2+16)+((k-11)^2+16)&=100\\k^2-2k+1+16+k^2-22k+121+16&=100\\2k^2-24k+54&=0\\k^2-12k+27&=0\\(k-3)(k-9)&=0\end{aligned}$$

Donc $k=3$ ou $k=9$.

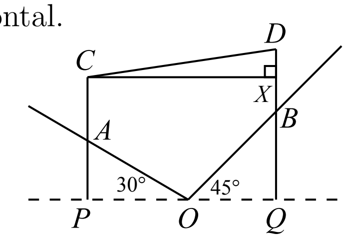
Le triangle ABC est donc rectangle lorsque k est égal à $1, 3, 9$ ou 11.

6. (a) On prolonge les segments CA et DB vers le bas jusqu'à ce qu'ils joignent la droite horizontale à tirets au points respectifs P et Q.



Puisque CA et DB sont verticaux, alors $\angle CPO = \angle DQO = 90°$.
Puisque $OA = 20$ m, alors $AP = OA \sin 30°$, ou $AP = (20 \text{ m}) \cdot \frac{1}{2}$, ou $AP = 10$ m.
Puisque $OB = 20$ m, alors $BQ = OB \sin 45°$, ou $BQ = (20 \text{ m}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou $BQ = 10\sqrt{2}$ m.
Puisque $AC = 6$ m et $CP = AC + AP$, alors $CP = 16$ m.
Pour que CD soit le plus court que possible, tenant compte que C est fixe, CD doit être horizontal :

Si CD n'était pas horizontal, soit X le point sur DQ ou sur son prolongement, de manière que CX soit horizontal.



Alors $\angle CXD = 90°$ et le triangle CXD est rectangle avec hypoténuse CD.
Donc, CD est plus long que CX et que XD.
Puisque $CD > CX$, on peut conclure que CD serait plus court si D était situé au point X. En d'autres mots, CD est le plus court possible lorsque CD est horizontal.

Lorsque CD est horizontal, $CDQP$ est un rectangle, puisque deux de ses côtés sont horizontaux et ses deux autres côtés sont verticaux. Donc $DQ = CP = 16$ m.
Puisque $BD = DQ - BQ$, alors $BD = (16 - 10\sqrt{2})$ m.

(b) Puisque $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, on peut supposer que $\cos\theta \neq 0$.
On obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \tan\theta \\ \cos\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \cos^2\theta &= \sin\theta \\ 1 - \sin^2\theta &= \sin\theta \\ 0 &= \sin^2\theta + \sin\theta - 1 \end{aligned}$$

Soit $u = \sin\theta$. L'équation précédente devient $u^2 + u - 1 = 0$.

La formule pour résoudre une équation du second degré donne $u = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$, ou $u = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Donc $\sin\theta = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}62$ ou $\sin\theta = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62$.

Puisque $-1 \leq \sin\theta \leq 1$, cette dernière valeur est rejetée. Donc $\sin\theta = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

7. (a) *Solution 1*

Soit v km/h la vitesse des trains.

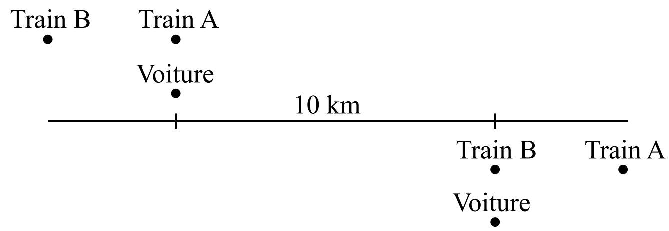
On considère deux points consécutifs où la voiture est dépassée par un train.

Puisque ces points sont à 10 minutes l'un de l'autre, ce qui correspond à $\frac{1}{6}$ heure, et que la voiture se déplace à une vitesse de 60 km/h, la voiture parcourt une distance de $(60\text{ km/h}) \cdot (\frac{1}{6}\text{ h})$, ou 10 km entre ces deux points.

Durant ces 10 minutes, chaque train parcourt $\frac{1}{6}v$ km.

Au premier point, le train A et la voiture sont vis-à-vis l'un de l'autre.

Au même moment, le train B a 3 minutes de retard sur le train A.



Puisque 3 minutes correspondent à $\frac{1}{20}$ heure, le train B est à $\frac{1}{20}v$ km derrière le train A et la voiture.

Entre les deux points consécutifs où la voiture est dépassée par des trains, il y a donc une distance de $(\frac{1}{20}v+10)$ km. Or, cette distance est égale à $\frac{1}{6}v$ km, puisque les trains dépassent la voiture à toutes les 10 minutes et le train B parcourt cette distance en 10 minutes.

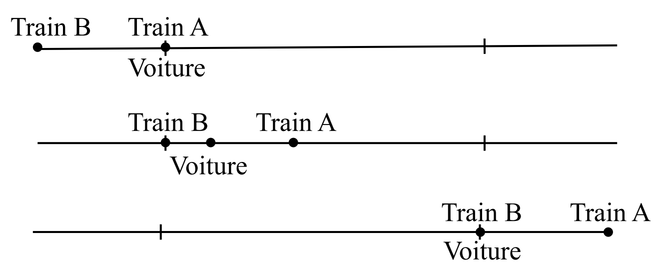
Donc $\frac{1}{6}v = \frac{1}{20}v + 10$, ou $\frac{10}{60}v - \frac{3}{60}v = 10$, d'où $\frac{7}{60}v = 10$, ou $v = \frac{600}{7}$.

Les trains se déplacent donc à une vitesse de $\frac{600}{7}$ km/h.

Solution 2

Soit v km/h la vitesse des trains.

On considère les trois moments suivants : le moment où la voiture et le train A sont vis-à-vis l'un de l'autre, le moment où le train B est au même endroit que le train A et la voiture au moment précédent et le moment où la voiture et le train B sont vis-à-vis l'un de l'autre.



Entre les deux premiers moments, le train B atteint le point où était le train A, ce qui prend 3 minutes, puisque les trains quittent la gare à toutes les 3 minutes.

Puisque 3 minutes correspondent à $\frac{3}{60}$ heure et que la voiture se déplace à la vitesse de 60 km/h, la voiture parcourt une distance de $(60\text{ km/h}) \cdot (\frac{3}{60}\text{ h})$, ou 3 km entre ces deux moments.

Entre le premier moment et le troisième moment, 10 minutes se sont passées, puisqu'il s'agit de l'intervalle de temps entre deux dépassements consécutifs de la voiture par des trains. En 10 minutes, la voiture parcourt 10 km.

Entre le deuxième moment et le troisième moment, 7 minutes se sont écoulées $(10-3=7)$.

Pendant ces 7 minutes, le train B parcourt 10 km.

Puisque 7 minutes correspondent à $\frac{7}{60}$ heure, alors $v\text{ km/h} = \frac{10\text{ km}}{7/60\text{ h}} = \frac{600}{7}$ km/h. Les trains se déplacent donc à la vitesse de $\frac{600}{7}$ km/h.

(b) D'après la première équation, on a $a \geq 0$ et $b \geq 0$, puisque la racine carrée n'est définie que pour des nombres réels non négatifs.
D'après la deuxième équation, on a $a > 0$ et $b > 0$, puisque les logarithmes ne sont définis que pour des nombres réels strictement positifs.
D'après ces deux restrictions, on a $a > 0$ et $b > 0$.

D'après l'équation $\log_{10} a + \log_{10} b = 2$, on obtient $\log_{10}(ab) = 2$, d'où $ab = 10^2$, ou $ab = 100$.
D'après la deuxième équation, on a :

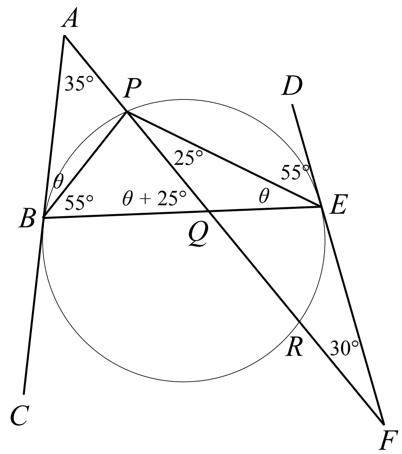
$$\begin{aligned}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 &= 8^2\\ a + 2\sqrt{ab} + b &= 64\\ a + 2\sqrt{100} + b &= 64\\ a + 2(10) + b &= 64\\ a + b &= 44\end{aligned}$$

Puisque $a + b = 44$, alors $b = 44 - a$.
On reporte $b = 44 - a$ dans $ab = 100$ pour obtenir $a(44 - a) = 100$, ou $44a - a^2 = 100$, ou $0 = a^2 - 44a + 100$.
D'après la formule pour résoudre une équation du second degré, on a :

$$a = \frac{44 \pm \sqrt{44^2 - 4(1)(100)}}{2 \cdot 1} = \frac{44 \pm \sqrt{1536}}{2} = \frac{44 \pm 16\sqrt{6}}{2} = 22 \pm 8\sqrt{6}$$

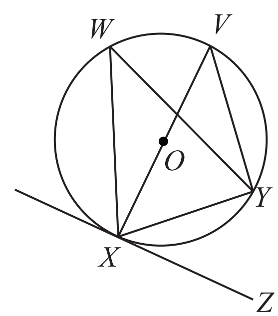
Puisque $b = 44 - a$, alors $b = 44 - (22 \pm 8\sqrt{6})$, ou $b = 22 \mp 8\sqrt{6}$.
Donc $(a, b) = (22 + 8\sqrt{6}, 22 - 8\sqrt{6})$ ou $(a, b) = (22 - 8\sqrt{6}, 22 + 8\sqrt{6})$.
(Puisque $22 + 8\sqrt{6} > 0$ et $22 - 8\sqrt{6} > 0$, les restrictions initiales sur a et b sont vérifiées.)

8. (a) Soit $\angle PEQ = \theta$.
On trace le segment PB.
On utilise la propriété de l'angle formé par une tangente à un cercle au point de contact et une corde du cercle issue du même point. Cet angle est égal à l'angle inscrit qui intercepte cette corde On démontrera cette propriété ci-dessous.
Selon cette propriété, $\angle DEP = \angle PBE$ (la corde EP et la tangente au point E forment l'angle DEP et l'angle inscrit PBE intercepte la corde PE) et $\angle ABP = \angle PEB = \theta$ (la corde BP et la tangente au point B forment l'angle ABP et l'angle inscrit PEB intercepte la corde BP).
Or, l'angle DEP est extérieur au triangle FEP. Donc $\angle DEP = \angle FPE + \angle EFP$, d'où $\angle DEP = 25° + 30°$, ou $\angle PBE = \angle DEP = 55°$.
De plus, l'angle AQB est extérieur au triangle PQE.
Donc, $\angle AQB = \angle QPE + \angle PEQ$, ou $\angle AQB = 25° + \theta$.



Dans le triangle ABQ, on a $\angle BAQ = 35°$, $\angle ABQ = \theta + 55°$ et $\angle AQB = 25° + \theta$.
Donc $35° + (\theta + 55°) + (25° + \theta) = 180°$, ou $115° + 2\theta = 180°$, ou $2\theta = 65°$.
Donc $\angle PEQ = \theta = \frac{1}{2}(65°)$, ou $\angle PEQ = 32{,}5°$.

On démontre maintenant que l'angle formé par une tangente à un cercle et une corde issue du point de contact est égal à l'angle inscrit qui intercepte la corde.
On considère un cercle de centre O, une corde XY et une tangente ZX au cercle au point X. Soit W un point sur le cercle, sur l'arc qui n'est pas compris dans l'angle ZXY. On démontre que $\angle ZXY = \angle XWY$ (c'est-à-dire qu'un angle inscrit sur la partie opposée à l'angle ZXY et qui intercepte la corde XY est égal à l'angle ZXY).
La démonstration porte sur un angle ZXY aigu. La démonstration est semblable lorsque l'angle ZXY est droit ou obtus.

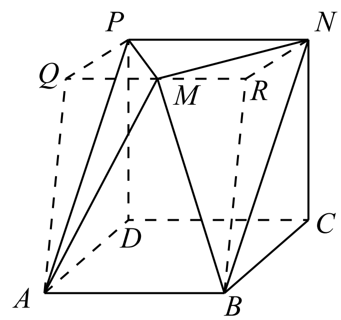


On trace le diamètre XOV et la corde VY. Puisque l'angle ZXY est aigu, les points V et W sont situés du même côté de la corde XY.
Donc $\angle XVY = \angle XWY$, puisque ces angles inscrits interceptent la même corde.
Puisque OX est un rayon et que XZ est une tangente, alors $\angle OXZ = 90°$.
Donc $\angle OXY + \angle ZXY = 90°$.
Puisque XV est un diamètre, alors $\angle XYV = 90°$.
Dans le triangle XYV, on a $\angle XVY + \angle VXY = 90°$.
Or, $\angle OXY + \angle ZXY = 90°$, $\angle XVY + \angle VXY = 90°$ et $\angle OXY = \angle VXY$, d'où $\angle ZXY = \angle XVY$.
Donc $\angle ZXY = \angle XWY$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) *Solution 1*

Au point M, on trace un segment de droite dans le plan du triangle PMN, parallèle à PN et on le prolonge d'un côté jusqu'à ce qu'il joigne au point Q le plan qui contient les points P, A et D et de l'autre côté jusqu'à ce qu'il joigne au point R le plan qui contient les points N, B et C.

On trace les segments QP et QA, de même que RN et RB.



Le volume du solide $ABCDPMN$ est égal au volume du solide $ABCDPQRN$ moins les volumes des solides $PMQA$ et $NMRB$.

Le solide $ABCDPQRN$ est un prisme droit ayant pour base le trapèze $NRBC$ (ou $PQAD$). En effet, NR et BC sont parallèles (d'après la construction de R) et $NRBC$ est donc un trapèze. De même, $PQAD$ est un trapèze. De plus, PN, QR, DC et AB sont perpendiculaires à ces trapèzes et de même longueur, puisqu'ils ont la même longueur que les côtés d'un carré.

Les solides $PMQA$ et $NMRB$ sont des pyramides à bases triangulaires, soit les triangles PMQ et NMR. Ces deux pyramides ont une hauteur de 2, la même hauteur que le solide initial. (Le volume d'une pyramide est égal à $\frac{1}{3}$ du volume du prisme correspondant, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ du produit de l'aire de la base et de la hauteur.)

Le volume de $ABCDPQRN$ est égal au produit de l'aire de sa base $NRBC$ et de sa hauteur, 2. Il est donc égal à $\frac{1}{2}(NR + BC)(NC)(NP)$, ou $\frac{1}{2}(NR + 2)(2)(2)$, ou $2 \cdot NR + 4$.

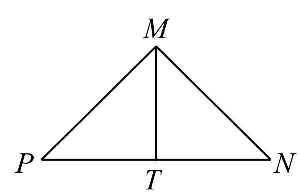
On doit donc déterminer la longueur de NR.

On considère le quadrilatère $PNRQ$. Il s'agit d'un rectangle, puisque PN et QR sont perpendiculaires aux plans qui contiennent les faces latérales PDA et NCB du solide initial.

Donc NR est égal à la hauteur du triangle PMN correspondant à la base PN.

On joint M au milieu T de PN.

Puisque le triangle PMN est isocèle, MT est perpendiculaire à PN.



Puisque $NT = \frac{1}{2}PN = 1$, $\angle PMN = 90°$ et $\angle TNM = 45°$, alors le triangle MTN est rectangle et isocèle, avec $MT = TN = 1$.

Donc $NR = MT = 1$. Le volume du solide $ABCDPQRN$ est donc égal à $2 \cdot 1 + 4$, ou 6.

Les solides $PMQA$ et $NMRB$ ont le même volume, puisqu'ils ont une hauteur de 2 et que leurs bases, les triangles PMQ et NMR, sont isométriques (les triangles sont rectangles avec $PQ = NR = 1$ et $QM = MR = 1$).

Chacun a donc un volume égal à $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}(1)(1))2$, ou $\frac{1}{3}$.

Le solide initial a donc un volume égal à $6 - 2 \cdot \frac{1}{3}$, ou $\frac{16}{3}$.

Solution 2

On détermine le volume du solide $ABCDPMN$ en coupant le solide selon le plan $ABNP$ de manière à produire deux solides, $ABCDPN$ et $ABNPM$.

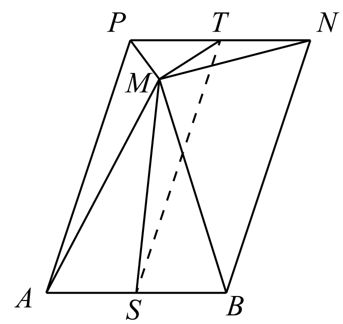
Le solide $ABCDPN$ est un prisme droit à base triangulaire BCN (ou ADP). Ces triangles sont rectangles en C et D et $BC = CN = AD = DP = 2$. Les segments PN, DC et AB sont perpendiculaires aux plans des triangles et ils ont la même longueur.

Le volume du solide $ABCDPN$ est donc égal au produit de l'aire du triangle BCN et de la hauteur DC du prisme. Il est donc égal à $\frac{1}{2}(BC)(CN)(DC)$, ou $\frac{1}{2}(2)(2)(2)$, ou 4. (On peut aussi considérer que ce solide est la moitié d'un cube.)

Le solide $ABNPM$ est une pyramide droite dont la base est le rectangle $ABNP$. (On sait que $PN = AB = 2$ et que les triangles ADP et BCN sont rectangles et isocèles. Par le théorème de Pythagore, on a $BN = AP = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.)

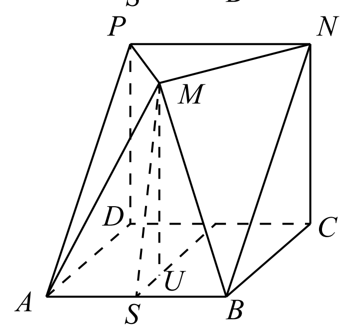
Le volume de la pyramide $ABNPM$ est égal à $\frac{1}{3}(AB)(BN)h$, h étant sa hauteur, c'est-à-dire la distance entre le point M et la base $ABNP$. Il est donc égal à $\frac{4\sqrt{2}}{3}h$.

On doit donc déterminer h.



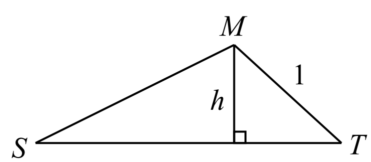
On joint M au milieu T de PN et au milieu S de AB. On joint S et T. Par symétrie, M est situé directement au-dessus de ST. Puisque $ABNP$ est un rectangle et que S et T sont les milieux de deux de ses côtés opposés, alors $ST = AP = 2\sqrt{2}$.

Puisque le triangle PMN est rectangle et isocèle, alors MT est perpendiculaire à PN. Puisque $NT = \frac{1}{2}PN = 1$ et que $\angle TNM = 45°$, alors le triangle MTN est aussi rectangle et isocèle avec $MT = TN = 1$.



De plus, MS est l'hypoténuse d'un triangle rectangle MUS formé en abaissant une perpendiculaire au point M jusqu'au point U sur le plan qui contient $ABCD$ (une distance de 2) et en joignant U et S. Puisque M est situé à une distance horizontale de 1 du segment PN, alors $US = 1$.

Par le théorème de Pythagore, $MS = \sqrt{2^2 + 1^2}$, ou $MS = \sqrt{5}$.



On considère le triangle SMT. Soit h la hauteur de ce triangle, du point M à la base ST. Or $h = MT \sin(\angle MTS)$, d'où $h = \sin(\angle MTS)$.

D'après la loi du cosinus dans le triangle SMT, on a :

$$MS^2 = ST^2 + MT^2 - 2(ST)(MT)\cos(\angle MTS)$$

Donc $5 = 8 + 1 - 4\sqrt{2}\cos(\angle MTS)$, ou $4\sqrt{2}\cos(\angle MTS) = 4$.

Donc $\cos(\angle MTS) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, d'où $\angle MTS = 45°$. Donc $h = \sin(\angle MTS)$, ou $h = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(On aurait pu remarquer que le plan contenant $ABCD$ est parallèle au plan contenant PMN et que puisque l'angle entre les plans $ABCD$ et $PNBA$ mesure 45°, alors l'angle entre les plans $PNBA$ et PMN mesure aussi 45°. Donc $\angle MTS = 45°$.)

Le volume de $ABNPM$ est donc égal à $\frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou $\frac{4}{3}$, et le volume du solide $ABCDPMN$ est donc égal à $4 + \frac{4}{3}$, ou $\frac{16}{3}$.

9. (a) Le nombre de permutations de $1, 2, 3, 4$ est égal à $4!$, c'est-à-dire à $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, ou 24.
En effet, il y a 4 choix possibles du premier nombre a_1 et pour chacun de ces choix, il y a 3 choix possibles du deuxième nombre a_2 et pour chacun de ces choix, il y a 2 choix possibles du troisième nombre a_3 et pour chacun de ces choix, il y a 1 choix possible du quatrième nombre a_4.
On considère la permutation $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$. (On écrira 1, 2, 3, 4.)
Dans ce cas, on a $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| = |1 - 2| + |3 - 4| = 1 + 1 = 2$.
Chacune des permutations 2, 1, 3, 4 et 1, 2, 4, 3 et 2, 1, 4, 3 et 3, 4, 1, 2 et 4, 3, 1, 2 et 3, 4, 2, 1 et 4, 3, 2, 1 donne la même valeur de $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4|$.
On considère la permutation 1, 3, 2, 4.
Dans ce cas, on a $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| = |1 - 3| + |2 - 4| = 2 + 2 = 4$.
Chacune des permutations 3, 1, 2, 4 et 1, 3, 4, 2 et 3, 1, 4, 2 et 2, 4, 1, 3 et 4, 2, 1, 3 et 2, 4, 3, 1 et 4, 2, 3, 1 donne la même valeur de $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4|$.
On considère la permutation 1, 4, 2, 3.
Dans ce cas, on a $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| = |1 - 4| + |2 - 3| = 3 + 1 = 4$.
Chacune des permutations 4, 1, 2, 3 et 1, 4, 3, 2 et 4, 1, 3, 2 et 2, 3, 1, 4 et 3, 2, 1, 4 et 2, 3, 4, 1 et 3, 2, 4, 1 donne la même valeur de $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4|$.
Ceci tient compte des 24 permutations.
La valeur moyenne de l'expression $|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4|$ est donc égale à $\dfrac{2 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 8}{24}$, ou $\dfrac{80}{24}$, ou $\dfrac{10}{3}$.

(b) Le nombre de permutations de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ est égal à $7!$, ou $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, puisqu'il y a 7 choix du premier nombre a_1 et pour chacun de ces choix, il y a 6 choix du deuxième nombre a_2 et ainsi de suite.
On détermine la valeur moyenne de l'expression $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7$, la valeur étant calculée pour toutes les $7!$ permutations, en additionnant ces valeurs et en divisant la somme par $7!$.
Pour déterminer la somme de ces $7!$ valeurs, on détermine la somme s_1 des valeurs de a_1 dans ces expressions, la somme s_2 des valeurs de a_2 dans ces expressions, et ainsi de suite.
La somme des $7!$ valeurs de l'expression donnée doit être égale à $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + s_5 - s_6 + s_7$.
Cela découle du fait que pour une addition, l'ordre dans lequel on effectue l'addition des termes n'importe pas.
Par symétrie, on sait que les sommes des valeurs de $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ seront égales, c'est-à-dire que $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s_7$.
La valeur moyenne est donc égale à :

$$\frac{s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + s_5 - s_6 + s_7}{7!} = \frac{(s_1 + s_3 + s_5 + s_7) - (s_2 + s_4 + s_6)}{7!} = \frac{4s_1 - 3s_1}{7!} = \frac{s_1}{7!}$$

On doit donc déterminer la valeur de s_1.
Or, a_1 prend pour valeurs chacun des nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
Si $a_1 = 1$, il y a $6!$ façons d'attribuer des valeurs à $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, puisqu'il y a 6 choix pour la valeur de a_2 et pour chacun de ces choix, il y a 5 choix pour la valeur de a_3 et ainsi de suite.
De même, lorsque a_1 prend chacune des valeurs $2, 3, 4, 5, 6, 7$, il y a $6!$ façons d'attribuer des valeurs à $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$.
Donc $s_1 = 1 \cdot 6! + 2 \cdot 6! + 3 \cdot 6! + 4 \cdot 6! + 5 \cdot 6! + 6 \cdot 6! + 7 \cdot 6!$, ou $s_1 = 6!(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7)$, ou $s_1 = 28(6!)$.
La valeur moyenne de l'expression est donc égale à : $\dfrac{28(6!)}{7!} = \dfrac{28(6!)}{7(6!)} = \dfrac{28}{7} = 4$

(c) Le nombre de permutations de $1, 2, 3, \ldots, 198, 199, 200$ est égal à $200!$.
On détermine la valeur moyenne de l'expression

$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \cdots + |a_{197} - a_{198}| + |a_{199} - a_{200}|, \qquad (*)$$

la valeur étant calculée pour toutes les $200!$ permutations, en additionnant ces valeurs et en divisant la somme par $200!$.
Comme dans la partie (b), soit s_1 la somme des valeurs de $|a_1 - a_2|$ dans chacune de ces expressions, s_2 la somme des valeurs de $|a_3 - a_4|$ dans chacune de ces expressions et ainsi de suite.
La somme des $200!$ valeurs de $(*)$ est égale à $s_1 + s_2 + \cdots + s_{99} + s_{100}$.
Par symétrie, $s_1 = s_2 = \cdots = s_{99} = s_{100}$.
La valeur moyenne de l'expression $(*)$ est égale à $\dfrac{100s_1}{200!}$. On doit donc déterminer la valeur de s_1.

Supposons que $a_1 = i$ et $a_2 = j$, i et j étant des entiers de 1 à 200.
Il y a $198!$ permutations des entiers de 1 à 200 dans lesquelles $a_1 = i$ et $a_2 = j$, puisqu'il y a 198 valeurs possibles de a_3 et pour chacune d'elles, il y a 197 valeurs possibles de a_4 et ainsi de suite.
De même, il y a $198!$ permutations avec $a_1 = j$ et $a_2 = i$.
Puisque $|i - j| = |j - i|$, il y a $2(198!)$ permutations avec $|a_1 - a_2| = |i - j|$ dans lesquelles a_1 et a_2 égalent i et j dans un ordre quelconque.
On peut donc supposer que $i > j$ et que s_1 est égal à $2(198!)$ fois la somme des valeurs de $i - j$ calculée pour tous les couples où $i > j$.
(Le nombre de couples (i, j) d'entiers où $i > j$ est égal à $\dbinom{200}{2}$, ou $\dfrac{200(199)}{2}$. Pour chacun de ces couples, il y a $2(198!)$ façons de choisir les autres éléments de la permutation, pour un nombre total de permutations égal à $\dfrac{200(199)}{2} \cdot 2(198!)$, ou $200(199)(198!)$, ou $200!$, ce à quoi on s'attend.)
Pour déterminer la valeur de s_1, il faut déterminer la somme des valeurs de $i - j$.
On calcule cette somme D en posant $j = 1, 2, 3, \ldots, 198, 199$ et pour chacune de ces valeurs, on attribue à i les valeurs entières possibles où $j < i \leq 200$:

$$\begin{aligned}
D = {} & (2-1) + (3-1) + (4-1) + \cdots + (197-1) + (198-1) + (199-1) + (200-1) \\
& + (3-2) + (4-2) + (5-2) + \cdots + (198-2) + (199-2) + (200-2) \\
& + (4-3) + (5-3) + (6-3) + \cdots + (199-3) + (200-3) \\
& \vdots \\
& + (199-198) + (200-198) \\
& + (200-199) \\
& = 199(1) + 198(2) + 197(3) + \cdots + 2(198) + 1(199) \qquad \text{(en regroupant selon les colonnes)} \\
& = 199(200-199) + 198(200-198) + 197(200-197) + \cdots + 2(200-2) + 1(200-1) \\
& = 200(199 + 198 + 197 + \cdots + 3 + 2 + 1) - (199^2 + 198^2 + 197^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 + 1^2) \\
& = 200 \cdot \tfrac{1}{2}(199)(200) - \tfrac{1}{6}(199)(199+1)(2(199)+1) \\
& = 100(199)(200) - \tfrac{1}{6}(199)(200)(399) \\
& = 199(200)\left(100 - \tfrac{133}{2}\right) \\
& = 199(200)\tfrac{67}{2}
\end{aligned}$$

Donc $s_1 = 2(198!)D = 2(198!) \cdot \frac{199(200)(67)}{2} = 67(198!)(199)(200) = 67(200!)$.

La valeur moyenne de $(*)$ est égale à $\dfrac{100s_1}{200!}$, ou $\dfrac{100(67)(200!)}{200!}$, ou 6700.

On a utilisé les identités suivantes pour tout entier strictement positif n :

- $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$
- $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

On aurait pu calculer la valeur de D en utilisant la notation sigma comme suit :

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{i=2}^{200} \sum_{j=1}^{i-1} (i-j) \\
&= \left(\sum_{i=2}^{200} \sum_{j=1}^{i-1} i\right) - \left(\sum_{i=2}^{200} \sum_{j=1}^{i-1} j\right) \\
&= \left(\sum_{i=2}^{200} i(i-1)\right) - \left(\sum_{i=2}^{200} \tfrac{1}{2}(i-1)i\right) \\
&= \left(\sum_{i=2}^{200} i(i-1)\right) - \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{200} (i-1)i\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=2}^{200} (i-1)i\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{200} (i-1)i\right) \qquad \text{(puisque } (i-1)i = 0 \text{ lorsque } i = 1\text{)} \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{200} (i^2 - i)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{200} i^2 - \sum_{i=1}^{200} i\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{6}(200)(200+1)(2(200)+1) - \tfrac{1}{2}(200)(200+1)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}(200)(201)\left(\tfrac{1}{6}(401) - \tfrac{1}{2}\right) \\
&= 100(201) \cdot \tfrac{398}{6} \\
&= 100(201) \cdot \tfrac{199}{3} \\
&= 100(67)(199),
\end{aligned}$$

ce qui est égal à $199(200)\frac{67}{2}$, comme on s'y attendait.
(Défi : Déterminer une formule générale lorsqu'on remplace 200 par $2n$.)

10. (a) On considère le sous-ensemble $\{1, 2, 3\}$.
Si on additionne les éléments deux à deux, on obtient $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$ et $2 + 3 = 5$, soit trois sommes différentes.
Donc $\{1, 2, 3\}$ est excitant.
On continue en ajoutant d'autres éléments à $\{1, 2, 3\}$.
On ne peut pas ajouter l'élément 4, parce qu'on aurait $1 + 4 = 2 + 3$, ce qui ferait de $\{1, 2, 3, 4\}$ un sous-ensemble ennuyant.
On considère le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 5\}$.
Si on additionne les éléments deux à deux, on obtient :

$$1 + 2 = 3 \qquad 1 + 3 = 4 \qquad 1 + 5 = 6 \qquad 2 + 3 = 5 \qquad 2 + 5 = 7 \qquad 3 + 5 = 8$$

On a des sommes différentes et $\{1, 2, 3, 5\}$ est donc un sous-ensemble excitant.
On ne peut pas ajouter 6 ou 7, puisqu'on aurait $2 + 5 = 1 + 6$ et $3 + 5 = 1 + 7$.
On considère le sous-ensemble $\{1, 2, 3, 5, 8\}$.
En plus des six sommes précédentes d'éléments deux à deux, on a $1 + 8 = 9$, $2 + 8 = 10$, $3 + 8 = 11$ et $5 + 8 = 13$, soit quatre autres sommes différentes.
Donc, $\{1, 2, 3, 5, 8\}$ est un sous-ensemble excitant de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ qui contient exactement 5 éléments.
(Le sous-ensemble $\{1, 4, 6, 7, 8\}$ est le seul autre sous-ensemble excitant de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ qui contient exactement 5 éléments.)

(b) Soit S un ensemble excitant de m entiers strictement positifs.
Il y a donc $\binom{m}{2}$ paires, ou $\dfrac{m(m-1)}{2}$ paires d'éléments de S.
Puisque S est excitant, les sommes de ces paires d'entiers sont toutes distinctes.
La plus grande de ces sommes doit donc être supérieure ou égale à $\dfrac{m(m-1)}{2}$.
Lorsque deux nombres ont une somme supérieure ou égale à $\dfrac{m(m-1)}{2}$, alors au moins un de ces nombres doit être au moins aussi grand que $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{m(m-1)}{2}$, ou $\dfrac{m^2 - m}{4}$.
Donc, S contient un entier supérieur ou égal à $\dfrac{m^2 - m}{4}$.

(c) Soit n un entier tel que $n \geq 10$.
Pour chaque entier k dans l'intervalle $1 \leq k \leq n$, on définit $x_k = 2n \cdot \text{reste}(k^2, n) + k$, $\text{reste}(k^2, n)$ étant le reste lorsque k^2 est divisé par n.
Soit $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$. On montrera que T est excitant précisément lorsque n est premier.

Soit a, b, c et d des entiers distincts de 1 à n tels que $x_a + x_b = x_c + x_d$.
Cette équation est équivalente à :

$$(2n \cdot \text{reste}(a^2, n) + a) + (2n \cdot \text{reste}(b^2, n) + b) = (2n \cdot \text{reste}(c^2, n) + c) + (2n \cdot \text{reste}(d^2, n) + d)$$

et

$$2n \cdot (\text{reste}(a^2, n) + \text{reste}(b^2, n) - \text{reste}(c^2, n) - \text{reste}(d^2, n)) = c + d - a - b$$

Puisque a, b, c et d sont des entiers distincts de 1 à n, alors $1 + 2 \leq a + b \leq (n - 1) + n$, ou $3 \leq a + b \leq 2n - 1$. De même, $3 \leq c + d \leq 2n - 1$.
Donc $3 - (2n - 1) \leq c + d - a - b \leq (2n - 1) - 3$, ou $-2n + 4 \leq c + d - a - b \leq 2n - 4$.
Or, le membre de gauche de l'équation

$$2n \cdot (\text{reste}(a^2, n) + \text{reste}(b^2, n) - \text{reste}(c^2, n) - \text{reste}(d^2, n)) = c + d - a - b$$

est un entier qui est un multiple de $2n$, ce qui implique que le membre de droite, $c+d-a-b$, l'est aussi.
Puisque $-2n+4 \leq c+d-a-b \leq 2n-4$ et que le seul multiple de $2n$ entre $-2n+4$ et $2n-4$ est $0 \cdot 2n = 0$, alors $c+d-a-b=0$, ou $c+d=a+b$.
Donc $2n \cdot (\text{reste}(a^2,n)+\text{reste}(b^2,n)-\text{reste}(c^2,n)-\text{reste}(d^2,n)) = 0$.
Puisque $n \neq 0$, alors $\text{reste}(a^2,n)+\text{reste}(b^2,n)-\text{reste}(c^2,n)-\text{reste}(d^2,n) = 0$.
Donc, $x_a + x_b = x_c + x_d$ précisément lorsque :

$$a+b=c+d \quad \text{et} \quad \text{reste}(a^2,n)+\text{reste}(b^2,n)=\text{reste}(c^2,n)+\text{reste}(d^2,n)$$

On considère cette dernière équation.
Lorsqu'on divise a^2 par n, on obtient un quotient q_a et un reste, $\text{reste}(a^2,n)$.
On remarque que $a^2 = q_a n + \text{reste}(a^2,n)$ et $0 \leq \text{reste}(a^2,n) < n$.
On définit q_b, q_c et q_d de la même manière et on obtient :

$$(a^2 - q_a n) + (b^2 - q_b n) = (c^2 - q_c n) + (d^2 - q_d n)$$

ou

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = n(q_a + q_b - q_c - q_d)$$

Puisque $a+b=c+d$, alors $a^2+2ab+b^2 = c^2+2cd+d^2$, ou $a^2+b^2-c^2-d^2 = 2cd-2ab$.
Donc, $x_a+x_b = x_c+x_d$ précisément lorsque $a+b=c+d$ et $2cd-2ab = n(q_a+q_b-q_c-q_d)$.
Puisque $d = a+b-c$, cette dernière équation devient :

$$\begin{aligned} 2c(a+b-c)-2ab &= n(q_a+q_b-q_c-q_d) \\ -2(c^2-ac-bc+ab) &= n(q_a+q_b-q_c-q_d) \\ -2(c(c-a)-b(c-a)) &= n(q_a+q_b-q_c-q_d) \\ -2(c-a)(c-b) &= n(q_a+q_b-q_c-q_d) \end{aligned}$$

Supposons que n est un nombre premier. Puisque $n \geq 10$, alors n est impair.
Supposons que $x_a + x_b = x_c + x_d$. On montrera que c'est impossible.
Alors $a+b=c+d$ et $-2(c-a)(c-b) = n(q_a+q_b-q_c-q_d)$.
Donc, $2(c-a)(c-b)$ est un multiple de n, qui est un nombre premier impair.
Donc $c-a$ ou $c-b$ est un multiple de n.
Or a, b, c et d sont des entiers distincts dans l'intervalle de 1 à n. Donc $1-n \leq c-a \leq n-1$ et $1-n \leq c-b \leq n-1$.
Le seul multiple de n dans cet intervalle est 0. Donc $c-a=0$ ou $c-b=0$, ce qui contredit le fait que a, b, c et d sont distincts.
Donc si n est un nombre premier, il n'y a pas quatre nombre distincts dans T qui rendent T ennuyant. Donc, T est excitant.

Supposons que n est un nombre composé.
On considère trois cas : n est une puissance d'un nombre premier p (c.-à-d. que $n = p^2$), n est pair, n est n'importe quel autre nombre composé.
Supposons que $n = p^2$, p étant un nombre premier. Puisque $n \geq 10$, alors $p \geq 5$.
Posons $a = p$, $b = 4p$, $c = 2p$ et $d = 3p$.
Alors $a + b = 5p = c + d$.
Puisque $p \geq 5$, alors $0 < p < 2p < 3p < 4p < p^2$.
Puisque chacun des entiers a, b, c, d est divisible par p, alors chacun des entiers a^2, b^2, c^2, d^2 est divisible par p^2, ou n. Donc $\text{reste}(a^2,n) = \text{reste}(b^2,n) = \text{reste}(c^2,n) = \text{reste}(d^2,n) = 0$.
On a donc $a+b=c+d$ et $\text{reste}(a^2,n)+\text{reste}(b^2,n) = \text{reste}(c^2,n)+\text{reste}(d^2,n)$. Donc

$x_a + x_b = x_c + x_d$, ce qui signifie que T est ennuyant.

Supposons que n est pair, c'est-à-dire que $n = 2t$, t étant un entier positif ($t \geq 5$).
Posons $a = 1$, $b = t + 2$, $c = 2$ et $d = t + 1$.
Puisque $t \geq 5$, alors $1 \leq a < b < c < d < 2t$. Donc a, b, c et d sont des entiers positifs distincts dans l'intervalle approprié.
De plus, $a + b = t + 3 = c + d$.
Pour montrer que $x_a + x_b = x_c + x_d$, il faut montrer que :

$$\text{reste}(1^2, 2t) + \text{reste}((t + 2)^2, 2t) = \text{reste}(2^2, 2t) + \text{reste}((t + 1)^2, 2t)$$

Or $\text{reste}(1^2, 2t) = \text{reste}(1, 2t) = 1$ et $\text{reste}(2^2, 2t) = \text{reste}(4, 2t) = 4$, puisque $2t > 4$.
De plus, puisque $(t + 2)^2 = t^2 + 4t + 4$, alors la différence entre $(t + 2)^2$ et $t^2 + 4$ est un multiple de n ($n = 2t$), alors $\text{reste}((t + 2)^2, 2t) = \text{reste}(t^2 + 4, 2t)$.
De même, puisque $(t + 1)^2 = t^2 + 2t + 1$, alors $\text{reste}((t + 1)^2, 2t) = \text{reste}(t^2 + 1, 2t)$.
Il faut donc montrer que $\text{reste}(t^2 + 4, 2t) - \text{reste}(t^2 + 1, 2t) = 4 - 1 = 3$.
Puisque $t \geq 5$, alors $t^2 + t > t^2 + 4$.
Donc $t^2 < t^2 + 1 < t^2 + 2 < t^2 + 3 < t^2 + 4 < t^2 + t$. En d'autres mots, chacun des nombres $t^2 + 1$, $t^2 + 2$, $t^2 + 3$ et $t^2 + 4$ est situé entre deux multiples consécutifs de t. Donc, aucun de ces quatre entiers n'est un multiple de t. Donc, aucun d'entre eux n'est un multiple de n ($n = 2t$).
Donc, $t^2 + 4$ et $t^2 + 1$ sont situés entre les deux mêmes multiples de n. Donc, la différence entre leurs restes après une division par n est égale à la différence entre les entiers, c'est-à-dire 3.
Donc $x_a + x_b = x_c + x_d$, ce qui indique que T est ennuyant.

Enfin, on considère le cas où n est un nombre composé impair, c'est-à-dire que $n = MN$, M et N étant deux entiers impairs et $M > N > 1$.
Posons $a = \frac{1}{2}(M + N)$, $b = n - a$, $c = \frac{1}{2}(M - N)$ et $d = n - c$.
Puisque M et N sont impairs, $M + N$ et $M - N$ sont pairs. Donc a, b, c et d sont des entiers.
Puisque $M > N > 0$, alors $a > c > 0$.
Puisque $N \geq 3$, alors $n = MN \geq 3M > 2M$. Donc $M < \frac{1}{2}n$.
Puisque $M > N$, alors $a = \frac{1}{2}(M + N) < \frac{1}{2}(M + M) = M < \frac{1}{2}n$.
Donc $0 < c < a < \frac{1}{2}n$.
Puisque $b = n - a$ et $d = n - c$, alors $\frac{1}{2}n < b < d < n$, d'où $0 < c < a < \frac{1}{2}n < b < d < n$.
Donc a, b, c et d sont des entiers distincts dans l'intervalle approprié.
On remarque aussi que $a + b = n = c + d$.
Pour montrer que $x_a + x_b = x_c + x_d$, il reste à montrer que :

$$\text{reste}(a^2, n) + \text{reste}(b^2, n) = \text{reste}(c^2, n) + \text{reste}(d^2, n)$$

On montrera que $\text{reste}(a^2, n) = \text{reste}(b^2, n) = \text{reste}(c^2, n) = \text{reste}(d^2, n)$, ce qui mènera à la conclusion.
Puisque $b = n-a$, alors $b^2 = n^2-2na+a^2$. Puisque la différence entre b^2 et a^2 est un multiple de n, leurs restes après une division par n seront égaux. De même, $\text{reste}(c^2, n) = \text{reste}(d^2, n)$.
Il reste donc à démontrer que $\text{reste}(a^2, n) = \text{reste}(c^2, n)$.
Or :

$$a^2 - c^2 = (a+c)(a-c) = \left(\tfrac{1}{2}(M + N) + \tfrac{1}{2}(M - N)\right)\left(\tfrac{1}{2}(M + N) - \tfrac{1}{2}(M - N)\right) = MN = n$$

Puisque la différence entre a^2 et c^2 est un multiple de n, alors $\text{reste}(a^2, n) = \text{reste}(c^2, n)$.
Donc $x_a + x_b = x_c + x_d$ et T est donc ennuyant.

Pour résumer, T est excitant précisément lorsque n est un nombre premier supérieur à 10.