



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

# Concours Euclide

le jeudi 6 avril 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 7 avril 2017

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

---

Durée : 2 heures et demie

©2017 University of Waterloo

*Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.*

Nombre de questions : 10

Chaque question vaut 10 points.

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. À RÉPONSE COURTE indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. À DÉVELOPPEMENT indiquées comme ceci :



- Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

**ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.**

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple,  $\pi + 1$  et  $1 - \sqrt{2}$  sont des nombres exacts simplifiés.

---

*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

---

*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca), Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par  $y = x^3 - x$ , mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

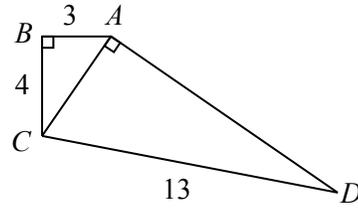
**Remarque au sujet de l'encodage par bulles**

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

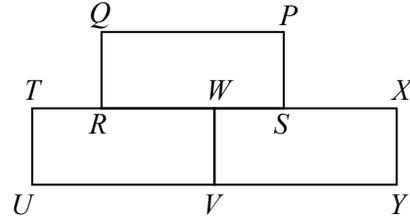
1.  (a) Il existe un couple  $(a, b)$  d'entiers strictement positifs pour lesquels  $5a + 3b = 19$ . Quelles sont les valeurs de  $a$  et  $b$  ?  
 (b) Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs  $n$  qui vérifient  $5 < 2^n < 2017$  ?  
 (c) Jules achète 600 euros au taux de 1 euro pour 1,50\$. Il convertit ensuite ces 600 euros en dollars au taux de 1,00\$ pour 0,75 euro. Combien de dollars a-t-il en moins si on compare le nombre de dollars qu'il avait avant ces deux transactions au nombre de dollars qu'il a après ces deux transactions ?
2.  (a) Quelles sont toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $\frac{5}{x(x-1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$  et  $x \neq 0$  et  $x \neq 1$  ?  
 (b) Dans un carré magique, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont la même somme. Dans le carré magique ci-contre, quelles sont les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  ?

0	20	$a$
$c$	4	
	-12	$b$
-  (c) (i) Pour quel entier strictement positif  $n$  est-ce que  $100^2 - n^2 = 9559$  ?  
(ii) Déterminer un couple  $(a, b)$  d'entiers tels que  $a > 1$  et  $b > 1$  et  $ab = 9559$ .

3.  (a) Dans la figure ci-contre, le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$  et le triangle  $ACD$  est rectangle en  $A$ . De plus  $AB = 3$ ,  $BC = 4$  et  $CD = 13$ . Quelle est l'aire du quadrilatère  $ABCD$  ?



-  (b) Trois rectangles identiques  $PQRS$ ,  $WTUV$  et  $XWVY$  sont placés comme dans la figure ci-contre de manière que  $RS$  soit situé sur  $TX$ . Chacun des trois rectangles a un périmètre de 21 cm. Quel est le périmètre de la figure au complet ?



-  (c) On considère un prisme droit à base rectangulaire. Une de ses faces a une aire de  $27 \text{ cm}^2$  et une autre de ses faces a une aire de  $32 \text{ cm}^2$ . Sachant que le prisme a un volume de  $144 \text{ cm}^3$ , déterminer l'aire totale du prisme en  $\text{cm}^2$ .

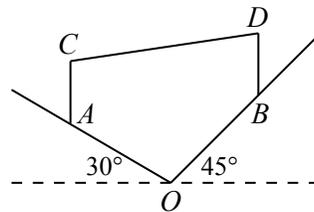
4.  (a) Les équations  $y = a(x - 2)(x + 4)$  et  $y = 2(x - h)^2 + k$  représentent la même parabole. Quelles sont les valeurs de  $a$ ,  $h$  et  $k$  ?

-  (b) Dans une suite arithmétique de 5 termes, la somme des carrés des 3 premiers termes est égale à la somme des carrés des 2 derniers termes. Sachant que le premier terme est 5, déterminer toutes les valeurs possibles du cinquième terme. (Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7, 9, 11 est une suite arithmétique de cinq termes.)

5.  (a) Dan est né entre l'an 1300 et l'an 1400. Samuel est né entre l'an 1400 et l'an 1500. Chacun est né le 6 avril d'une année qui est un carré parfait. Chacun a vécu 110 ans. En quelle année, pendant qu'ils étaient tous deux en vie, l'âge de chacun était-il un carré parfait le 7 avril ?

-  (b) Déterminer toutes les valeurs de  $k$  pour lesquelles les points  $A(1, 2)$ ,  $B(11, 2)$  et  $C(k, 6)$  forment un triangle rectangle.

6.  (a) La figure ci-contre représente deux côtes qui se joignent en  $O$ . Une côte fait un angle de  $30^\circ$  avec l'horizontale et l'autre fait un angle de  $45^\circ$  avec l'horizontale. Les points  $A$  et  $B$  sont situés sur les côtes de manière que  $OA = OB = 20 \text{ m}$ . Des poteaux verticaux  $BD$  et  $AC$  sont reliés par un câble droit  $CD$ . Sachant que  $AC = 6 \text{ m}$ , quelle est la longueur de  $BD$  pour laquelle  $CD$  est le plus court possible ?



-  (b) Si  $\cos \theta = \tan \theta$ , déterminer toutes les valeurs possibles de  $\sin \theta$ . Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés.

7.  (a) Linh se déplace en voiture à une vitesse de 60 km/h sur une route droite parallèle à une voie ferrée. À toutes les 10 minutes, elle est dépassée par un train qui roule dans le même sens qu'elle. Ces trains quittent une gare derrière elle à toutes les 3 minutes et voyagent tous à la même vitesse constante. Quelle est la vitesse constante des trains, en km/h ?

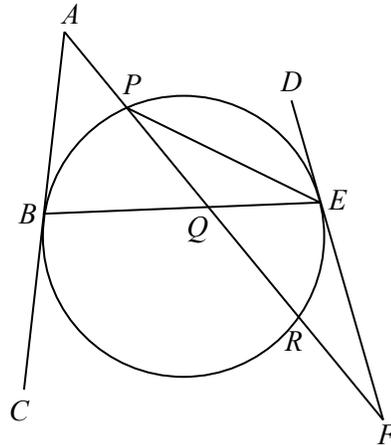


- (b) Déterminer tous les couples  $(a, b)$  de nombres réels qui vérifient le système d'équations :

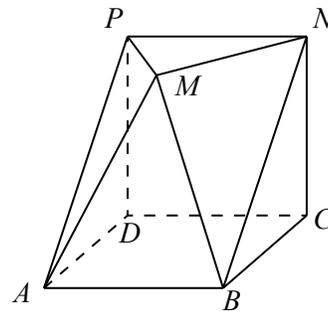
$$\begin{aligned}\sqrt{a} + \sqrt{b} &= 8 \\ \log_{10} a + \log_{10} b &= 2\end{aligned}$$

Exprimer les réponses sous forme de couples de nombres exacts simplifiés.

8.  (a) Dans la figure ci-contre, les segments de droites  $AC$  et  $DF$  sont tangents au cercle aux points respectifs  $B$  et  $E$ . De plus,  $AF$  coupe le cercle aux points  $P$  et  $R$  et il coupe  $BE$  en  $Q$ . Sachant que  $\angle CAF = 35^\circ$ ,  $\angle DFA = 30^\circ$  et  $\angle FPE = 25^\circ$ , déterminer la mesure de l'angle  $PEQ$ .



- (b) Dans la figure ci-contre,  $ABCD$  et  $PNCD$  sont des carrés avec des côtés de longueur 2 et  $PNCD$  est perpendiculaire à  $ABCD$ . Le point  $M$  est choisi du même côté de  $PNCD$  que  $AB$  de manière que le triangle  $PMN$  soit parallèle à  $ABCD$ , que  $\angle PMN = 90^\circ$  et que  $PM = MN$ . Déterminer le volume du solide convexe  $ABCDPMN$ .



9.  Une *permutation* d'une liste de nombres est un arrangement ordonné des nombres de cette liste. Par exemple, 3, 2, 4, 1, 6, 5 est une permutation de 1, 2, 3, 4, 5, 6. On peut écrire cette permutation sous la forme  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ , où  $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 1, a_5 = 6$  et  $a_6 = 5$ .

(a) Déterminer la valeur moyenne de l'expression

$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4|,$$

la valeur de l'expression étant calculée pour toutes les permutations  $a_1, a_2, a_3, a_4$  de 1, 2, 3, 4.

(b) Déterminer la valeur moyenne de l'expression

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7,$$

la valeur de l'expression étant calculée pour toutes les permutations  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$  de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

(c) Déterminer la valeur moyenne de l'expression

$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \cdots + |a_{197} - a_{198}| + |a_{199} - a_{200}|, \quad (*)$$

la valeur de l'expression étant calculée pour toutes les permutations  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{199}, a_{200}$  de 1, 2, 3, 4,  $\dots$ , 199, 200. (La somme  $(*)$  contient 100 termes de la forme  $|a_{2k-1} - a_{2k}|$ .)

10.  On considère un ensemble  $S$  qui contient  $m$  éléments ( $m \geq 4$ ), chaque élément étant un entier strictement positif et tous les éléments étant différents les uns des autres. On dit que  $S$  est *ennuyant* s'il contient quatre entiers distincts  $a, b, c, d$  tels que  $a + b = c + d$ . On dit que  $S$  est *excitant* s'il n'est pas ennuyant. Par exemple, l'ensemble  $\{2, 4, 6, 8, 10\}$  est ennuyant puisque  $4 + 8 = 2 + 10$ . L'ensemble  $\{1, 5, 10, 25, 50\}$  est excitant.

(a) Trouver un sous-ensemble excitant de  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  contenant exactement 5 éléments.

(b) Démontrer que si  $S$  est un ensemble excitant de  $m$  entiers strictement positifs ( $m \geq 4$ ), alors  $S$  contient un entier supérieur ou égal à  $\frac{m^2 - m}{4}$ .

(c) L'expression  $\text{reste}(a, b)$  représente le reste lorsque l'entier strictement positif  $a$  est divisé par l'entier strictement positif  $b$ . Par exemple,  $\text{reste}(10, 7) = 3$ ,  $\text{reste}(20, 5) = 0$  et  $\text{reste}(3, 4) = 3$ .

On considère un entier  $n$  tel que  $n \geq 10$ . Pour chaque entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on définit  $x_k = 2n \cdot \text{reste}(k^2, n) + k$ . Déterminer, preuve à l'appui, tous les entiers  $n$  tels que  $n \geq 10$  et pour lesquels l'ensemble  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  de  $n$  entiers est excitant.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

*Pour les élèves...*

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2017! Chaque année, plus de 235 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2017.

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

*Pour les enseignants...*

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2017/2018
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours