Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2017

(10e année – Secondaire IV)

le mardi 28 février 2017
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 1er mars 2017
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $6 \times 111 - 2 \times 111 = 666 - 222 = 444$.
OU : $6 \times 111 - 2 \times 111 = (6-2) \times 111 = (4)111 = 444$.

Réponse : (C)

2. On a : $\dfrac{5^2-9}{5-3} = \dfrac{25-9}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$.
OU : On sait que $5^2 - 9 = 5^2 - 3^2 = (5-3)(5+3)$. Donc $\dfrac{5^2-9}{5-3} = \dfrac{(5-3)(5+3)}{5-3} = 5+3 = 8$.

Réponse : (D)

3. La taille du bonhomme est égale à la somme des longueurs des diamètres des trois sphères.
Puisque les sphères ont des rayons de 10 cm, 20 cm et 30 cm, elles ont des diamètres respectifs de 20 cm, 40 cm et 60 cm.
La taille du bonhomme est de 20 cm + 40 cm + 60 cm, ou 120 cm.

Réponse : (D)

4. On écrit chaque fraction sous forme irréductible :

$$\frac{44444}{55555} = \frac{4(11111)}{5(11111)} = \frac{4}{5} \qquad \frac{5555}{6666} = \frac{5(1111)}{6(1111)} = \frac{5}{6} \qquad \frac{666}{777} = \frac{6(111)}{7(111)} = \frac{6}{7} \qquad \frac{77}{88} = \frac{7(11)}{8(11)} = \frac{7}{8} \qquad \frac{8}{9}$$

(La dernière fraction était déjà sous forme irréductible.)
On remarque que $\frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$ et $\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$ et $\frac{6}{7} = 1 - \frac{1}{7}$ et $\frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$ et $\frac{8}{9} = 1 - \frac{1}{9}$.
La fraction qui a la plus grande valeur est celle qui est égale à 1 moins la plus petite fraction.
Puisque $\frac{1}{9} < \frac{1}{8} < \frac{1}{7} < \frac{1}{6} < \frac{1}{5}$, la fraction qui a la plus grande valeur est $\frac{8}{9}$.

Réponse : (E)

5. Puisque le réservoir perd 300 litres en 25 heures, l'eau sort du réservoir au taux de $\dfrac{300 \text{ L}}{25 \text{ h}}$, ou 12 L/h.

Réponse : (A)

6. Lorsque Pénélope plie la feuille de papier en deux, le nombre de couches de papier est doublé.
En commençant par les 4 couches de papier obtenues après les deux premiers plis, elle obtient successivement 8 couches, 16 couches, 32 couches et ainsi de suite.
Parmi les choix de réponse, qui sont tous inférieurs à 32, seul 16 est un nombre possible de couches de papier.

Réponse : (D)

7. Par définition, on a : $2\Diamond 7 = 2^2(7) - 2(7^2) = 4(7) - 2(49) = 28 - 98 = -70$

Réponse : (B)

8. Dans le choix (A), les 1re et 3e cartes ont 0 nombre en commun. Donc ce n'est pas le bon choix.
Dans le choix (B), les 2e et 3e cartes ont 2 nombres en commun. Donc ce n'est pas le bon choix.
Dans le choix (C), les 1re et 3e cartes ont 2 nombres en commun. Donc ce n'est pas le bon choix.
Dans le choix (E), les 1re et 3e cartes ont 2 nombres en commun. Donc ce n'est pas le bon choix.
Dans le choix (D), les 1re et 2e cartes ont 1 nombre en commun (le 4), les 1re et 3e cartes ont 1 nombre en commun (le 7), et les 2e et 3e cartes ont 1 nombre en commun (le 2). Donc (D) est le bon choix.

Réponse : (D)

9. Puisque l'addition de 226 \$ inclut la taxe de 13 %, alors 226 \$ correspond à 113 % de l'addition avant la taxe.
Donc, l'addition avant la taxe est égale à $\frac{226\,\$}{1{,}13}$, ou 200 \$.
Le pourboire correspond à 15 % de l'addition avant la taxe, c'est-à-dire à 200 \$ × 0,15, ou 30 \$.
Réponse : (C)

10. Puisque PQR est un angle plat, alors $\angle PQT + \angle RQT = 180°$.
Donc $x° + (x - 50)° = 180°$, d'où $2x - 50 = 180$. Donc $2x = 230$, ou $x = 115$.
Puisque $\angle TUR = (x + 25)°$, alors $\angle TUR = 140°$.
Puisque TU et PS sont parallèles, les angles URS et TUR sont alternes-internes.
Donc $\angle URS = \angle TUR = 140°$.
Réponse : (B)

11. Puisque les 10 carrés identiques ont une aire totale de 160 cm^2, chaque carré a une aire de $\frac{160 \text{ cm}^2}{10}$, ou 16 cm^2.
Chaque carré a donc des côtés de longueur $\sqrt{16 \text{ cm}^2}$, ou 4 cm.
La figure a un contour formé de 22 longueurs de côtés (4 à gauche, 4 en dessous, 4 à droite, 2 au-dessus et 8 au milieu qui forment un U).
Le périmètre de la figure est donc égal à 4 cm × 22, ou 88 cm.
Réponse : (C)

12. Puisque p, q et r ont une moyenne de 9, alors $\frac{p+q+r}{3} = 9$, d'où $p + q + r = 27$.
Puisque s et t ont une moyenne de 14, alors $\frac{s+t}{2} = 14$, d'où $s + t = 28$.
Les cinq nombres ont donc une somme égale à $(p + q + r) + (s + t)$, ou $27 + 28$, ou 55.
Leur moyenne est donc égale à $\frac{55}{5}$, ou 11.
Réponse : (A)

13. On considère d'abord la colonne des unités.
On voit que $Z + Z + Z$ (ou $3Z$) a un chiffre des unités égal à 5.
En attribuant successivement à Z des valeurs de 0 à 9, on voit que Z doit être un 5.
Puisque $Z = 5$, on a $3Z = 15$, ce qui représente 5 unités et 1 dizaine. Cette dizaine s'ajoute à la colonne des dizaines.
Dans cette colonne, on voit que $1 + Y + Y + Y$ (ou $3Y + 1$) doit donner un 7 dans la colonne des dizaines.
En attribuant successivement à Y des valeurs de 0 à 9, on voit que Y doit être un 2.
Lorsque $Y = 2$, la somme de la colonne des dizaines est égale à 7 dizaines, sans retenue (la somme n'est pas 17 dizaines ou 27 dizaines).
Dans la colonne des centaines, on a $2X = 16$, d'où $X = 8$.
On peut vérifier que si $X = 8$, $Y = 2$ et $Z = 5$, l'addition devient $825 + 825 + 25$ et la somme est bien égale à 1675.
Donc $X + Y + Z = 8 + 2 + 5$, ou $X + Y + Z = 15$.
Réponse : (B)

14. Puisqu'Igor est plus petit que Jie, Igor ne peut être le plus grand.
Puisque Faye est plus grande que Goa, Goa ne peut être la plus grande.
Puisque Jie est plus grande que Faye, Faye ne peut être la plus grande.
Puisque Han est plus petit que Goa, Han ne peut être le plus grand.
Seule Jie n'a pas été éliminée. Elle est donc la plus grande.

Réponse : (E)

15. Puisqu'il y a 32 billes rouges dans le sac et que le rapport du nombre de billes rouges au nombre de billes bleues est de 4 : 7, il y a $\frac{7}{4}(32)$ billes bleues, ou 56 billes bleues dans le sac.
Puisqu'il y a 56 billes bleues dans le sac et que le rapport du nombre de billes bleues au nombre de billes violettes est de 2 : 3, il y a $\frac{3}{2}(56)$ billes violettes, ou 84 billes violettes dans le sac.
Puisque le sac ne contient que des billes rouges, bleues ou violettes, il y a $(32 + 56 + 84)$ billes, ou 172 billes dans le sac.

Réponse : (E)

16. Puisque $x + 2y = 30$, alors :

$$\begin{aligned}\frac{x}{5} + \frac{2y}{3} + \frac{2y}{5} + \frac{x}{3} &= \frac{x}{5} + \frac{2y}{5} + \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \\ &= \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}(2y) + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}(2y) \\ &= \frac{1}{5}(x + 2y) + \frac{1}{3}(x + 2y) \\ &= \frac{1}{5}(30) + \frac{1}{3}(30) \\ &= 6 + 10 \\ &= 16\end{aligned}$$

Réponse : (B)

17. On écrit d'abord 1230 en factorisation première :

$$1230 = 2 \times 615 = 2 \times 5 \times 123 = 2 \times 5 \times 3 \times 41$$

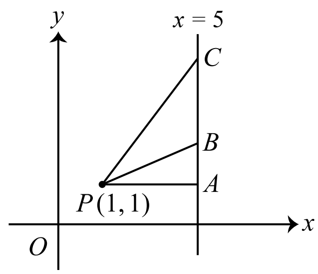
On cherche trois entiers strictement positifs, r, s, t, tels que $r \times s \times t = 1230$ et dont la somme est aussi petite que possible. On remarque que tous les choix de réponse pour la valeur minimale de $r + s + t$ sont inférieurs à 60.
Puisque 41 est un facteur premier de 1230, un des nombres r, s, t doit être un multiple de 41.
Or, les multiples de 41 sont 82, 123, ... et ils sont tous supérieurs à 60 à l'exception de 41.
Donc le multiple de 41 dans la liste r, s, t doit être 41.
On pose donc $t = 41$.
On cherche donc deux entiers strictement positifs, r et s, tels que $r \times s = 2 \times 3 \times 5 = 30$ et dont la somme $r + s$ est aussi petite que possible. (Puisque t est fixe, minimiser $r + s + t$ est équivalent à minimiser $r + s$.)
Les valeurs possibles de r et s sont 1 et 30, 2 et 15, 3 et 30, 5 et 6.
Les valeurs dont la somme est plus petite sont 5 et 6.
On pose donc $r = 5$ et $s = 6$. On obtient $r + s + t = 5 + 6 + 41$, ou $r + s + t = 52$.

Réponse : (B)

18. Puisque $\dfrac{1}{7}$ est positif et que $\dfrac{1}{7} \leq \dfrac{6}{n}$, alors $\dfrac{6}{n}$ est positif et n est donc positif.
Puisque $\dfrac{1}{7} = \dfrac{6}{42}$ et $\dfrac{1}{4} = \dfrac{6}{24}$, l'inéquation donnée est équivalente à l'inéquation $\dfrac{6}{42} \leq \dfrac{6}{n} \leq \dfrac{6}{24}$.
Puisque les fractions sont positives et que $n > 0$, alors $24 \leq n \leq 42$. (Si deux fractions ont le même numérateur, la plus grande des fractions a le plus petit dénominateur.)
Puisque n est un entier dont les valeurs varient de 24 à 42, le nombre de valeurs possibles de n est égal à $(42 - 23)$ (on omet les valeurs de 1 à 23), ou 19. (On peut aussi compter sur ses doigts pour conclure qu'il y a 19 entiers de 24 à 42.)

Réponse : (C)

19. On trace une figure qui contient le point $(1, 1)$, les droites de pentes respectives $\frac{1}{4}$ et $\frac{5}{4}$ qui passent par ce point, la droite verticale d'équation $x = 5$ et la droite horizontale d'équation $y = 1$ (qui passe par le point $(1, 1)$ et qui est perpendiculaire à la droite d'équation $x = 5$).
On nomme les points d'intersection (A, B, C) comme dans la figure suivante.



On veut déterminer l'aire du triangle PBC.
Puisque P et A ont pour coordonnées respectives $(1, 1)$ et $(5, 1)$, alors $PA = 4$.
Puisque PB a une pente de $\frac{1}{4}$ et que $PA = 4$ et en considérant une pente comme l'élévation divisée par la course, on obtient $AB = 1$.
Puisque PC a une pente de $\frac{5}{4}$ et que $PA = 4$, alors $AC = 5$.
Puisque $AC = 5$ et $AB = 1$, alors $BC = AC - AB$, d'où $BC = 5 - 1$, ou $BC = 4$.
On considère la base BC du triangle PBC. Sa hauteur correspondante est PA. (En effet, PA est perpendiculaire à la base et passe au sommet opposé P.)
L'aire du triangle PBC est donc égale à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8.
OU : On peut considérer que l'aire du triangle PBC est égale à l'aire du triangle PAC moins celle du triangle PAB.
Le triangle PAC a pour base $PA = 4$ et pour hauteur $AC = 5$. Il a donc une aire de $\frac{1}{2}(4)(5)$, ou 10. Le triangle PAB a pour base $PA = 4$ et pour hauteur $AB = 1$. Il a donc une aire de $\frac{1}{2}(4)(1)$, ou 2.
L'aire du triangle PBC est donc égale à $10 - 2$, ou 8.

Réponse : (C)

20. Puisqu'il y a 60 secondes dans 1 minute, alors t secondes correspondent à $\dfrac{t}{60}$ minutes.
Puisqu'il y a 60 minutes dans 1 heure, alors $\dfrac{t}{60}$ minutes correspondent à $\dfrac{t}{60 \times 60}$ heures, ou $\dfrac{t}{3600}$ heures.
On considère les distances que la voiture X et la voiture Y parcourent entre le moment où le devant de la voiture Y est aligné avec l'arrière de la voiture jusqu'au moment oà l'arrière de la voiture Y est aligné avec le devant de la voiture X.
Puisque la voiture X a une longueur de 5 m et que la voiture Y a une longueur de 6 m, alors

pendant cet intervalle de temps, la voiture Y parcourt $(5+6)$ m, ou 11 m de plus que la voiture X. (Le devant de la voiture Y doit, d'une certaine façon, parcourir toute la longueur de la voiture X et finir 6 m en avant du devant de la voiture X de manière que l'arrière de la voiture Y soit aligné avec le devant de la voiture X.)
Puisqu'il y a 1000 m dans 1 km, alors 11 m équivalent à 0,011 km.

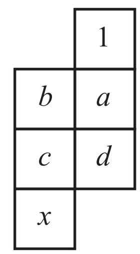
Puisque la voiture X se déplace à 90 km/h, alors en $\dfrac{t}{3600}$ heures, elle parcourt $\dfrac{90t}{3600}$ km.

Puisque la voiture Y se déplace à 91 km/h, alors en $\dfrac{t}{3600}$ heures, elle parcourt $\dfrac{91t}{3600}$ km.

Donc $\dfrac{91t}{3600} - \dfrac{90t}{3600} = 0{,}011$, ou $\dfrac{t}{3600} = 0{,}011$, d'où $t = 3600 \times 0{,}011$, ou $t = 39{,}6$.

Réponse : (A)

21. On nomme a, b, c et d les nombres placés dans les cases indiquées ci-contre.
Or a, b, c, d et x doivent égaler $2, 3, 4, 5$ et 6 dans un ordre quelconque, sans que deux entiers qui diffèrent de 1 ne soient dans deux cases qui partagent un même côté.
Par exemple, on voit que $a \neq 2$. Donc, a peut égaler 3, 4, 5 ou 6.



Si $a = 3$, alors ni b ni d ne peut égaler 2 ou 4.
Ainsi b et d égalent 5 et 6 dans un ordre quelconque.

Dans ce cas, c ne peut égaler 4 (puisque b ou d est égal à 5), donc $c = 2$, d'où $x = 4$.

Si $a = 4$, alors ni b ni d ne peut égaler 3 ou 5.
Ainsi b et d égalent 2 et 6 dans un ordre quelconque.
Dans ce cas, c ne peut égaler 3 ou 5, puisqu'il est en position adjacente à 2 et à 6. Ce cas est donc impossible.

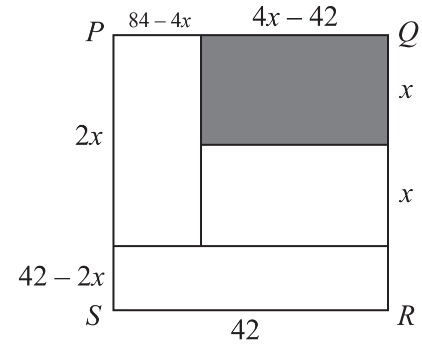
Si $a = 5$, alors ni b ni d ne peut égaler 4 ou 6.
Ainsi b et d égalent 2 et 3 dans un ordre quelconque.
Dans ce cas, c ne peut égaler 4 (puisque b ou d égale 3), donc $c = 6$, d'où $x = 4$.

Si $a = 6$, alors ni b ni d ne peut égaler 5.
Ainsi b et d égalent deux des nombres 2, 3 ou 4 dans un ordre quelconque.
Si b et d égalent 2 et 4, alors c ne peut égaler 3 ou 5 (les nombres restants) et il n'y a donc aucune solution.
Si b et d égalent 3 et 4, alors c ne peut égaler 2 ou 5 (les nombres restants), et il n'y a donc aucune solution.
Si b et d égalent 2 et 3, alors on peut avoir $c = 5$. On doit alors avoir $x = 4$, ce qui est impossible.

Après avoir considéré tous les cas possibles, on conclut que x n'admet qu'une seule valeur possible, $x = 4$.

Réponse : (A)

22. Soit $2x$ la hauteur du rectangle en haut à gauche.
Puisque le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 42, le rectangle du bas a une hauteur de $42-2x$.
Puisque le rectangle du bas a une largeur de 42 (la longueur d'un côté du carré), le rectangle du bas a un périmètre égal à $2(42) + 2(42-2x)$, ou $168 - 4x$.
Soit y la largeur du rectangle en haut à gauche.
Puisque tous les petits rectangles ont le même périmètre, alors $2(2x) + 2y = 168 - 4x$. (C'est-à-dire que le rectangle en haut à gauche a un périmètre égal à celui du bas.)
Donc $2y = 168 - 8x$, ou $y = 84 - 4x$.



Puisque le carré a des côtés de longueur 42, alors le rectangle en haut à droite a une largeur égale à $42 - (84 - 4x)$, ou $4x - 42$.
Puisque les deux rectangles à la droite ont le même périmètre et la même largeur, ils ont la même hauteur, soit la moitié de la hauteur du rectangle en haut à gauche.
Les deux rectangles à la droite ont donc chacun une hauteur de x.
Or, le rectangle en haut à droite a aussi un périmètre égal à $168 - 4x$.
Donc $2(4x - 42) + 2x = 168 - 4x$, ou $8x - 84 + 2x = 168 - 4x$, d'où $14x = 252$, ou $x = 18$.
Le rectangle ombré a donc une hauteur égale à $x = 18$ et une largeur égale à $4x - 42$, ou $4(18) - 42$, ou 30. Son aire est égale à 18×30, ou 540.
(On peut vérifier par substitution que les quatre rectangles ont pour dimensions 6×42, 36×12 et 30×18 et qu'ils ont tous le même périmètre.)

Réponse : (E)

23. Pour résoudre ce problème, on fait appel à deux propriétés des triangles ayant une aire strictement positive et dont les côtés ont pour longueurs a, b et c ($a \leq b \leq c$) :
- $a + b > c$. On l'appelle l'inégalité triangulaire et elle exprime l'idée que la ligne droite est le chemin le plus court entre deux points. Si on considère les extrémités du côté de longueur c du triangle, le chemin direct entre ces points est le segment de longueur c. C'est le chemin le plus court. Tout autre chemin d'un point à l'autre est nécessairement plus long, y compris le chemin qui suit les deux autres côtés du triangle, qui a pour longueur $a + b$. Donc $a + b > c$. (L'aire strictement positive du triangle empêche l'égalité $a + b = c$.)
- Si le triangle est obtusangle, alors $a^2 + b^2 < c^2$; si le triangle est acutangle, alors $a^2 + b^2 > c^2$. Cela découle de la réciproque du théorème de Pythagore : si $a^2 + b^2 = c^2$, le triangle est rectangle. On le justifiera plus loin.

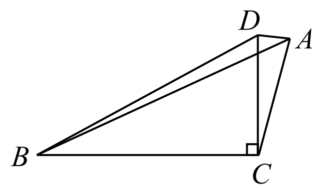
Supposons que la longueur x est la longueur du plus grand côté du triangle obtusangle, c'est-à-dire supposons que $10 \leq 17 \leq x$.
On doit donc avoir $10 + 17 > x$ et $10^2 + 17^2 < x^2$.
D'après la première condition, $x < 27$. Puisque x est un entier, $x \leq 26$.
D'après la deuxième condition, $x^2 > 389$. Donc $x > \sqrt{389}$. Puisque $\sqrt{389} \approx 19{,}72$ et que x est un entier, alors $x \geq 20$. Les valeurs possibles sont donc $x = 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26$.

Supposons que la longueur x n'est pas la longueur du plus grand côté du triangle obtusangle, c'est-à-dire supposons que $x \leq 17$. (On sait aussi que $10 \leq 17$. Il n'est pas important de savoir lequel de 10 et de x est le plus grand.)
On doit avoir $x + 10 > 17$ et $10^2 + x^2 < 17^2$.
D'après la première condition, $x > 7$. Puisque x est un entier, alors $x \geq 8$.
D'après la deuxième condition, $x^2 < 189$. Donc $x < \sqrt{189}$. Puisque $\sqrt{189} \approx 13{,}75$ et que x est un entier, alors $x \leq 13$. Les valeurs possibles sont donc $x = 8, 9, 10, 11, 12, 13$.

En tout, les valeurs possibles de x dont $8, 9, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 24, 25$ et 26.
Ces valeurs ont une somme de 224.

Il nous reste à justifier la deuxième propriété, c'est-à-dire que si le triangle est obtusangle, alors $a^2 + b^2 < c^2$. On peut montrer, de façon semblable, que si le triangle est acutangle, alors $a^2 + b^2 > c^2$. On fait appel aux angles et aux longueurs de côtés. On pourrait aussi utiliser la loi du cosinus :

On considère un triangle obtusangle ABC dont l'angle ACB est obtus, avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.
Au point C, On trace un segment CD de longueur b perpendiculaire à BC. On trace DB et DA.



Puisque le triangle BCD est rectangle en C, alors $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2}$, ou $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$, d'après le théorème de Pythagore.
Le triangle ACD est isocèle avec $CA = CD$.
Donc $\angle CDA = \angle CAD$.
Or, $\angle BDA > \angle CDA = \angle CAD > \angle BAD$.
Puisque $\angle BDA > \angle BAD$, alors dans le triangle BDA, on a $BA > BD$.
Donc $c = BA > BD = \sqrt{a^2 + b^2}$, d'où $c^2 > a^2 + b^2$, ce qu'il fallait démontrer.

Réponse : (E)

24. On représente une séquence admissible de coups par une chaine de lettres X, Y et Z. Par exemple, la chaine ZZYXZ indique que Z est déplacé d'une case vers la droite, ensuite Z de nouveau, puis Y, puis X, puis Z.
Pour chaque triplet (x, y, z) d'entiers où $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$ et $0 \le z \le 3$, on définit $S(x, y, z)$ comme étant le nombre de séquences admissibles dans lesquelles X se déplace de x espaces vers la droite et Y se déplace de y espaces vers la droite et Z se déplace de z espaces vers la droite.
Par exemple, $S(1, 0, 0) = 0$ et $S(0, 1, 0) = 0$, car X et Y ne sont pas des séquences admissibles et $S(0, 0, 1) = 1$, puisque Z est une séquence admissible qui consiste en 1 déplacement vers la droite.
On cherche $S(3, 3, 3)$.
On remarque que si $x > y$ ou $y > z$ ou $x > z$, alors $S(x, y, z) = 0$, puisque toute séquence admissible doit avoir au moins autant de Z que de Y et au moins autant de Y que de X (une pièce ne peut pas sauter par-dessus une autre pièce). En d'autres mots, on doit avoir $0 \le x \le y \le z \le 3$.
On fait remarquer la propriété importante suivante : Si $0 \le x \le y \le z \le 3$, alors

$$S(x, y, z) = S(x - 1, y, z) + S(x, y - 1, z) + S(x, y, z - 1),$$

où il est entendu que si $x = 0$, alors $S(x - 1, y, z) = 0$; si $y = 0$, alors $S(x, y - 1, z) = 0$; si $z = 0$, alors $S(x, y, z - 1) = 0$.
Explication de la propriété :

- Chaque séquence admissible comptée dans $S(x, y, z)$ se termine par X, Y ou Z.
- Si une séquence admissible comptée dans $S(x, y, z)$ se termine par X, alors la séquence formée en enlevant ce X était admissible et elle est comptée dans $S(x - 1, y, z)$.
- Si $x - 1 \le y \le z$ (c.-à-d. s'il y a des séquences admissibles contenant $x - 1$ lettres X, y lettres Y et z lettres Z, ce qui ferait que $S(x - 1, y, z) > 0$) et $x \le y \le z$, alors chaque séquence

admissible comptée dans $S(x-1,y,z)$ peut recevoir un X à la fin pour créer une séquence admissible comptée dans $S(x,y,z)$ qui se termine par un X.

- Ces deux derniers boulets indiquent que le nombre de séquences admissibles comptées dans $S(x,y,z)$ et qui se terminent par un X est précisément égal à $S(x-1,y,z)$.
- De même, le nombre de séquences admissibles comptées dans $S(x,y,z)$ et qui se terminent par un Y est égal à $S(x,y-1,z)$ et le nombre de séquences admissibles comptées dans $S(x,y,z)$ et qui se terminent par un Z est égal à $S(x,y,z-1)$.
- Donc $S(x,y,z) = S(x-1,y,z) + S(x,y-1,z) + S(x,y,z-1)$.

On utilise cette règle pour remplir des tableaux de valeurs de $S(x,y,z)$. On remplit un tableau de valeurs pour $z=1$, un autre pour $z=2$ et un troisième pour $z=3$. Dans chaque tableau, les valeurs de y sont indiquées sur la gauche et les valeurs de x sont indiquées en haut. Dans les tableaux, il y a des 0 aux endroits où $x > y$ ou $x > z$ ou $y > z$.

y \ x	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	1	1	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0

$z=1$

y \ x	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	2	3	0	0
2	2	5	5	0
3	0	0	0	0

$z=2$

y \ x	0	1	2	3
0	1	0	0	0
1	3	6	0	0
2	5	16	21	0
3	5	21	42	42

$z=3$

Les valeurs non nulles sont placées du haut vers le bas et de gauche à droite, tout en remarquant que chaque valeur est la somme des valeurs (s'il y a lieu) à la gauche dans le même tableau (ce qui correspond à $S(x-1,y,z)$), au dessus dans le même tableau (ce qui correspond à $S(x,y-1,z)$) et dans la même position dans le tableau précédent (ce qui correspond à $S(x,y,z-1)$).
De plus, $S(0,0,1) = 1$ (la séquence Z), $S(0,1,1) = 1$ (la séquence ZY) et $S(1,1,1) = 1$ (la séquence ZYX).
D'après ces tableaux, on a $S(3,3,3) = 42$. Il y a donc 42 séquences admissibles.

Réponse : (C)

25. On procède par étapes.

1

Pour tout entier n ($n \geq 3$) et tout entier strictement positif x ($x < n$), on définit $P(n,x)$ comme étant le plus petit commun multiple des $n-2$ entiers $1, 2, 3, \ldots, x-2, x-1, x+2, x+3, \ldots, n-1, n$.
Pour déterminer le plus petit commun multiple d'une liste d'entiers, on peut écrire chaque entier de la liste en factorisation première et créer le produit des plus grandes puissances (une par nombre premier) qui paraissent dans les factorisations premières.
Par exemple si $n=9$ et $x=6$, alors $P(9,6)$ est le plus petit commun multiple des entiers $1, 2, 3, 4, 5, 8, 9$.
On écrit chaque entier supérieur à 1 en factorisation première : $2 = 2^1$, $3 = 3^1$, $4 = 2^2$, $5 = 5^1$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$. Donc $P(9,6) = 2^3 3^2 5^1 = 360$. Dans ce cas, $P(9,6)$ n'est pas divisible par $x+1$ (7), mais il est divisible par x (6).
Étant donné une liste d'entiers, on sait qu'un multiple commun m de tous les entiers de cette liste est toujours un multiple de leur plus petit commun multiple l. En effet, si p est un nombre premier et a est un entier strictement positif tel que p^a est un diviseur de l, il doit y avoir un nombre de la liste qui est un multiple de p^a. Pour que m soit un multiple commun de tous les nombres de la liste, p^a doit aussi être un diviseur de m. Puisque c'est vrai pour toute puissance

p^a d'un nombre premier qui est diviseur de l, alors m est un multiple de l.

2^e^ étape : Lien entre m et $P(n,x)$

On montre que n est un nombre Nella associé à x précisément lorsque $P(n,x)$ n'est pas divisible par x ou par $x+1$.
Supposons que n est un nombre Nella associé à x et à m.
Alors m doit être divisible par chacun des nombres $1, 2, 3, \ldots, x-2, x-1, x+2, x+3, \ldots, n-1, n$.
D'après la 1^re^ étape, m est un multiple de $P(n,x)$.
Puisque m est un multiple de $P(n,x)$ et que m n'est pas divisible par x ou par $x+1$, alors $P(n,x)$ ne l'est pas non plus.
Puisque $P(n,x)$ est divisible par tous les autres entiers de 1 à n, alors $P(n,x)$ satisfait aux deux conditions pour m dans la définition d'un nombre Nella.
De plus, si n et x sont des entiers strictement positifs où $n \geq 3$ et $x < n$ et si $P(n,x)$ satisfait aux deux conditions dans la définition d'un nombre Nella, alors n est un nombre Nella.
On a donc démontré que n est un nombre Nella associé à x précisément lorsque $P(n,x)$ n'est pas divisible par x ou par $x+1$.

3^e^ étape : Nouvel énoncé du problème

D'après la 2^e^ étape, on cherche tous les entiers n ($50 \leq n \leq 2017$) pour lesquels il existe un entier strictement positif x ($x < n$) tel que $P(n,x)$ n'est pas divisible par x ou par $x+1$.

4^e^ étape : Si n est un nombre Nella associé à x, alors x et $x+1$ sont tous deux des puissances de nombres premiers

Supposons que n est un nombre Nella associé à x.
De plus, supposons que x n'est pas une puissance d'un nombre premier.
Donc $x = p^a b$, p étant un nombre premier, a étant un entier strictement positif et b étant un entier supérieur à 1 qui n'est pas divisible par p.
Donc, $p^a < x$ et $b < x$. Donc p^a et b sont tous deux dans la liste $1, 2, 3, \ldots, x-2, x-1$, ce qui veut dire que $P(n,x)$ est un multiple de p^a et de b ; il est donc un multiple de $p^a b = x$. (Il est important de noter que p^a et b n'admettent aucun diviseur premier commun.) On a donc une contradiction.
Donc si n est un nombre Nella, alors x est une puissance d'un nombre premier.
De même, $x+1$ doit aussi être une puissance d'un nombre premier. Pour s'en convaincre, on fait appel au même argument, avec la remarque additionnelle que puisque $x+1$ et x sont des entiers consécutifs, ils ne peuvent admettre un diviseur commun supérieur à 1. De cette manière, si $x+1 = p^c d$, alors x ne peut être égal à p^c ou à d et ainsi p^c et d sont dans la liste $1, 2, 3, \ldots, x-1$.

5^e^ étape : Analyse plus poussée de x et de $x+1$

Supposons que n est un nombre Nella associé à x.
D'après la 4^e^ étape, x et $x+1$ sont tous deux des puissances de nombres premiers.
Puisque x et $x+1$ sont consécutifs, l'un est pair et l'autre est impair.
En d'autres mots, x ou $x+1$ est une puissance de 2 et l'autre est une puissance d'un nombre premier impair.
On sait aussi que $P(n,x)$ n'est pas divisible par x ou par $x+1$.
Donc, la liste $x+2, x+3, \ldots, n-1, n$ ne peut contenir un multiple de x ou de $x+1$.
Donc $x < n < 2x$ et $x+1 \leq n < 2(x+1)$, puisque le multiple suivant de x est $2x$ et le multiple suivant de $x+1$ est $2(x+1)$.
Puisque x ou $x+1$ est une puissance de 2, alors 2 fois cette puissance de 2 (c.-à-d. $2x$ ou $2(x+1)$) est la puissance suivante de 2. Or, les inégalités nous disent que n est inférieur à la puissance suivante de 2 et donc x ou $x+1$ doit être la puissance suivante de 2 inférieure (ou inférieure ou égale, selon le cas) à n.

6[e] étape : Nouvel énoncé du problème (bis)

On cherche tous les entiers n ($50 \leq n \leq 2017$) pour lesquels il existe un entier strictement positif x ($x < n$) tel que $P(n,x)$ ne soit pas divisible par x ou par $x+1$.
D'après l'étape 5, on sait que x est la plus grande puissance de 2 inférieure à n ou $x+1$ est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n.
On cherche donc tous les entiers n ($50 \leq n \leq 2017$) pour lesquels au moins un des deux énoncés suivants est vrai pour un entier strictement positif x ($x < n$) :

- Si x est la plus grande puissance de 2 inférieure à n, alors $x+1$ est aussi une puissance d'un nombre premier.
- Si $x+1$ est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à n, alors x est aussi une puissance d'un nombre premier.

7[e] étape : On détermine les nombres Nella

On remplit deux tableaux, le premier pour le cas où x ($x < n$) est une puissance de 2 et le deuxième pour le cas où $x+1$ ($x+1 \leq n$) est une puissance de 2. Dans chaque cas, on détermine si $x+1$ ou x est aussi une puissance d'un nombre premier.

Intervalle de n	Plus grande puissance de 2 inférieure à n	x	$x+1$	Puissance d'un nombre premier ?	Nombre Nella ?
$50 \leq n \leq 64$	32	32	33	Non ($33 = 3 \cdot 11$)	Non
$65 \leq n \leq 128$	64	64	65	Non ($65 = 5 \cdot 13$)	Non
$129 \leq n \leq 256$	128	128	129	Non ($129 = 3 \cdot 43$)	Non
$257 \leq n \leq 512$	256	256	257	Oui	Voir ci-dessous
$513 \leq n \leq 1024$	512	512	513	Non ($513 = 3 \cdot 171$)	Non
$1025 \leq n \leq 2017$	1024	1024	1025	Non ($1025 = 5 \cdot 205$)	Non

On remarque que 257 est un nombre premier, puisqu'il n'est pas divisible par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{257}$ (environ 16,03), c'est-à-dire par $2, 3, 5, 7, 11$ ou 13.
Pour chaque valeur de n dans l'intervalle $257 \leq n \leq 511$, $P(n,256)$ n'est pas divisible par 256 ou par 257, alors chacune de ces valeurs de n (il y en a 255, c.-à-d. $511 - 256$) est un nombre Nella.
Lorsque $n = 512$, $P(n,256)$ est divisible par 256 (puisque 512 est divisible par 256), donc $n = 512$ n'est pas un nombre Nella puisqu'il s'agit du seul candidat pour la valeur de x dans ce cas.

Intervalle de n	Plus grande puissance de 2 inf. ou égale à n	$x+1$	x	Puissance d'un nombre premier ?	Nombre Nella ?
$50 \leq n \leq 63$	32	32	31	Oui	Voir ci-dessous
$64 \leq n \leq 127$	64	64	63	Non ($63 = 3 \cdot 21$)	Non
$128 \leq n \leq 255$	128	128	127	Oui	Voir ci-dessous
$256 \leq n \leq 511$	256	256	255	Non ($255 = 5 \cdot 51$)	Non
$512 \leq n \leq 1023$	512	512	511	Non ($511 = 7 \cdot 73$)	Non
$1024 \leq n \leq 2017$	1024	1024	1023	Non ($1023 = 3 \cdot 341$)	Non

On remarque que 31 et 127 sont des nombres premiers.
Pour chaque valeur de n dans l'intervalle $50 \leq n \leq 61$, $P(n,31)$ n'est pas divisible par 31 ou 32. Chacune de ces valeurs de n (il y en a 12, c.-à-d. $61 - 49$) est donc un nombre Nella.
Lorsque $n = 62, 63$, $P(n,31)$ est divisible par 31 (puisque 62 est divisible par 31), alors ni l'un ni l'autre n'est un nombre Nella puisqu'il s'agit du seul candidat pour la valeur de x dans ce cas.
Pour chaque valeur de n dans l'intervalle $128 \leq n \leq 253$, $P(n,127)$ n'est pas divisible par 127 ou par 128, alors chacune de ces valeurs de n (il y en a 126, c.-à-d. $253 - 127$) est un nombre Nella.

Lorsque $n = 254, 255$, $P(n, 127)$ est divisible par 127 (puisque 254 est divisible par 127), alors ni l'un ni l'autre n'est un nombre Nella puisqu'il s'agit du seul candidat pour la valeur de x dans ce cas.

8^e^ étape : Compte final

D'après ce qui précède, le nombre de nombres Nella n dans l'intervalle $50 \leq n \leq 2017$ est égal à $255 + 12 + 126$, ou 393.

Réponse : (A)