



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

# Concours Cayley

(10<sup>e</sup> année – Sec. IV)

le mardi 28 février 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 1<sup>er</sup> mars 2017

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

Durée : 60 minutes

©2016 University of Waterloo

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

## Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.  
Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.  
Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca), Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

### Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de l'expression  $6 \times 111 - 2 \times 111$  ?

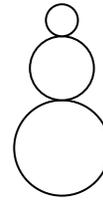
- (A) 222      (B) 333      (C) 444      (D) 555      (E) 666

2. Quelle est la valeur de l'expression  $\frac{5^2 - 9}{5 - 3}$  ?

- (A) 4      (B) 2      (C)  $\frac{1}{2}$       (D) 8      (E) -2

3. On construit un bonhomme de neige en empilant trois sphères l'une sur l'autre avec leurs centres alignés à la verticale. Les sphères ont des rayons respectifs de 10 cm, 20 cm et 30 cm. Quelle est la taille du bonhomme ?

- (A) 90 cm      (B) 100 cm      (C) 110 cm  
(D) 120 cm      (E) 130 cm

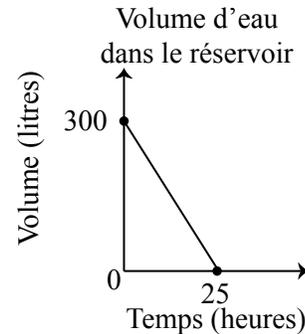


4. Laquelle des fractions suivantes a la plus grande valeur ?

- (A)  $\frac{44444}{55555}$       (B)  $\frac{55555}{66666}$       (C)  $\frac{666}{777}$       (D)  $\frac{77}{88}$       (E)  $\frac{8}{9}$

5. On vide un réservoir d'eau de 300 L à un taux constant. Le graphique ci-contre représente la relation entre le volume d'eau dans le réservoir et le temps écoulé pendant cette opération. À quel taux l'eau sort-elle du réservoir en litres par heure ?

- (A) 12      (B) 20      (C) 2,5  
(D) 5      (E) 15



6. Pénélope plie une feuille de papier en deux, créant ainsi deux couches de papier. Elle plie la feuille de papier en deux une deuxième fois, créant ainsi quatre couches de papier. Si elle continue à plier la feuille de papier en deux, lequel des nombres suivants est un nombre possible de couches de papier qu'elle pourrait obtenir ?

- (A) 10      (B) 12      (C) 14      (D) 16      (E) 18

7. On définit l'opération  $\diamond$  comme suit :  $a \diamond b = a^2b - ab^2$ . Quelle est la valeur de  $2 \diamond 7$  ?

- (A) -140      (B) -70      (C) 0      (D) 70      (E) 140

8. Trois cartes ont chacune trois nombres. Dans lequel des choix suivants les trois cartes ont-elles ceci de particulier : les première et deuxième cartes ont exactement un nombre en commun, les première et troisième cartes ont exactement un nombre en commun et les deuxième et troisième cartes ont exactement un nombre en commun ?

- (A) 

1	3	5
---	---	---

3	6	7
---	---	---

2	4	6
---	---	---

  
 (B) 

1	4	7
---	---	---

2	3	4
---	---	---

2	4	5
---	---	---

  
 (C) 

2	3	4
---	---	---

2	5	7
---	---	---

1	2	4
---	---	---

  
 (D) 

1	4	7
---	---	---

2	3	4
---	---	---

2	5	7
---	---	---

  
 (E) 

1	3	5
---	---	---

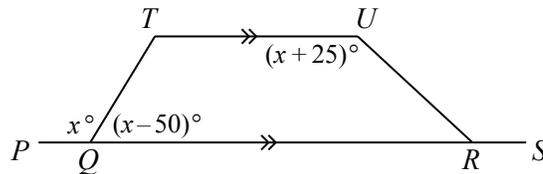
1	4	7
---	---	---

2	3	5
---	---	---

9. L'addition à un restaurant est de 226 \$, incluant la taxe de 13 % mais pas le pourboire. Le serveur recevra un pourboire qui correspond à 15 % de l'addition avant la taxe. Quelle somme le serveur recevra-t-il comme pourboire ?

- (A) 32,87 \$      (B) 29,49 \$      (C) 30,00 \$      (D) 28,00 \$      (E) 44,07 \$

10. Dans la figure ci-dessous,  $TU$  est parallèle à  $PS$  et les points  $Q$  et  $R$  sont situés sur  $PS$ . De plus,  $\angle PQT = x^\circ$ ,  $\angle RQT = (x - 50)^\circ$  et  $\angle TUR = (x + 25)^\circ$ .

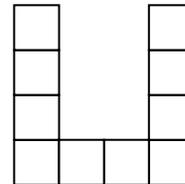


Quelle est la mesure de l'angle  $URS$  ?

- (A)  $115^\circ$       (B)  $140^\circ$       (C)  $135^\circ$       (D)  $130^\circ$       (E)  $120^\circ$

**Partie B (6 points par bonne réponse)**

11. La figure ci-contre est composée de 10 carrés identiques. Sachant que la figure a une aire de  $160 \text{ cm}^2$ , quel est le périmètre de la figure ?



- (A) 72 cm      (B) 80 cm      (C) 88 cm  
 (D) 64 cm      (E) 100 cm

12. Les trois entiers  $p$ ,  $q$  et  $r$  ont une moyenne de 9. Les deux entiers  $s$  et  $t$  ont une moyenne de 14. Quelle est la moyenne des cinq entiers  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$  et  $t$  ?

- (A) 11      (B) 11,5      (C) 12      (D) 10      (E) 13

13. Dans l'addition ci-contre  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  représentent chacun un chiffre. Quelle est la valeur de  $X + Y + Z$  ?

- (A) 10      (B) 15      (C) 22  
 (D) 20      (E) 8

$$\begin{array}{r}
 X \ Y \ Z \\
 X \ Y \ Z \\
 + \quad \quad Y \ Z \\
 \hline
 1 \ 6 \ 7 \ 5
 \end{array}$$

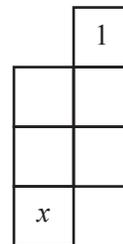
14. Igor est plus petit que Jie. Faye est plus grande que Goa. Jie est plus grande que Faye. Han est plus petit que Goa. Qui est le plus grand ou la plus grande ?

- (A) Faye      (B) Goa      (C) Han      (D) Igor      (E) Jie

15. Un sac contient des billes rouges, des billes bleues, des billes violettes et rien d'autre. Le rapport du nombre de billes rouges au nombre de billes bleues est de 4 : 7. Le rapport du nombre de billes bleues au nombre de billes violettes est de 2 : 3. Il y a 32 billes rouges dans le sac. Quel est le nombre total de billes dans le sac ?
- (A) 162      (B) 129      (C) 176      (D) 164      (E) 172
16. Sachant que  $x + 2y = 30$ , quelle est la valeur de  $\frac{x}{5} + \frac{2y}{3} + \frac{2y}{5} + \frac{x}{3}$  ?
- (A) 8      (B) 16      (C) 18      (D) 20      (E) 30
17. Les entiers strictement positifs  $r$ ,  $s$  et  $t$  sont tels que  $r \times s \times t = 1230$ . Quelle est la plus petite valeur possible de  $r + s + t$  ?
- (A) 51      (B) 52      (C) 54      (D) 58      (E) 53
18. Combien y a-t-il d'entiers  $n$  pour lesquels  $\frac{1}{7} \leq \frac{6}{n} \leq \frac{1}{4}$  ?
- (A) 17      (B) 18      (C) 19      (D) 20      (E) 24
19. Deux droites de pentes respectives  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{5}{4}$  se coupent au point  $(1, 1)$ . Quelle est l'aire du triangle formé par ces deux droites et la droite verticale d'équation  $x = 5$  ?
- (A) 5      (B) 10      (C) 8      (D) 12      (E) 15
20. Une voiture X et une voiture Y se déplacent dans la même direction, dans deux voies distinctes, sur une longue autoroute droite. La voiture X a une longueur de 5 m et elle se déplace à une vitesse constante de 90 km/h. La voiture Y a une longueur de 6 m et elle se déplace à une vitesse constante de 91 km/h. Au départ, la voiture Y est derrière la voiture X et elle finit par doubler la voiture X. À partir du moment où le devant de la voiture Y est aligné avec l'arrière de la voiture X jusqu'au moment où l'arrière de la voiture Y est aligné avec le devant de la voiture X,  $t$  secondes s'écoulent. Quelle est la valeur de  $t$  ?
- (A) 39,6      (B) 18,0      (C) 21,6      (D) 46,8      (E) 32,4

**Partie C (8 points par bonne réponse)**

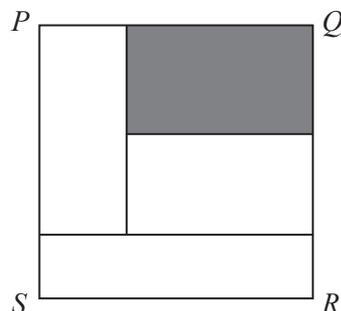
21. Les entiers de 1 à 6 doivent être placés dans les cases du quadrillage ci-contre. On ne peut pas placer deux entiers qui diffèrent de 1 dans deux cases qui partagent un même côté. Le nombre 1 est déjà placé. Combien d'entiers différents peuvent être placés dans la case indiquée par un  $x$  ?



- (A) 1      (B) 3      (C) 5  
(D) 0      (E) 2

22. Dans la figure ci-contre, le carré  $PQRS$  a des côtés de longueur 42. Il est divisé en quatre rectangles qui ne chevauchent pas. Sachant que ces quatre rectangles ont un même périmètre, quelle est l'aire du rectangle ombré ?

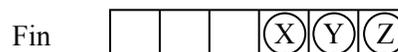
(A) 252            (B) 432            (C) 441  
 (D) 490            (E) 540



23. Le triangle ayant des côtés de longueurs 6, 8 et 10 est rectangle, le triangle ayant des côtés de longueurs 6, 8 et 9 est acutangle et le triangle ayant des côtés de longueurs 6, 8 et 11 est obtusangle. Un triangle obtusangle a une aire positive et des côtés de longueurs 10, 17 et  $x$ . Sachant que  $x$  est un entier, quelle est la somme de toutes les valeurs possibles de  $x$  ?

(A) 161            (B) 198            (C) 63            (D) 323            (E) 224

24. Dans la première des figures ci-contre, trois pièces de monnaie sont placées dans les trois premières des six cases. Un coup consiste à déplacer une pièce d'une case vers la droite, à condition que cette case soit vide. (On ne peut pas faire sauter une pièce par-dessus une autre pièce. Ainsi l'ordre des pièces ne peut changer.) Combien peut-on utiliser de séquences différentes de coups pour déplacer les pièces de monnaie des trois premières cases aux trois dernières cases ?



(A) 44            (B) 40            (C) 42  
 (D) 48            (E) 50

25. Un entier  $n$  ( $n \geq 3$ ) est appelé un *nombre Nella* s'il existe un entier strictement positif  $x$  ( $x < n$ ) et un entier strictement positif  $m$  tels que

- $m$  n'est pas divisible par  $x$  ou par  $x + 1$  et
- $m$  est divisible par tous les autres entiers de 1 à  $n$ .

Par exemple,  $n = 7$  est un nombre Nella. Combien existe-t-il de nombres Nella  $n$  dans l'intervalle  $50 \leq n \leq 2017$  ?

(A) 393            (B) 394            (C) 395            (D) 396            (E) 397



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

**Pour les élèves...**

Merci d'avoir participé au concours Cayley de 2017! Chaque année, plus de 235 000 élèves, provenant de 75 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Galois qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- plus d'information à propos du concours Galois
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

**Pour les enseignants...**

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11<sup>e</sup> et 12<sup>e</sup> année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours