Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mercredi 22 novembre 2017

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 23 novembre 2017

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable, telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera, (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

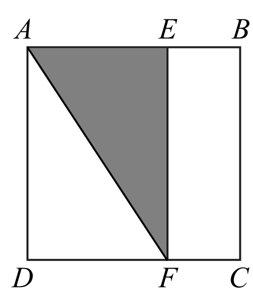
Renseignements utiles :
Ce qui suit peut s'avérer utile :

- Étant donné un entier strictement positif n, la somme des n entiers de 1 à n est égale à $\frac{1}{2}n(n+1)$ (c'est-à-dire que $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$).
- Étant donné un entier strictement positif n, la somme des n premiers carrés parfaits est égale à $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
(c'est-à-dire que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$).

PARTIE A

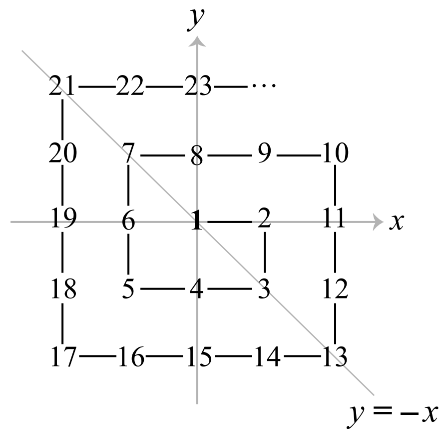
Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Quelle est la valeur de $\frac{6}{3} \times \frac{9}{6} \times \frac{12}{9} \times \frac{15}{12}$?
2. Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de 8 cm de côté. Le point E sur AB et le point F sur DC font en sorte que le triangle AEF soit rectangle en E. Sachant que l'aire du triangle AEF correspond à 30 % de l'aire de $ABCD$, quelle est la longueur de AE ?

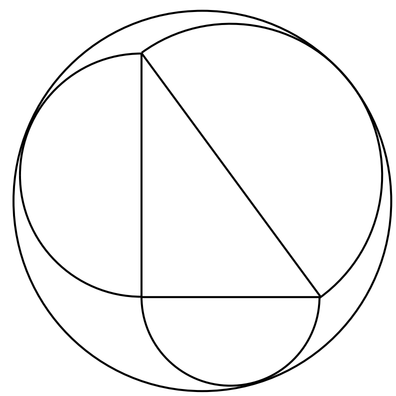


3. Déterminer tous les nombres réels x pour lesquels $x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x = 0$.
4. Combien peut-on former d'entiers positifs de cinq chiffres en plaçant les chiffres $1, 1, 2, 3, 4$ en ordres divers de manière que les deux 1 ne soient pas en positions adjacentes ?

5. La spirale rectangulaire ci-contre est construite comme suit. En commençant au point $(0,0)$, on construit des segments de longueurs $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \ldots$ en procédant dans le sens des aiguilles d'une montre. On place les entiers de 1 à 1000, en ordre croissant, aux endroits où la spirale passe par un point de treillis (point dont les coordonnées sont entières), soit 1 au point $(0,0)$, 2 au point $(1,0)$, 3 au point $(1,-1)$ et ainsi de suite. Quelle est la somme de tous les entiers de 1 à 1000 qui sont écrits sur des points situés sur la droite d'équation $y = -x$?



6. Dans la figure ci-contre, le triangle a des côtés de longueurs 6, 8 et 10. Trois demi-cercles sont tracés à l'extérieur du triangle avec les côtés du triangle pour diamètres. Un grand cercle est ensuite tracé de manière qu'il touche précisément chacun des trois demi-cercles. Quel est le rayon du grand cercle ?



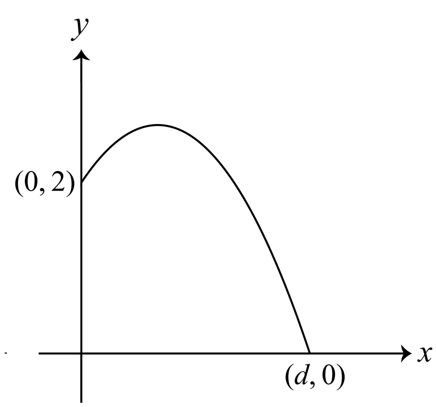
PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. (a) Déterminer tous les nombres réels x pour lesquels $x^2 + 2x - 8 = 0$.

   (b) Déterminer les valeurs de b et de c pour lesquelles la parabole d'équation $y = x^2 + bx + c$ passe aux points $(1,2)$ et $(2,0)$.

   (c) On lance un ballon d'une fenêtre située au point $(0,2)$. La trajectoire du ballon suit une parabole d'équation $y = a(x-1)^2 + \frac{8}{3}$, a étant un nombre réel quelconque. Déterminer la valeur du nombre réel positif d pour laquelle le ballon touche le sol au point $(d,0)$.



2. Jos joue avec des cartes. Chaque carte est rouge d'un côté et verte de l'autre. Au départ, Jos choisit deux entiers, k et n, où $1 \leq k < n$. Il dépose ensuite n cartes en ligne sur la table, côtés rouges vers le haut. À chaque tour, Jos retourne exactement k des n cartes. Jos gagne si, après un nombre entier de tours, il a pu retourner les cartes de manière qu'elles soient toutes disposées côtés verts vers le haut. Par exemple, avec $n = 4$ et $k = 3$, Jos peut gagner la partie en 4 tours comme il est indiqué ci-contre.

R	R	R	R	Départ
R	V	V	V	Après 1 tour
V	V	R	R	Après 2 tours
R	R	R	V	Après 3 tours
V	V	V	V	Après 4 tours

   (a) Lorsque $n = 6$ et $k = 4$, montrer que Jos peut gagner en 3 tours.

   (b) Lorsque $n = 9$ et $k = 5$, montrer que Jos peut gagner.

   (c) Supposons que $n = 2017$. Déterminer tous les entiers k ($1 \leq k < 2017$) pour lesquels Jos ne peut pas gagner. Justifier sa démarche.

3. (a) On considère une fonction f telle que $f(1) = 2$ et $f(f(n)) = f(n) + 3n$ pour tous entiers strictement positifs n. Lorsqu'on reporte $n = 1$ dans l'équation $f(f(n)) = f(n) + 3n$, celle-ci devient $f(f(1)) = f(1) + 3(1)$. Puisque $f(1) = 2$, alors $f(2) = 2 + 3$, c'est-à-dire que $f(2) = 5$. En continuant de la sorte, déterminer la valeur de $f(26)$.

   (b) Démontrer qu'il n'existe aucune fonction g telle que $g(1) = 2$ et $g(g(n) + m) = n + g(m)$ pour toutes les valeurs entières strictement positives de n et de m.

   (c) Démontrer qu'il existe exactement une fonction h qui satisfait aux propriétés suivantes :
   - h a pour domaine l'ensemble des entiers strictement positifs,
   - $h(n)$ est un entier strictement positif pour chaque valeur entière strictement positive de n et
   - $h(h(n) + m) = 1 + n + h(m)$ pour toutes valeurs entières strictement positives de n et de m.