Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

***cemc.uwaterloo.ca***

# *Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire*

***le mercredi 22 novembre 2017***

***(Amérique du Nord et Amérique du Sud)***

***le jeudi 23 novembre 2017***

***(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)***

UNIVERSITY OF WATERLOO

**Durée :** 2 heures 

**Les dispositifs de calcul sont permis, pourvu qu'ils ne soient pas munis de n'importe quelle des caractéristiques suivantes: (i) l'accès à l'Internet, (ii) la capacité de communiquer avec d'autres dispositifs, (iii) des données stockées au préalable, telles que des formules, des programmes, des notes, et cetera, (iv) un logiciel de calculs formels algébriques, (v) un logiciel de géométrie dynamique.**

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

**PARTIE A**

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

**PARTIE B**

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

**À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.**

*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*

# *Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire*

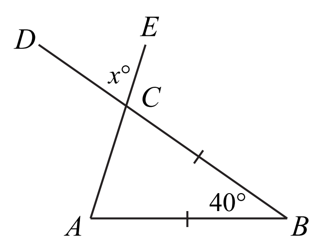
Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

## PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Dans la figure ci-contre, $BD$ et $AE$ se coupent en $C$ et $AB = BC$. Aussi, $\angle ABC = 40°$ et $\angle DCE = x°$. Quelle est la valeur de $x$ ?




2. Il est possible de former 12 entiers différents de quatre chiffres en plaçant les chiffres $1, 2, 7, 7$ en ordres divers. On forme une liste de ces 12 entiers en ordre, du plus petit au plus grand. Quelle est la somme des 6ᵉ et 7ᵉ entiers de cette liste ?

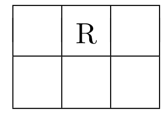
3. Dans le tableau $3 \times 3$ ci-contre, chacune des trois figures a une valeur numérique particulière. La somme des valeurs des figures de chaque rangée est donnée à la droite de la rangée et la somme des valeurs des figures de chaque colonne est donnée au-dessous de la colonne. Quelle est la valeur de $x$ ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| ♡ | △ | □ | $x$ |
| □ | △ | □ | 20 |
| ♡ | △ | △ | 15 |
| 22 | 12 | 20 | |

4. Yumi a un biscuit plat aux pépites de chocolat. Il est de forme circulaire avec un rayon de 3 cm. Sur le biscuit, il y a $k$ pépites de chocolat. Chacune est ronde avec un rayon de 0,3 cm. Les pépites ne chevauchent pas et ne dépassent pas le bord du biscuit. Pour quelle valeur de $k$ y a-t-il exactement $\frac{1}{4}$ de la surface supérieure du biscuit recouverte de pépites de chocolat ?

5. Les entiers strictement positifs $a$, $b$ et $c$ vérifient l'équation $\dfrac{31}{72} = \dfrac{a}{8} + \dfrac{b}{9} - c$. Quelle est la plus petite valeur possible de $b$ ?

6. Dans la figure ci-contre, six carrés forment une grille $2 \times 3$. On a inscrit la lettre R dans la case au milieu de la rangée du haut. Dans chacune des cinq autres cases, on doit inscrire la lettre R, la lettre S ou la lettre T. De combien de façons peut-on remplir la grille de manière qu'il y ait au moins une paire de cases, côte à côte dans la même rangée ou dans la même colonne, qui contiennent la même lettre ?




## PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Voici les trois premières figures d'une suite de figures présentant une régularité.

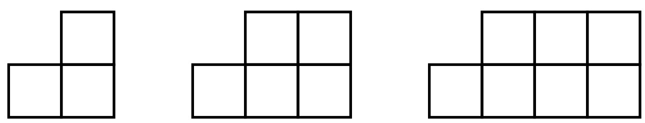


Figure 1 Figure 2 Figure 3

La figure 1 est formée de trois petits carrés identiques de 1 cm de côté, placés en deux rangées. La figure 1 a un périmètre de 8 cm. Étant donné une figure de la suite, on obtient la figure suivante en ajoutant à l'extrémité droite de chaque rangée un petit carré de 1 cm de côté.

(a) Combien faut-il de petits carrés pour former la figure 8 ?

(b) Déterminer le périmètre de la figure 12.

(c) Déterminer l'entier positif $C$ pour lequel la figure $C$ a un périmètre de 38 cm.

(d) Déterminer l'entier positif $D$ pour lequel le rapport du périmètre de la figure 29 au périmètre de la figure $D$ est égal à $\frac{4}{11}$.

2. L'expression $n!$ représente le produit des entiers positifs de 1 à $n$. En d'autres mots, $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$. (L'expression $n!$ se lit « factorielle $n$ ».) Par exemple, $4!$ a une valeur de 24, puisque $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

(a) Déterminer la valeur de $\dfrac{7!}{5!}$.

(b) Déterminer l'entier positif $n$ pour lequel $98! \times 9900 = n!$.

(c) Déterminer l'entier positif $m$ pour lequel $\dfrac{(m+2)!}{m!} = 40\,200$.

(d) On considère un entier strictement positif $q$ et le nombre $r$ pour lequel $(q+2)! - (q+1)! = (q!) \times r$. Démontrer que pour tout entier strictement positif $q$, le nombre $r$ est un entier qui est aussi un carré parfait.

3. On dit qu'un entier positif est *équilibré* si
   - il a six chiffres,
   - chacun de ses six chiffres est non nul et
   - le produit de ses trois premiers chiffres est égal au produit de ses trois derniers chiffres.

   Par exemple, 241 181 est équilibré, puisqu'il ne comporte aucun chiffre zéro et que $2 \times 4 \times 1 = 1 \times 8 \times 1$.

   (a) Déterminer tous les entiers équilibrés de la forme $3b8\,d5f$. Justifier sa démarche.

   (b) Déterminer un entier positif de trois chiffres de la forme $4bc$ pour lequel il existe exactement trois entiers équilibrés de la forme $4bc\,def$. Justifier sa démarche.

   (c) Pour chaque valeur $k = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, soit
   - déterminer un entier $abc$ pour lequel il y a exactement $k$ entiers équilibrés de la forme $abc\,def$, tout en justifient sa démarche, soit
   - justifier pourquoi il n'existe aucun entier $abc$ pour lequel il y a exactement $k$ entiers équilibrés de la forme $abc\,def$.