Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2016

le mercredi 13 avril 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 avril 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Puisque 5 paniers de raisins remplissent 2 bacs, alors 6×5 paniers remplissent 6×2 bacs, c'est-à-dire que 30 paniers remplissent 12 bacs.
Donc, 12 bacs remplissent 30 paniers.

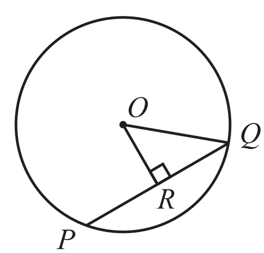
(b) Puisque 5 cuillerées remplissent 1 bocal, alors 6×5 cuillerées remplissent 6×1 bocaux, c'est-à-dire que 30 cuillerées remplissent 6 bocaux.
Puisque 3 cuillerées remplissent 1 tasse, alors 10×3 cuillerées remplissent 10×1 tasses, c'est-à-dire que 30 cuillerées remplissent 10 tasses.
Puisque 30 cuillerées remplissent 6 bocaux et que 30 cuillerées remplissent 10 tasses, alors 10 tasses remplissent 6 bocaux.

(c) *Solution 1*
D'après la partie (b), on sait que 10 tasses remplissent 6 bocaux.
Donc, 5×10 tasses remplissent 5×6 bocaux, c'est-à-dire que 50 tasses remplissent 30 bocaux.
Puisque 30 bocaux remplissent 1 bac, alors 50 tasses remplissent 1 bac. Donc 2×50 tasses remplissent 2×1 bacs, c'est-à-dire que 100 tasses remplissent 2 bacs.
Puisque 2 bacs remplissent 5 paniers, alors 100 tasses remplissent 5 paniers.
Donc $(100 \div 5)$ tasses de raisins remplissent $(5 \div 5)$ panier, c'est-à-dire que 20 tasses remplissent 1 panier.

Solution 2
Puisque 5 paniers remplissent 2 bacs, alors $\frac{2}{5}$ bac remplit 1 panier.
Puisque 30 bocaux remplissent 1 bac, alors $\frac{2}{5} \times 30$ bocaux remplissent $\frac{2}{5}$ bac ou 1 panier, c'est-à-dire que 12 bocaux remplissent 1 panier.
Puisque 5 cuillerées remplissent 1 bocal, alors 12×5 cuillerées remplissent 12 bocaux ou 1 panier, c'est-à-dire que 60 cuillerées remplissent 1 panier.
Puisque 3 cuillerées remplissent 1 tasse, alors 20×1 tasses remplissent 20×3 cuillerées ou 1 panier, c'est-à-dire que 20 tasses remplissent 1 panier.

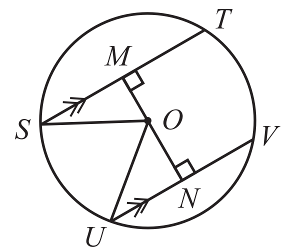
2. (a) Puisque M est le milieu de la corde AB, alors $AM = \frac{1}{2}(AB)$, d'où $AM = 5$, et OM est perpendiculaire à AB.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMA, on a $OM^2 = OA^2 - AM^2$. Donc $OM^2 = 13^2 - 5^2$, ou $OM^2 = 144$. Donc $OM = \sqrt{144}$, ou $OM = 12$ (puisque $OM > 0$).

(b) Soit O le centre du cercle et PQ la corde, comme dans la figure ci-contre.
Puisque le cercle a un rayon de 25, alors $OQ = 25$.
La distance du centre O à la corde correspond à la longueur de OR.
Donc $OR = 7$.
Le triangle ORQ est rectangle. D'après le théorème de Pythagore, on a $RQ^2 = OQ^2 - OR^2$. Donc $RQ^2 = 25^2 - 7^2$, ou $RQ^2 = 576$.
Donc $RQ = \sqrt{576}$ ou $RQ = 24$ (puisque $RQ > 0$).



Puisque OR est perpendiculaire à la corde PQ, R est le milieu de PQ. Donc $PQ = 2(RQ)$, d'où $PQ = 2(24)$, ou $PQ = 48$.
La corde a une longueur de 48.

(c) On trace les rayons OS et OU, comme dans la figure ci-contre.
Le cercle a un rayon de 65. Donc $OS = OU = 65$.
Puisque OM est perpendiculaire à la corde ST, M est le milieu de la corde. Donc $MS = \frac{1}{2}(ST)$, d'où $MS = \frac{1}{2}(112)$, ou $MS = 56$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMS, on a $OM^2 = OS^2 - MS^2$. Donc $OM^2 = 65^2 - 56^2$, ou $OM^2 = 1089$.
Donc $OM = \sqrt{1089}$, ou $OM = 33$ (puisque $OM > 0$).
Puisque $MN = OM + ON = 72$, alors $ON = 72 - OM$, d'où $ON = 72 - 33$, ou $ON = 39$.



D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ONU, on a $NU^2 = OU^2 - ON^2$. Donc $NU^2 = 65^2 - 39^2$, ou $NU^2 = 2704$. Donc $NU = \sqrt{2704}$, ou $NU = 52$ (puisque $NU > 0$). Puisque ON est perpendiculaire à la corde UV, N est le milieu de la corde. Donc $UV = 2(NU)$, d'où $UV = 2(52)$, ou $UV = 104$.
La corde UV a une longueur de 104.

3. (a) Puisque $405 = 3^4 \times 5$, alors 405 est divisible par 3^4, mais pas par 3^5.
Donc $f(405) = 4$.

(b) On factorise d'abord tous les multiples de 3 dans l'expression $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$. Les multiples de 3 dans l'expression sont 3, 6 et 9. L'expression devient

$$\begin{aligned} &1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \\ &\quad = \; 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 8 \times (3 \times 3) \times 10 \\ &\quad = \; 3^4 \times (1 \times 2 \times 4 \times 5 \times 2 \times 7 \times 8 \times 10). \end{aligned}$$

L'expression entre parenthèses ne comprend aucun facteur 3 ni aucun multiple de 3. La plus grande puissance de 3 dans l'expression complète est donc 3^4.
Donc $f(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10) = 4$.

(c) On compte d'abord combien il y a de facteurs 3 dans 100!.
De 1 à 100, il y a 33 multiples de 3 (de 1×3 à 33×3) et chacun de ces multiples (il s'agit de 3, 6, 9, 12, 15, 18, …, 93, 96, 99) compte au moins un diviseur 3. Donc, 100! compte au moins 33 diviseurs 3.
Or, parmi ces multiples, chaque multiple de 9 (il s'agit de 9, 18, 27, …, 81, 90 et 99) compte un deuxième diviseur 3, car $9 = 3^2$, $18 = 2 \times 3^2$, … Il y a donc 11 diviseurs 3 de plus pour un total de 44.
Or, parmi ces multiples, chaque multiple de 27 (il s'agit de 27, 54 et 81) compte un troisième diviseur 3, car $27 = 3^3$, $54 = 2 \times 3^3$, … Il y a donc 3 diviseurs 3 de plus pour un total de 47.
Parmi ces multiples, 81 compte un quatrième diviseur 3, car $81 = 3^4$. Il y a donc 1 diviseur 3 de plus pour un total de 48.
Donc, $100! = 3^{48} \times t$, t étant un entier strictement positif quelconque non divisible par 3.
De la même manière, on conclut que 50! comprend 16 multiples de 3, 5 multiples de 9 et 1 multiple de 27, ce qui indique un total de 22 diviseurs 3.
Donc, $50! = 3^{22} \times r$, r étant un entier strictement positif quelconque qui n'est pas divisible par 3.
De la même manière, on conclut que 20! comprend 6 multiples de 3 et 2 multiples de 9, ce qui indique un total de 8 diviseurs 3. Donc, $20! = 3^8 \times s$, s étant un entier strictement positif quelconque non divisible par 3.
Donc $N = \dfrac{100!}{50!20!} = \dfrac{3^{48} \times t}{(3^{22} \times r)(3^8 \times s)} = \dfrac{3^{48} \times t}{(3^{30} \times rs)} = \dfrac{3^{18} \times t}{rs}$.

Puisque N est un entier strictement positif, alors $\dfrac{3^{18}\times t}{rs}$ l'est aussi.

Puisque r et s ne sont pas des multiples de 3 et que $3^{18}\times t$ est divisible par rs, alors t doit être divisible par rs.

On peut donc écrire $N = \dfrac{3^{18}\times t}{rs}$ sous la forme $N = 3^{18}\times \dfrac{t}{rs}$, $\dfrac{t}{rs}$ étant un entier.

Puisque r, s et t ne sont pas des multiples de 3, alors $\dfrac{t}{rs}$ n'est pas divisible par 3.

La plus grande puissance de 3 qui est un diviseur de $\dfrac{100!}{50!20!}$ est donc 3^{18}. Donc $f(N) = 18$.

(d) Puisque $f(a) = 8$, l'exposant de la plus grande puissance de 3 qui divise a est 8.
Donc $a = 3^8 m$, m étant un entier strictement positif quelconque non divisible par 3.
Puisque $f(b) = 7$, l'exposant de la plus grande puissance de 3 qui divise b est 7.
Donc $b = 3^7 n$, n étant un entier strictement positif quelconque non divisible par 3.
On a donc :

$$a + b = 3^8 m + 3^7 n = 3^7(3m + n)$$

Puisque $3m$ est un multiple de 3 et que n ne l'est pas, alors $3m + n$ n'est pas un multiple de 3. Donc, la plus grande puissance de 3 qui divise $a + b$ est 3^7.
Donc $f(a + b) = 7$.

4. (a) (i) Pour chaque différence de 10 cents entre les deux prix, le restaurant dont le prix est plus élevé perd 10 clients à l'autre.
Lundi, la pizza chez LP coute 9,30 \$ − 7,70 \$ de plus, ou 1,60 \$ de plus que chez EP.
Donc, LP perd 16 clients ($1{,}60 \div 0{,}10 = 16$) et EP en gagne 16 de plus. LP a donc $(50 - 16)$ clients, ou 34 clients.

(ii) LP dépense 5,00 \$ pour faire une pizza. Le profit pour une pizza est de 9,30 \$ − 5,00 \$, ou 4,30 \$. Lundi, le profit total chez LP est de 34 × 3,40 \$, ou 146,20 \$.

(b) *Solution 1*
Soit L \$ le prix d'une pizza chez LP, L étant un multiple positif de 0,10.
Chez LP, le profit par pizza est donc égal à $(L - 5)$ \$.
On remarque que lorsque $L < 5$, le profit par pizza chez LP est négatif (c'est-à-dire que LP perd de l'argent avec chaque pizza vendue).

Chez EP, une pizza coute 7,20 \$. Ce restaurant reçoit donc $50 + \dfrac{7{,}20 - L}{0{,}10}$ clients.

On remarque que lorsque $L < 7{,}20$ (la pizza coute moins cher chez LP que chez EP), on a $\dfrac{7{,}20 - L}{0{,}10} > 0$ et LP aura plus de 50 clients. Dans ce cas, LP gagne $\dfrac{7{,}20 - L}{0{,}10}$ clients.

De même, lorsque $L > 7{,}20$ (la pizza coute plus cher chez LP que chez EP), on a $\dfrac{7{,}20 - L}{0{,}10} < 0$ et LP aura moins de 50 clients. Dans ce cas, LP perd $\dfrac{L - 7{,}20}{0{,}10}$ clients.

Le profit total chez LP est égal au produit du profit par pizza et du nombre de clients.

Chez LP, le profit total P, en dollars, est donc $P = \left(50 + \dfrac{7{,}20 - L}{0{,}10}\right)\times(L - 5)$.

On a donc $P = \left(\dfrac{5 + 7{,}2 - L}{0{,}10}\right)\times(L - 5)$, ou $P = -10(L - 12{,}2)(L - 5)$.

P est donc une fonction du second degré par rapport à L.

La représentation graphique de cette fonction est une parabole ouverte vers le bas. La fonction atteint donc sa valeur maximale au sommet de la parabole.

La parabole coupe l'axe des abscisses aux points pour lesquels $P = 0$, donc lorsque $L - 12{,}2 = 0$ ou $L - 5 = 0$, c'est-à-dire lorsque $L = 12{,}2$ ou $L = 5$. Elle coupe donc l'axe des abscisses aux points $(12{,}2; 0)$ et $(5, 0)$.
Le sommet de la parabole est situé sur l'axe de symétrie de la parabole qui passe au milieu des points $(12{,}2; 0)$ et $(5, 0)$, soit par le point $(\frac{12{,}2+5}{2}, 0)$, ou $(8{,}60; 0)$. La fonction atteint donc sa valeur maximale lorsque $L = 8{,}60$.

Mardi, chez LP, on devrait vendre une pizza 8,60 \$ pour maximiser son profit.

Solution 2
Mardi, une pizza coute 7,20 \$ chez EP.
Soit $(7{,}20 + 0{,}10d)$ \$ le cout d'une pizza chez LP, d étant un entier. (On rappelle que la différence entre les couts doit être un multiple de 0,10 \$.)
Lorsque $d > 0$, LP perd d clients qui vont chez EP.
Lorsque $d < 0$, LP gagne $-d$ clients que perd EP.
Donc mardi, LP aura $50 - d$ clients.
LP dépense 5,00 \$ pour faire une pizza.
Son profit par pizza est donc égal à $(7{,}20 + 0{,}10d)$ \$ $-$ 5,00 \$, ou $(2{,}20 + 0{,}10d)$ \$.
Le profit total chez LP est égal au produit du profit par pizza et du nombre de clients. Donc $P = (2{,}20 + 0{,}10d)(50 - d)$, ou $P = -0{,}10(d + 22)(d - 50)$.
P est donc une fonction du second degré par rapport à d.
La représentation graphique de cette fonction est une parabole ouverte vers le bas. La fonction atteint donc sa valeur maximale au sommet de la parabole.
La parabole coupe l'axe des abscisses aux points pour lesquels $P = 0$, donc lorsque $d + 22 = 0$ ou $d - 50 = 0$, c'est-à-dire lorsque $d = -22$ ou $d = 50$.
Elle coupe donc l'axe des abscisses aux points $(-22, 0)$ et $(50, 0)$.

Le sommet de la parabole est situé sur l'axe de symétrie de la parabole qui passe au milieu des points $(-22, 0)$ et $(50, 0)$, c'est-à-dire par le point $(\frac{(-22)+50}{2}, 0)$, ou $(14, 0)$. La fonction atteint donc sa valeur maximale lorsque $d = 14$.

Mardi, chez LP, on devrait vendre une pizza $(7{,}20 + 0{,}10(14))$ \$, ou 8,60 \$ pour maximiser son profit.

(c) *Solution 1*
Soit E \$ le prix d'une pizza chez EP, E étant un multiple positif de 0,20.
Après que EP a fixé son prix E \$, LP veut maximiser son profit en fixant le prix d'une pizza à L \$, L étant un multiple positif de 0,10.
Soit P_E le profit de EP en dollars et P_L celui de LP.
On déterminera d'abord le prix L \$, que LP pourrait fixer pour maximiser son profit P_L, sachant que EP a déjà fixé le sien, E \$.
Chez LP, le profit par pizza est de $(L - 5)$ \$. En utilisant la même méthode que dans la partie (b), le nombre correspondant de clients est de $50 + \dfrac{E - L}{0{,}10}$.
En dollars, le profit total chez LP est donc égal à $P_L = \left(50 + \dfrac{E - L}{0{,}10}\right) \times (L - 5)$.
On simplifie pour obtenir $P_L = \left(\dfrac{5 + E - L}{0{,}10}\right) \times (L - 5)$, ou $P_L = -10(L - E - 5)(L - 5)$.
On considère E comme une constante et L comme une variable, ce qui fait que P_L est une fonction du second degré par rapport à L.
La représentation graphique de cette fonction est une parabole ouverte vers le bas. La fonction atteint donc sa valeur maximale au sommet de la parabole.
La parabole coupe l'axe des abscisses aux points pour lesquels $P_L = 0$, donc lorsque

$L-E-5=0$ ou $L-5=0$, c'est-à-dire lorsque $L=E+5$ ou $L=5$.
Elle coupe donc l'axe des abscisses aux points $(E+5,0)$ et $(5,0)$. Le sommet de la parabole est situé sur l'axe de symétrie de la parabole qui passe au milieu des points $(E+5,0)$ et $(5,0)$, c'est-à-dire par le point $(\frac{E+5+5}{2},0)$, ou $(\frac{E+10}{2},0)$.
Chez LP, le profit est maximal lorsque $L=\frac{E+10}{2}$, ou $L=\frac{1}{2}E+5$.
(Puisque E est un multiple de 0,20, alors L est un multiple de 0,10.)
Donc si EP fixe d'abord le prix d'une pizza à E \$, LP devrait fixer le sien à $(\frac{1}{2}E+5)$ \$ pour maximiser ses profits.

Puisque EP constate le jeu de LP, on peut supposer que EP sait maintenant que LP va fixer le prix de sa pizza à $(\frac{1}{2}E+5)$ \$.
Donc, EP peut maintenant déterminer le prix E \$ qui maximisera son profit.
Chez EP, le profit par pizza est de $(E-5)$ \$ et il y a $50+\dfrac{L-E}{0{,}10}$ clients.
(Puisque L et E sont des multiples de 0,10, le nombre de clients est un entier.)
Chez EP, le profit total, en dollars, est donc égal à $P_E=\left(50+\dfrac{L-E}{0{,}10}\right)\times(E-5)$.
On simplifie pour obtenir $P_E=\left(\dfrac{5+L-E}{0{,}10}\right)\times(E-5)$, ou $P_E=-10(E-L-5)(E-5)$.
Puisque $L=5+\frac{1}{2}E$, l'équation devient $P_E=-10(E-(5+\frac{1}{2}E)-5)(E-5)$, ou $P_E=-10(\frac{1}{2}E-10)(E-5)$.
La représentation graphique de cette fonction est une parabole ouverte vers le bas. La fonction atteint donc sa valeur maximale au sommet de la parabole.
La parabole coupe l'axe des abscisses aux points pour lesquels $E=20$ ou $E=5$.
Chez EP, la valeur maximale est atteinte lorsque $E=\dfrac{20+5}{2}$, ou $E=12{,}50$.
Or, puisque E doit être un multiple de 0,20, cette réponse est rejetée.
Puisque P_E est une fonction du second degré par rapport à E et que la représentation graphique est une parabole ouverte vers le bas, les valeurs de E les plus près du sommet de la parabole donneront les plus grandes valeurs de P_E.
Pour maximiser les profits de EP, on choisit donc les valeurs de E qui sont des multiples de 20 cents les plus près de $E=12{,}50$.
Il y a deux telles valeurs, soit $E=12{,}40$ (qui donne $L=11{,}20$) et $E=12{,}60$ (qui donne $L=11{,}30$).
On remarque $E=12{,}40$ et $E=12{,}60$ sont symétriques par rapport à $E=12{,}50$, et que la parabole étant symétrique par rapport à l'axe de symétrie défini par $E=12{,}50$, elles donneront la même valeur de P_E, soit $P_E=281{,}20$. De plus, il n'y a aucune autre valeur de E qui satisfait aux conditions données pour laquelle P_E a une plus grande valeur, puisqu'il n'y a aucun multiple of 20 cents entre 12,40 \$ et 12,50 \$ ou entre 12,60 \$ et 12,50 \$.
Lorsque EP fixe le prix d'une pizza à E \$ = 12,40 \$, le profit total de LP, en dollars, est égal à $P_L=-10(L-E-5)(L-5)$, ou $P_L=-10(11{,}20-12{,}40-5)(11{,}20-5)$, ou $P_L=-10(-6{,}20)(6{,}20)$, ou $P_L=384{,}40$.
Lorsque EP fixe le prix d'une pizza à E \$ = 12,60 \$, le profit total de LP, en dollars, est égal à $P_L=-10(L-E-5)(L-5)$, ou $P_L=-10(11{,}30-12{,}60-5)(11{,}30-5)$, ou $P_L=-10(-6{,}30)(6{,}30)$, ou $P_L=396{,}90$.

Pour maximiser ses profits, EP peut fixer le prix d'une pizza à 12,40 \$ ou à 12,60 \$, ce qui aurait pour résultat un profit total respectif de 384,40 \$ et 396,90 \$ chez LP.

Solution 2

On suppose que mercredi, EP fixe le prix d'une pizza à $2e$ \$, e étant un multiple de 0,10.
Étant donné ce prix fixe (mais inconnu), LP fixe le prix de sa pizza de manière à maximiser son profit total.
Soit $(2e + 0{,}10n)$ \$ le prix fixé pour une pizza chez LP, n étant un entier. (On sait que la différence entre les deux prix doit être un multiple de 10 cents.)
Comme dans la partie (b), LP aura $50 - n$ clients.
Puisqu'il faut dépenser 5,00 \$ pour fabriquer une pizza, le profit par pizza chez LP est égal à $(2e + 0{,}10n)$ \$ − 5,00 \$, ou $(2e + 0{,}10n - 5)$ \$.
Chez LP, le profit total, en dollars, est égal à

$$P_L = (2e+0{,}10n-5)(50-n) = 0{,}10(20e+n-50)(50-n) = -0{,}10n^2+(10-2e)n+(100e-250)$$

On considère e comme une constante et n comme une variable. P_L est donc une fonction du second degré par rapport à n.
Puisque le coefficient de n^2 est négatif, la représentation graphique de la fonction est une parabole ouverte vers le bas. P_L atteint donc sa valeur maximale au sommet de la parabole.
Le sommet a pour abscisse $n = -\dfrac{10 - 2e}{2(-0{,}10)}$, ou $n = 50 - 10e$.
À cet endroit, le profit est égal à :

$$P_L = 0{,}10(20e + (50 - 10e) - 50)(50 - (50 - 10e)) = 0{,}10(10e)(10e) = 10e^2$$

Mercredi, EP constate le jeu de LP et il fixe le prix $2e$ \$ d'une pizza de manière à maximiser son profit total (sachant que LP choisira ensuite le prix de sa pizza de manière à maximiser son profit total).
Puisque le prix est fixé à $2e$ \$ par pizza chez EP, le profit par pizza est de $(2e - 5)$ \$.
Puisque LP a $50 - n$ clients et qu'il y a 100 clients en tout, EP a $100 - (50 - n)$ clients, c'est-à-dire $50+n$ clients, ou $50+(50-10e)$ clients, ou $100-10e$ clients. (On a $n = 50-10e$ au sommet de la parabole.)
Le profit total en dollars, chez EP, est égal à

$$P_E = (100 - 10e)(2e - 5) = -20e^2 + 250e - 500 = -20(e^2 - 12{,}5e + 25)$$

On complète le carré pour obtenir :

$$P_E = -20((e - 6{,}25)^2 - 6{,}25^2 + 25) = -20(e - 6{,}25)^2 + 281{,}25$$

Il s'agit de l'équation canonique d'une parabole ouverte vers le bas. P_E atteint donc sa valeur maximale lorsque $e = 6{,}25$. Or, il faut que e soit un multiple de 0,10.
Pour obtenir la valeur maximale de P_E qui tient compte de cette restriction, on choisit les valeurs de e qui sont les plus rapprochées de l'abscisse du sommet et qui sont des multiples de 0,10. Il s'agit de $e = 6{,}20$ et $e = 6{,}30$.
Puisque $e = 6{,}20$ et $e = 6{,}30$ sont symétriques par rapport à l'abscisse $e = 6{,}25$ du sommet, elles donneront la même valeur à P_E, soit $P_E = 281{,}20$. Puisque les valeurs de e sont aussi près de l'abscisse du sommet que possible, la valeur de P_E est maximale.
Lorsque $e = 6{,}20$, le prix chez EP est de 12,40 \$ et le profit total chez LP est de $10e^2$ \$, ou $10(6{,}20)^2$ \$, ou 384,40 \$.
Lorsque $e = 6{,}30$, le prix chez EP est de 12,60 \$ et le profit total chez LP est de $10e^2$ \$, ou $10(6{,}30)^2$ \$, ou 396,90 \$.
Pour maximiser ses profits, EP peut fixer le prix d'une pizza à 12,40 \$ ou à 12,60 \$, ce qui aurait pour résultat un profit total respectif de 384,40 \$ et 396,90 \$ chez LP.