Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2016

le mercredi 13 avril 2016

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 avril 2016

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) Le premier seau contient 7 disques rouges.
Chaque seau après le premier contient 3 disques rouges de plus que le seau précédent.
Le deuxième seau contient donc 10 disques rouges, le troisième seau contient 13 disques rouges et le quatrième seau contient 16 disques rouges.

(b) *Solution 1*
Soit s le numéro du seau après le seau initial. Les seaux sont donc numérotés 0, 1, 2, 3, ...
Puisque le seau 0 contient 17 disques verts et que chaque seau par la suite contient 1 disque vert de plus que le seau précédent, le seau s contient $17 + s$ disques verts.
Puisque le seau 0 contient 7 disques rouges et que chaque seau par la suite contient 3 disques rouges de plus que le seau précédent, le seau s contient $7 + 3s$ disques rouges.
Un seau contient un même nombre de disques verts et de disques rouges lorsque $17 + s = 7 + 3s$, c'est-à-dire lorsque $10 = 2s$, ou $s = 5$.
Il s'agit donc du 6$^{\text{e}}$ seau.

Solution 2
On utilise un tableau pour tenir compte du nombre de disques de chaque couleur. On sait que le seau initial contient 17 disques verts et 7 disques rouges et que chaque seau contient 1 disque vert de plus et 3 disques rouges de plus que le seau précédent.

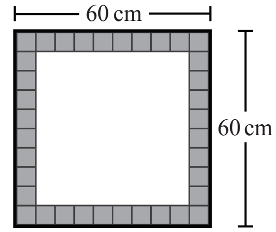
Seau	Nombre de disques verts	Nombre de disques rouges
1$^{\text{er}}$	17	7
2$^{\text{e}}$	18	10
3$^{\text{e}}$	19	13
4$^{\text{e}}$	20	16
5$^{\text{e}}$	21	19
6$^{\text{e}}$	22	22

Donc, le 6$^{\text{e}}$ seau contient un nombre égal de disques verts et de disques rouges.
(On remarque qu'il ne peut y avoir égalité plus d'une fois, car le nombre de disques rouges augmente plus vite que le nombre de disques verts.)

Solution 3
Le seau initial contient 17 disques verts et 7 disques rouges. Il y a donc 10 disques verts de plus que de disques rouges. Dans chaque seau suivant, il y a 1 disque vert de plus et 3 disques rouges de plus, c'est-à-dire que la différence diminue de 2 à chaque fois.
Puisqu'il y a une différence de 10 au départ et que $10 \div 2 = 5$, il faut avancer de 5 seaux, après le seau initial, pour qu'il y ait une différence de 0, c'est-à-dire un nombre égal de disques verts et de disques rouges.
Donc, le 6$^{\text{e}}$ seau contient un nombre égal de disques verts et de disques rouges.

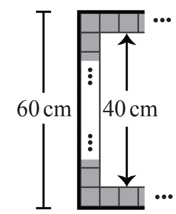
(c) Comme dans la partie (b), si les seaux sont numérotés 0, 1, 2, 3, ..., le seau s contient $17 + s$ disques verts et $7 + 3s$ disques rouges.
Si, dans le seau s, le nombre de disques rouges est le double du nombre de disques verts, alors $7 + 3s = 2(17 + s)$, ou $7 + 3s = 34 + 2s$, ou $s = 27$.
Il s'agit donc du seau 27, c'est-à-dire du 28$^{\text{e}}$ seau. Dans ce seau, il y a $(17 + 27)$ disques verts et $(7 + 3(27))$ disques rouges, c'est-à-dire 44 disques verts et 88 disques rouges. (On voit que 88 est bien le double de 44.)
En tout, il y a $(44 + 88)$ disques, ou 132 disques dans le seau.

2. (a) Une assiette qui est carrelée avec 36 carrés ombrés a 10 carrés ombrés sur chaque côté, comme dans la figure ci-contre.



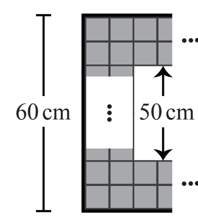
On voit que chaque côté a 10 carrés, mais que si on compte 4×10, chaque carré de coin est compté deux fois et qu'il faut donc soustraire 4.
Si on ne connait pas le nombre de carrés par côté, on peut le nommer c. On peut donc placer c carrés le long du côté supérieur, c carrés le long du côté inférieur, puis $c-2$ carrés le long du côté gauche et du côté droit. (Dans ces deux derniers cas, les carrés des coins sont déjà placés.)
Il y a donc $2c + 2(c-2)$ carrés en tout, ou $4c - 4$ carrés.
Pour avoir 36 carrés en tout, il faut que $4c - 4 = 36$, ou $4c = 40$, ou $c = 10$.
Chaque assiette a des côtés de 60 cm et il y a 10 carrés ombrés le long de chaque côté d'assiette. Donc, chaque carré a des côtés de longueur $60\,\text{cm} \div 10$, ou 6 cm.

(b) Puisque l'assiette est un carré et qu'il y a un nombre égal de carrés ombrés le long de chaque côté de sa bordure, alors la figure non ombrée à l'intérieur est un carré.



Puisque ce carré a une aire de $1600\,\text{cm}^2$, il a des côtés de 40 cm ($\sqrt{1600} = 40$) comme l'indique la figure ci-contre.
On considère le côté gauche de l'assiette.
Puisque l'assiette a des côtés de 60 cm et que le carré intérieur a des côtés de 40 cm, il y a une différence de 20 cm qui est répartie sur 2 longueurs des côtés des petits carrés ombrés. Donc, chaque carré ombré a des côtés de longueur $20\,\text{cm} \div 2$, ou 10 cm.

(c) On procède comme dans la partie (b) pour conclure que la figure non ombrée est un carré avec une aire de $2500\,\text{cm}^2$. Il a donc des côtés de longueur 50 cm ($\sqrt{2500} = 50$), comme l'indique la figure ci-contre.



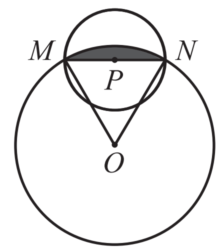
Puisque l'assiette a des côtés de 60 cm et le carré intérieur a des côtés de 50 cm, il y a une différence de 10 cm qui est répartie sur 4 longueurs des côtés des petits carrés ombrés (2 petits carrés ombrés en haut et 2 en bas).
Donc, chaque carré ombré a des côtés de longueur $10\,\text{cm} \div 4$, ou 2,5 cm.
Puisque l'assiette a des côtés de 60 cm et que les petits carrés ombrés ont des côtés de 2,5 cm, on peut placer $60 \div 2{,}5$ carrés ombrés, ou 24 carrés ombrés le long d'un côté de l'assiette.
Le long du côté supérieur de l'assiette, il y aura 2 rangées de 24 carrés ombrés. Il y aura aussi 2 rangées de 24 carrés ombrés le long du côté inférieur de l'assiette.
De chaque côté latéral de l'assiette, il y aura 2 colonnes de 20 carrés ombrés ($24 - 4 = 20$).
Le nombre total de carrés ombrés est donc égal à $4 \times 24 + 4 \times 20$, ou 176.

3. (a) Le triangle ABC est équilatéral et ses côtés ont une longueur de 6.
Puisque D est le milieu de BC, alors $BD = DC = 3$.
Le triangle ADC est rectangle en D. D'après le théorème de Pythagore, on a $AD^2 = AC^2 - DC^2$.
Donc $h^2 = 6^2 - 3^2$, ou $h^2 = 36 - 9$, ou $h^2 = 27$. Donc $h = \sqrt{27}$, ou $h = \sqrt{9 \times 3}$, ou $h = \sqrt{9} \times \sqrt{3}$, ou $h = 3\sqrt{3}$, car $h > 0$.

(b) La région ombrée est la région entre le cercle et l'hexagone. Son aire est donc égale à l'aire du disque moins celle de l'hexagone.
On déterminera d'abord l'aire de l'hexagone.

Chaque sommet de l'hexagone $EFGHIJ$ est situé sur le cercle.
Le cercle a pour centre O et un rayon de 6. Donc $OE = OF = OG = OH = OI = OJ = 6$.
L'hexagone étant régulier, ses côtés sont égaux et les six angles au centre sont égaux. Ils mesurent donc 60° chacun. On a donc six triangles équilatéraux isométriques. (Par exemple, le triangle OGH est un de ces six triangles équilatéraux.)
De plus, chaque triangle est isométrique au triangle ABC de la partie (a). Chacun a donc une hauteur $h = 3\sqrt{3}$.
Chaque triangle a donc une aire égale à $\frac{1}{2}(6)(3\sqrt{3})$, ou $9\sqrt{3}$.
L'hexagone $EFGHIJ$ a donc une aire égale à $6 \times 9\sqrt{3}$, ou $54\sqrt{3}$.
Le cercle a une aire égale à $\pi(6)^2$, ou 36π.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $36\pi - 54\sqrt{3}$.

(c) Soit A l'aire de la région ombrée dont on cherche la valeur en fonction de r. Soit S l'aire de la région ombrée dans la figure ci-contre.



On détermine A en soustrayant S de l'aire du demi-disque de centre P.
On détermine d'abord S.
On considère le cercle de centre O. La région d'aire S est à l'intérieur du secteur MON de ce cercle et à l'extérieur du triangle MON.
Donc, on obtient S en soustrayant l'aire du triangle MON de l'aire du secteur MON.
Dans le triangle MON, $MN = ON = OM = r$ (puisque ON et OM sont des rayons). Le triangle est donc équilatéral. On joint O et P.
Puisque $ON = OM$ et que P est le milieu de MN, alors OP est la bauteur du triangle MON par rapport à la base MN.
Le triangle OPN étant rectangle, alors selon le théorème de Pythagore, on a $OP^2 = ON^2 - PN^2$.
Puisque $PN = \frac{1}{2}(MN)$, ou $PN = \frac{1}{2}r$, alors $OP^2 = r^2 - (\frac{1}{2}r)^2 = r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{4}r^2$.
Donc $OP = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r$.
L'aire du triangle MON est donc égale à $\frac{1}{2}(MN)(OP)$, ou $\frac{1}{2}(r)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$, ou $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$.
On détermine ensuite l'aire du secteur MON.
Puisque le triangle MON est équilatéral, alors $\angle MON = 60°$.
L'aire du secteur MON est donc égale à $\frac{60°}{360°}$, ou $\frac{1}{6}$ de l'aire du disque de centre O et de rayon r. Elle est donc égale à $\frac{1}{6}\pi r^2$.
Donc $S = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$.
Le demi-disque de centre P et de rayon $PN = \frac{1}{2}r$ a une aire égale à $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2$, ou $\frac{1}{8}\pi r^2$.
Donc $A = \frac{1}{8}\pi r^2 - S$, ou $A = \frac{1}{8}\pi r^2 - \left(\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right)$, ou $A = \left(\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$.
On simplifie davantage pour obtenir $A = \frac{6\sqrt{3}-\pi}{24}r^2$.

4. (a) En factorisation première, on a $126 = 2^1 3^2 7^1$.
Étant donné $126 = 2^1 3^2 7^1$ comme entrée, le processus de Barbeau donne comme sortie

$$126\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{7}\right) = 126\left(\frac{21+28+6}{42}\right) = 3(55) = 165\,.$$

(b) Étant donné p^2q comme entrée, le processus de Barbeau donne comme sortie $p^2q\left(\frac{2}{p} + \frac{1}{q}\right)$, ou $2pq + p^2$.
On sait que cette sortie est égale à 135.

Puisque $135 = 3^3 5$, on a $2pq + p^2 = 3^3 5$, ou $p(2q + p) = 3^3 5$.
Puisque p est un nombre premier qui est un diviseur de $3^3 5$, alors $p = 3$ ou $p = 5$.
Si $p = 3$, on a $3(2q + 3) = 3^3 5$, ou $2q + 3 = 45$, d'où $q = 21$.
Puisque q doit être un nombre premier, ce résultat doit être rejeté et on conclut que $p \neq 3$.
Si $p = 5$, on a $5(2q + 5) = 3^3 5$, ou $2q + 5 = 27$, d'où $q = 11$.
Le seul couple (p, q) de nombres premiers distincts qui satisfait aux conditions est $(5, 11)$.

(c) *Solution 1*
Étant donné $2^a 3^b 5^c$ comme entrée, le processus de Barbeau donne comme sortie

$$2^a 3^b 5^c \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5}\right) = 2^a 3^b 5^c \left(\frac{15a + 10b + 6c}{30}\right).$$

On sait que cette sortie est égale à $4 \times 2^a 3^b 5^c$.
On a donc $\dfrac{15a + 10b + 6c}{30} = 4$, ou $15a + 10b + 6c = 120$.
Puisque a, b et c sont des entiers strictement positifs et que $15 \times 8 = 120$, $10 \times 12 = 120$, et $6 \times 20 = 120$, alors $1 \leq a \leq 7, 1 \leq b \leq 11$ et $1 \leq c \leq 19$.
De plus, puisque $10b, 6c$ et 120 sont divisibles par 2, et que $15a = 120 - 10b - 6c$, alors $15a$ est divisible par 2.
Donc, a est divisible par 2. Puisque $1 \leq a \leq 7$, alors a est égal à $2, 4$ ou 6.
De même, puisque $15a, 6c$ et 120 sont divisibles par 3, alors $10b$ est divisible par 3.
Donc, b est divisible par 3. Puisque $1 \leq b \leq 11$, alors b est égal à $3, 6$ ou 9.
De même, puisque $15a, 10b$ et 120 sont divisibles par 5, alors $6c$ est divisible par 5.
Donc, c est divisible par 5. Puisque $1 \leq c \leq 19$, alors c est égal à 5,10 ou 15.
Puisque $a \geq 2, b \geq 3$ et $c \geq 5$, alors $15a \geq 15 \times 2, 10b \geq 10 \times 3$, et $6c \geq 6 \times 5$.
Donc, chacun des termes $15a$, $10b$ et $6c$ est supérieur ou égal à 30 et ainsi, chaque terme est inférieur ou égal à $120 - 2(30)$, ou 60 (p.ex., $15a = 120 - 10b - 6c \leq 120 - 30 - 30 = 60$).
Puisque $15a \leq 60$, alors a est égal à 2 ou 4 ; puisque $10b \leq 60$, alors b est égal à 3 ou 6 ; puisque $6c \leq 60$, alors c est égal à 5 ou 10.
Si $a = 2$ et $b = 3$, alors $6c = 120 - 15(2) - 10(3)$, ou $6c = 60$, d'où $c = 10$.
Si $a = 2$ et $b = 6$, alors $6c = 120 - 15(2) - 10(6)$, ou $6c = 30$, d'où $c = 5$.
Si $a = 4$ et $b = 3$, alors $6c = 120 - 15(4) - 10(3)$, ou $6c = 30$, d'où $c = 5$.
Si $a = 4$ et $b = 6$, alors $6c = 120 - 15(4) - 10(6)$, ou $6c = 0$, ce qui est impossible.
Les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs qui satisfont aux conditions sont $(2, 3, 10)$, $(2, 6, 5)$, et $(4, 3, 5)$.

Solution 2
Étant donné $2^a 3^b 5^c$ comme entrée, le processus de Barbeau donne comme sortie

$$2^a 3^b 5^c \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5}\right) = 2^a 3^b 5^c \left(\frac{15a + 10b + 6c}{30}\right).$$

On sait que cette sortie est égale à $4 \times 2^a 3^b 5^c$.
On a donc $\dfrac{15a + 10b + 6c}{30} = 4$, ou $15a + 10b + 6c = 120$.
Puisque $10b$, $6c$ et 120 sont divisibles par 2 et que $15a = 120 - 10b - 6c$, alors $15a$ est divisible par 2. Donc, a est divisible par 2. On pose $a = 2A$, A étant un entier strictement positif quelconque.
Puisque $15a$, $6c$ et 120 sont divisibles par 3 et que $10b = 120 - 15a - 6c$, alors $10b$ est divisible par 3. Donc, b est divisible par 3. On pose $b = 3B$, B étant un entier strictement

positif quelconque.
Puisque $15a$, $10b$ et 120 sont divisibles par 5 et que $6c = 120 - 15a - 10b$, alors $6c$ est divisible par 5. Donc, c est divisible par 5. On pose $c = 5C$, C étant un entier strictement positif quelconque.
L'équation $15a + 10b + 6c = 120$ devient donc $30A + 30B + 30C = 120$, ou $A + B + C = 4$.
Puisque A, B et C sont des entiers strictement positifs avec une somme de 4, les valeurs possibles de (A, B, C) sont $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ et $(1, 1, 2)$ (chaque membre de l'addition étant égal à au moins 1, il reste un surplus de 1 qui peut aller à A, à B ou à C).
Puisque $(a, b, c) = (2A, 3B, 5C)$, les triplets (a, b, c) possibles sont $(4, 3, 5)$, $(2, 6, 5)$ et $(2, 3, 10)$.

(d) On procèdera par étapes.

1[re] étape : On démontre que chaque exposant dans la factorisation première doit être un multiple de son nombre premier

On montrera que puisque la sortie est un multiple de l'entrée, chaque exposant dans la factorisation première doit être un multiple de son nombre premier.
Il s'agit d'une généralisation de ce qui a été vu dans la solution 2 de la partie (c).
Supposons que $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_k^{a_k}$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ étant des nombres premiers distincts et $a_1, a_2, \ldots, a_k$ étant des entiers non négatifs.
Selon la définition du processus de Barbeau, la sortie est $n \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} + \cdots + \frac{a_k}{p_k} \right)$.
On permet à chaque $a_1, a_2, \ldots, a_k$ d'être nul, ce qui n'influence pas la valeur de la sortie.
Dans ce cas, la sortie est égale à $3n$.
On a donc $n \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} + \cdots + \frac{a_k}{p_k} \right) = 3n$, ou $\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} + \cdots + \frac{a_k}{p_k} = 3$.
Donc $\frac{a_1}{p_1} = 3 - \frac{a_2}{p_2} - \frac{a_3}{p_3} - \cdots - \frac{a_k}{p_k}$.
On multiplie chaque membre de l'équation par $p_2 p_3 \cdots p_k$ pour obtenir :

$$\frac{a_1 p_2 p_3 \cdots p_k}{p_1} = 3p_2 p_3 \cdots p_k - a_2 p_3 \cdots p_k - a_3 p_2 p_4 \cdots p_k - \cdots - a_k p_2 p_3 \cdots p_{k-1}$$

Puisque chaque terme du membre de droite est un entier, $\frac{a_1 p_2 p_3 \cdots p_k}{p_1}$ doit être un entier.
Puisque les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont distincts, a_1 doit être un multiple de p_1.
De la même manière, a_2 est un multiple de p_2, a_3 est un multiple de p_3 et ainsi de suite.

2[e] étape : On démontre que n n'admet aucun facteur premier supérieur à 7

Supposons que n admet un facteur premier supérieur à 7.
Il admet donc un facteur premier p_i supérieur ou égal à 11.
Le facteur $p_i^{a_i}$ dans la factorisation première de n est donc supérieur ou égal à 11^{11}, puisque $p_i \geq 11$ et a_i est un multiple de p_i qui est lui-même supérieur ou égal à 11.
Donc $n \geq 11^{11}$.
Or, selon l'énoncé, n est inférieur à 10^{10}. L'hypothèse est donc infirmée.
Donc, n n'admet aucun facteur premier supérieur à 7.

3[e] étape : On traite de l'algèbre

Selon les étapes 1 et 2, n doit être de la forme $n = 2^a 3^b 5^c 7^d$, a, b, c et d étant des entiers non négatifs qui sont des multiples respectifs de 2, 3, 5 et 7.
Comme dans la partie (c) de la solution 2, on pose $a = 2A$, $b = 3B$, $c = 5C$ et $d = 7D$, A, B, C et D étant des entiers non négatifs.
L'équation $\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} + \cdots + \frac{a_k}{p_k} = 3$ devient $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} + \frac{d}{7} = 3$, ou $A + B + C + D = 3$.

On cherche les solutions entières non négatives de $A+B+C+D=3$ pour lesquelles $n=2^{2A}3^{3B}5^{5C}7^{7D}<10^{10}$.

4ᵉ étape : On traite destrictions sur A, B, C et D

Puisque $A+B+C+D=3$ et que A, B, C et D sont non négatifs, alors chacun de A, B, C et D est inférieur ou égal à 3.
Si $D=2$ ou $D=3$, alors n est divisible par 7^{14} ou par 7^{21}. Puisque chacun est supérieur à 10^{10}, alors cette hypothèse est rejetée. Donc $D \leq 1$.
Si $C=3$, alors n est divisible par 5^{15}, qui est supérieur à 10^{10}. Cette hypothèse est donc rejetée. Donc $C \leq 2$.

5ᵉ étape : On détermine les valeurs de n

Puisque $A+B+C+D=3$ et que A, B, C et D sont non négatifs, alors A, B, C, D pourraient être (i) $3, 0, 0, 0$ dans un ordre quelconque ou (ii) $2, 1, 0, 0$ dans un ordre quelconque ou (iii) $1, 1, 1, 0$, dans un ordre quelconque.
(Si une valeur est 3, les autres doivent être 0. Si une valeur est 2, il doit y avoir une valeur de 1 et deux valeurs de 0. S'il n'y a aucune valeur de 2, il doit y avoir trois valeurs de 1 et une valeur de 0.)
En tenant compte de $C \leq 2$ et de $D \leq 1$, voici les possibilités :

Catégorie	A	B	C	D	n	Inférieur à 10^{10} ?
(i)	3	0	0	0	2^6	Oui
(i)	0	3	0	0	3^9	Oui
(ii)	2	1	0	0	$2^4 3^3$	Oui
(ii)	2	0	1	0	$2^4 5^5$	Oui
(ii)	2	0	0	1	$2^4 7^7$	Oui
(ii)	1	2	0	0	$2^2 3^6$	Oui
(ii)	0	2	1	0	$3^6 5^5$	Oui
(ii)	0	2	0	1	$3^6 7^7$	Oui
(ii)	1	0	2	0	$2^2 5^{10}$	Oui
(ii)	0	1	2	0	$3^3 5^{10}$	Oui
(ii)	0	0	2	1	$5^{10} 7^7$	Non
(iii)	1	1	1	0	$2^2 3^3 5^5$	Oui
(iii)	1	1	0	1	$2^2 3^3 7^7$	Oui
(iii)	1	0	1	1	$2^2 5^5 7^7$	Non
(iii)	0	1	1	1	$3^3 5^5 7^7$	Non

Dans chaque cas, on peut utiliser une calculatrice pour déterminer si la valeur de n est inférieure à 10^{10}. (Dans quels cas peut-on le déterminer par raisonnement ?)

Les valeurs possibles de n sont :

$$2^6, 3^9, 2^4 3^3, 2^4 5^5, 2^4 7^7, 2^2 3^6, 3^6 5^5, 3^6 7^7, 2^2 5^{10}, 3^3 5^{10}, 2^2 3^3 5^5, 2^2 3^3 7^7$$