



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois

(10^e année – Sec. IV)

le mercredi 13 avril 2016

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 avril 2016

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 75 minutes

©2016 University of Waterloo

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 4

Chaque question vaut 10 points.

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci : 
 - Chacune vaut 2 ou 3 points.
 - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
 - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci : 
 - Elles valent le reste des 10 points attribués à la question.
 - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
 - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
 - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14... ou 1,41..., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, et leur niveau scolaire, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

REMARQUES :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'on puisse utiliser une calculatrice pour des calculs numériques, on doit présenter et justifier les autres étapes d'une solution. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
7. On ne peut participer la même année à plus d'un des concours Fryer, Galois ou Hypatie.

1. Lisa a une rangée de seaux. Le premier seau contient 17 disques verts et 7 disques rouges. Chaque seau après le premier contient 1 disque vert de plus et 3 disques rouges de plus que le seau précédent.



(a) Quel seau contient 16 disques rouges ?

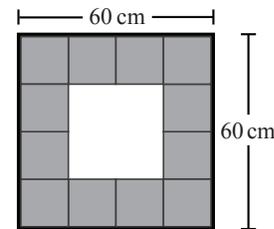


(b) Dans quel seau y a-t-il un nombre égal de disques verts et de disques rouges ?



(c) Il existe un seau dans lequel le nombre de disques rouges est le double du nombre de disques verts. Combien y a-t-il de disques en tout dans ce seau ?

2. Jade a des assiettes carrées avec des côtés de 60 cm. Une assiette est *carrelée* si on a tracé des carrés ombrés identiques le long de sa bordure, comme dans la figure ci-contre. La figure illustre une assiette qui est carrelée avec 12 carrés ombrés.



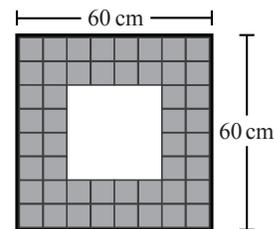
(a) La première assiette de Jade est carrelée avec 36 carrés ombrés. Quelle est la longueur de côté de chaque carré ombré ?



(b) Une autre assiette est carrelée de manière qu'il reste une surface non ombrée de 1600 cm^2 au milieu de l'assiette. Quelle est la longueur de côté de chaque carré ombré ?

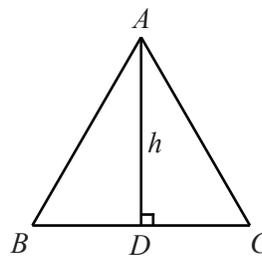


(c) Une assiette est *bicarrelée* si on a tracé deux rangées de carrés ombrés identiques le long de sa bordure, comme dans la figure ci-contre. La figure illustre une assiette qui est bicarrelée avec 48 carrés ombrés.

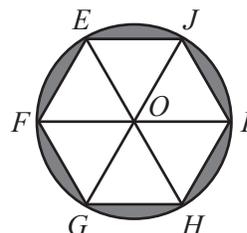


Une nouvelle assiette est bicarrelée, laissant une surface non ombrée de 2500 cm^2 au milieu. Déterminer le nombre de carrés ombrés.

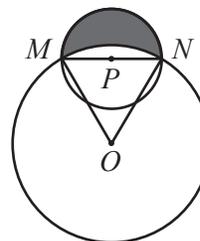
3.  (a) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est équilatéral avec des côtés de longueur 6. D est le milieu de BC . Déterminer la valeur *exacte* de la hauteur h du triangle ABC .



-  (b) Dans la figure ci-contre, le cercle de centre O a un rayon de longueur 6. L'hexagone régulier $EFGHIJ$ a des côtés de longueur 6 et ses sommets sont situés sur le cercle. Déterminer la valeur *exacte* de l'aire de la région ombrée.



-  (c) Un cercle a pour centre O et pour rayon r . Un deuxième cercle a pour centre P et pour diamètre MN . Les cercles se coupent en M et N . Sachant que $MN = r$, déterminer la valeur *exacte* de l'aire de la région ombrée en fonction de r .



4. La factorisation première de 45 est $3^2 5^1$. De façon générale, la factorisation première d'un entier n ($n \geq 2$) est l'écriture du nombre sous la forme $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_k^{a_k}$ (p_1, p_2, \dots, p_k étant des nombres premiers distincts et a_1, a_2, \dots, a_k étant des entiers strictement positifs). Étant donné un entier n ($n \geq 2$) comme entrée, le processus de Barbeau donne comme sortie l'entier égal à $n \left(\frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} + \dots + \frac{a_k}{p_k} \right)$.

Par exemple, étant donné 45 comme entrée, le processus de Barbeau calcule $45 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right)$, qui est égal à $30 + 9$, avec pour sortie 39, puisque la factorisation première de 45 est $3^2 5^1$.

-  (a) Étant donné pour entrée 126, quelle sortie obtient-on par le processus de Barbeau ?
-  (b) Déterminer tous les couples (p, q) de nombres premiers distincts de manière que l'entrée $p^2 q$ donne la sortie 135 par le processus de Barbeau.
-  (c) Déterminer tous les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs de manière que l'entrée $2^a 3^b 5^c$ donne la sortie $4 \times 2^a 3^b 5^c$ par le processus de Barbeau.
-  (d) Déterminer toutes les valeurs entières de n ($2 \leq n < 10^{10}$) de manière que l'entrée n donne la sortie $3n$ par le processus de Barbeau.



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Galois de 2016! Chaque année, plus de 220 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire ou au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2016.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2016/2017
- inscrire vos élèves aux Concours canadiens de mathématiques de niveau intermédiaire et supérieur qui auront lieu en novembre
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours