Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2016

le mercredi 13 avril 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 14 avril 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) On obtient le résultat total de l'école A en additionnant les résultats des quatre élèves qui représentent cette école, soit ceux de la première rangée.
On a $12 + 8 + 10 + 6 = 36$. Le résultat total de l'école A est égal à 36.

(b) Puisque l'école A a un résultat total de 36, l'école B a aussi un résultat total de 36.
Les élèves de l'école B ont pour résultats $17, 5, 7$ et x. Donc $17 + 5 + 7 + x = 36$, ou $29 + x = 36$, d'où $x = 7$.

(c) Le résultat z de l'élève 4 de l'école C est le double du résultat y de l'élève 3 de l'école C.
Donc $z = 2y$.
Les élèves de l'école C ont pour résultats $9, 15, y$ et z.
Puisque l'école C a aussi un résultat total de 36 et que $z = 2y$, alors $9 + 15 + y + 2y = 36$, ou $24 + 3y = 36$. Donc $3y = 12$, ou $y = 4$.
L'élève 3 de l'école C a donc un résultat de 4 et l'élève 4 de l'école C a le double, soit 8.

2. (a) À toutes les deux secondes, Esther fait 5 pas et chaque pas a une longueur de 0,4 m.
En 2 secondes, Esther parcourt donc une distance de $5 \times 0{,}4$ m, ou 2 m.

(b) *Solution 1*
À toutes les deux secondes, Paul fait 5 pas et chaque pas a une longueur de 1,2 m.
En 2 secondes, Paul parcourt donc une distance de $5 \times 1{,}2$ m, ou 6 m.
Il parcourt donc 3 m à chaque seconde. Il court donc à une vitesse de 3 m/s.

Solution 2
Paul fait 5 pas à toutes les 2 secondes. Il fait donc 2,5 pas par seconde.
Chacun de ses pas a une longueur de 1,2 m. À chaque seconde, Paul parcourt donc $2{,}5 \times 1{,}2$ m, ou 3 m.
Paul court donc à une vitesse de 3 m/s.

(c) *Solution 1*
Paul court à une vitesse de 3 m/s. En 120 secondes (2 minutes), il parcourt donc une distance de 120×3 m, ou 360 m.
Esther parcourt 2 m à toutes les 2 secondes. Elle court donc à une vitesse de 1 m/s.
En 120 secondes, elle parcourt donc une distance de 120×1 m, ou 120 m.
Si les deux commencent une course en même temps, alors après 2 minutes Paul aura une avance de 360 m − 120 m, ou 240 m sur Esther.

Solution 2
Chacun des pas de Paul a 0,8 m de plus que chaque pas d'Esther (1,2 m − 0,4 m = 0,8 m).
À toutes les 2 secondes, Paul et Esther font chacun 5 pas. En 2 minutes, ou 120 secondes (60×2 secondes), Paul et Esther font 300 pas ($60 \times 5 = 300$).
Si les deux commencent une course en même temps, alors après 2 minutes Paul aura une avance de $0{,}8 \times 300$ m, ou 240 m sur Esther.

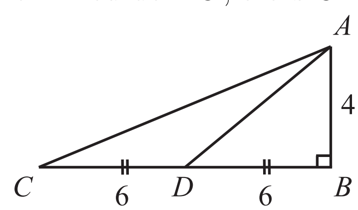
Solution 3
Paul court à une vitesse de 3 m/s et Esther court à une vitesse de 1 m/s, car elle parcourt 2 m en 2 secondes.
Dans 1 seconde, Paul parcourt 3 m et Esther parcourt 1 m.
À chaque seconde, Paul parcourt donc 2 m de plus qu'Esther.
Si les deux commencent une course en même temps, alors après 2 minutes (120 secondes) Paul aura une avance de 120×2 m, ou 240 m sur Esther.

(d) *Solution 1*
Esther parcourt 2 m à toutes les 2 secondes, ou 1 m par seconde.
En 3 minutes (180 secondes), Esther parcourt donc 180 m.
Paul court à une vitesse de 3 m/s, ce qui est 2 m/s de plus que la vitesse d'Esther.
À chaque seconde, Paul parcourt donc 2 m de plus qu'Esther.
Puisqu'Esther a une avance de 180 m lorsque Paul commence la course, Paul mettra 90 s ($180 \div 2 = 90$) pour combler la différence, c'est-à-dire pour rejoindre Esther.

Solution 2
Esther parcourt 2 m à toutes les 2 secondes, ou 1 m par seconde.
En 3 minutes (180 secondes), Esther parcourt donc 180 m.
Chaque pas de Paul a 0,8 m de plus ($1{,}2\,\text{m} - 0{,}4\,\text{m} = 0{,}8\,\text{m}$) que chaque pas d'Esther.
Puisque Paul et Esther font leurs pas au même rythme (5 pas à toutes les 2 secondes), alors Paul aura besoin de 225 pas ($180 \div 0{,}8 = 225$) pour rejoindre Esther.
Puisque Paul fait 5 pas à toutes les 2 secondes, il mettra 90 s ($\frac{225}{5} \times 2 = 45 \times 2 = 90$) pour rejoindre Esther.

3. (a) *Solution 1*
Dans le triangle ABC, AD est une médiane. Donc, D est le milieu de BC.
Puisque $BC = 12$ et que D est le milieu de BC, alors $CD = \frac{12}{2}$, ou $CD = 6$.
Dans le triangle ACD, la base CD a une longueur de 6 et la hauteur correspondante, AB, a une longueur de 4. (Puisque $\angle ABC = 90°$, AB est une hauteur du triangle ACD même si AB est à l'extérieur du triangle ACD.)
Le triangle ACD a donc une aire de $\frac{1}{2}(6)(4)$, ou 12.

Solution 2
Dans le triangle ABC, AD est une médiane. Donc, D est le milieu de BC.
Puisque $BC = 12$ et que D est le milieu de BC, alors $CD = DB = 6$.



Dans le triangle ABD, on a $AB = 4$, $DB = 6$ et $\angle ABD = 90°$. Le triangle ABD a donc une aire de $\frac{1}{2}(6)(4)$, ou 12.
De même, le triangle ABC a une aire de $\frac{1}{2}(12)(4)$, ou 24. L'aire du triangle ACD est égale à l'aire du triangle ABC moins celle du triangle ABD. Elle est égale à $24 - 12$, ou 12.

Solution 3
Dans le triangle ABC, on a $AB = 4$, $BC = 12$ et $\angle ABC = 90°$. Le triangle ABC a donc une aire de $\frac{1}{2}(12)(4)$, ou 24.
Une médiane du triangle ABC coupe le triangle en deux triangles de même aire. Pourquoi ?

> Dans le triangle ABC, AD est une médiane. D est donc le milieu de BC.
> Les triangles ACD et ABD ont donc des bases égales ($CD = BD$).
> Ces triangles partagent aussi la même hauteur AB.
> Les triangles ACD et ABD ont donc la même aire et cette aire est la moitié de l'aire du triangle ABC. La médiane AD coupe donc le triangle ABC en deux triangles de même aire.

Puisque le triangle ABC a une aire de 24, alors le triangle ACD a une aire de $\frac{24}{2}$, ou 12.

(b) *Solution 1*

Dans le triangle FSG, on a $FS = 18$, $SG = 24$ et $\angle FSG = 90^\circ$.

D'après le théorème de Pythagore, $FG = \sqrt{18^2 + 24^2} = \sqrt{324 + 576} = \sqrt{900} = 30$ (puisque $FG > 0$).

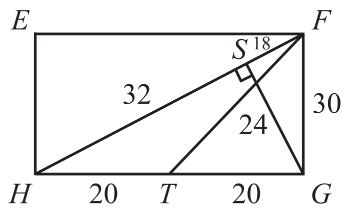
Puisque S est situé sur FH et que $FS = 18$ et $SH = 32$, alors $FH = FS + SH$, d'où $FH = 18 + 32$, ou $FH = 50$.

Dans le triangle FGH, on a $FH = 50$, $FG = 30$ et $\angle FGH = 90^\circ$.

D'après le théorème de Pythagore, $GH = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{2500 - 900} = \sqrt{1600} = 40$ (puisque $GH > 0$).

Dans le triangle FGH, FT est une médiane. T est donc le milieu de GH.

Dans le triangle FHT, la base HT a une longueur de $\frac{40}{2}$, ou 20, et la hauteur correspondante FG a une longueur de 30. (Puisque $\angle FGH = 90^\circ$, FG est une hauteur du triangle FHT même si FG est situé à l'extérieur du triangle.)



Le triangle FHT a donc une aire égale à $\frac{1}{2}(20)(30)$, ou 300.

Solution 2

Puisque S est situé sur FH et que $FS = 18$ et $SH = 32$, alors $FH = FS + SH$, d'où $FH = 18 + 32$, ou $FH = 50$.

Dans le triangle FGH, la base FH a une longueur de 50 et la hauteur correspondante SG a une longueur de 24 (Puisque SG est perpendiculaire à FH, SG est une hauteur du triangle FGH).

Le triangle FGH a donc une aire égale à $\frac{1}{2}(50)(24)$, ou 600.

La médiane d'un triangle coupe le triangle en deux triangles de même aire.

(La solution 3 de la partie (a) explique pourquoi au moyen d'un exemple.)

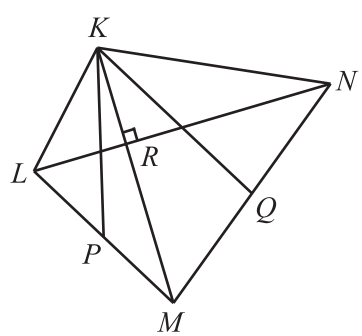
Puisque FT est une médiane du triangle FGH, alors l'aire du triangle FHT est égale à $\frac{600}{2}$, ou 300.

(c) On utilise la notation $|\triangle KLM|$ pour représenter l'aire du triangle KLM, $|KPMQ|$ pour représenter l'aire de $KPMQ$, et ainsi de suite.

Dans le triangle KLM, KP est une médiane. On a donc $2|\triangle KPM| = |\triangle KLM|$.

(La solution 3 de la partie (a) explique pourquoi une médiane coupe un triangle en deux triangles de même aire.)

Dans le triangle KMN, KQ est une médiane. On a donc $2|\triangle KMQ| = |\triangle KMN|$.



Donc

$$|KLMN| = |\triangle KLM| + |\triangle KMN| = 2|\triangle KPM| + 2|\triangle KMQ|$$

et

$$|KPMQ| = |\triangle KPM| + |\triangle KMQ|.$$

On a donc $|KLMN| = 2|KPMQ|$.
Puisque $|KPMQ| = 63$, alors $|KLMN| = 2|KPMQ|$, d'où $|KLMN| = 2(63) = 126$.
Or, $|KLMN| = |\triangle KRL| + |\triangle LRM| + |\triangle KRN| + |\triangle NRM|$.
Chacun de ces quatre triangles est rectangle.
Puisque $KR = x$ et $LR = 6$, alors $|\triangle KRL| = \frac{1}{2}x(6) = 3x$.
Puisque $LR = 6$ et $RM = 2x + 2$, alors $|\triangle LRM| = \frac{1}{2}(6)(2x + 2) = 6x + 6$.
Puisque $KR = x$ et $RN = 12$, alors $|\triangle KRN| = \frac{1}{2}x(12) = 6x$.
Puisque $RN = 12$ et $RM = 2x + 2$, alors $|\triangle NRM| = \frac{1}{2}(12)(2x + 2) = 12x + 12$.
Donc $126 = 3x + (6x + 6) + 6x + (12x + 12)$, ou $126 = 27x + 18$, d'où $27x = 108$, ou $x = 4$.

4. (a) Puisque les nombres d'une colonne n'ont aucune influence sur ceux d'une autre colonne, la plus petite somme possible des nombres dans une rangée d'une carte de BINGO est égale à la somme des plus petits nombres possibles de chaque colonne.

Colonne	Nombres possibles	Plus petit nombre possible
B	$1, 2, 3, \ldots, 13, 14, 15$	1
I	$16, 17, 18, \ldots, 28, 29, 30$	16
N	$0, 31, 32, 33, \ldots, 43, 44, 45$	0
G	$46, 47, 48, \ldots, 58, 59, 60$	46
O	$61, 62, 63, \ldots, 73, 74, 75$	61

La plus petite somme possible des nombres dans une rangée d'une carte de BINGO est égale à $1 + 16 + 0 + 46 + 61$, ou 124. (Cette somme peut seulement survenir dans la rangée du milieu, car le 0 peut seulement paraitre dans la case du milieu.)

(b) *Solution 1*
D'après la partie (a), la plus petite somme possible des nombres dans une rangée est 124.
Cette somme minimale se produit dans la 3$^{\text{e}}$ rangée et le nombre de la colonne N est 0.
(Si on n'utilise pas la 3$^{\text{e}}$ rangée, le plus petit nombre possible dans la colonne N est 31. La somme minimale possible des nombres dans une rangée autre que la 3$^{\text{e}}$ est donc de $1 + 16 + 31 + 46 + 61$, ou $124 + 31$, ou 155.)
La somme minimale possible des nombres d'une diagonale est aussi de 124, car on peut aussi utiliser le plus petit nombre de chaque colonne.
Dans chaque cas, pour la somme minimale d'une rangée et la somme minimale d'une diagonale, on utiliserait les mêmes nombres, soit $1, 16, 0, 46$ et 61.
Or, le nombre 1 ne peut paraitre dans la 3$^{\text{e}}$ rangée et dans une diagonale, puisqu'une carte de BINGO contient 25 nombres distincts.
Dans la colonne B, les deux plus petits nombres qui peuvent paraitre dans la 3$^{\text{e}}$ rangée et dans la diagonale sont 1 et 2.
De même, dans la colonne I, les deux plus petits nombres qui peuvent paraitre dans la 3$^{\text{e}}$ rangée et dans la diagonale sont 16 et 17.
Dans la colonne N, la 3$^{\text{e}}$ rangée et la diagonale partagent le plus petit nombre, soit 0.
De même, dans la colonne G, les deux plus petits nombres qui peuvent paraitre dans la 3$^{\text{e}}$ rangée et dans la diagonale sont 46 et 47.
De même, dans la colonne O, les deux plus petits nombres qui peuvent paraitre dans la 3$^{\text{e}}$ rangée et dans la diagonale sont 61 et 62.
Ainsi sur n'importe quelle carte de BINGO, les nombres qui paraissent dans une rangée et ceux qui paraissent dans une diagonale ne peuvent pas être plus petits que 1, 2, 16, 17, 0,

0, 46, 47, 61 et 62.
La somme de ces nombres est égale à $1 + 2 + 16 + 17 + 0 + 0 + 46 + 47 + 61 + 62$, ou 252.
Puisque la carte de BINGO de Carla a une rangée et une diagonale qui ont la même somme, cette somme doit être supérieure ou égale à la moitié de 252, soit 126.
Une telle carte de BINGO existe (voir la carte suivante) avec une rangée et une diagonale dont les nombres ont une somme de 126.

B	I	N	G	O
1				
	17			
2	16	0	47	61
			46	
				62

On voit que la rangée et la diagonale ont chacun des nombres avec une somme de 126 : $2 + 16 + 0 + 47 + 61 = 1 + 17 + 0 + 46 + 62 = 126$.
Les autres cases de la carte peuvent être remplies avec les autres nombres non utilisés.

Solution 2

D'après la partie (a), la plus petite somme possible des nombres dans une rangée est 124.
Cette somme minimale se produit dans la 3e rangée et le nombre de la colonne N est 0.
(Si on n'utilise pas la 3e rangée, le plus petit nombre possible dans la colonne N est 31. La somme minimale possible des nombres dans une rangée autre que la 3e est donc de $1 + 16 + 31 + 46 + 61$, ou $124 + 31$, ou 155.)
La somme minimale possible des nombres d'une diagonale est aussi de 124, car on peut aussi utiliser le plus petit nombre de chaque colonne.
Dans chaque cas, pour la somme minimale d'une rangée et la somme minimale d'une diagonale, on utiliserait les mêmes nombres, soit $1, 16, 0, 46$ et 61.
Or, le nombre 1 ne peut paraitre dans la 3e rangée et dans la diagonale, puisque 1 ne peut paraitre deux fois dans la colonne B.
De même, le nombre 16 ne peut paraitre dans la 3e rangée et dans la diagonale, puisque 16 ne peut paraitre deux fois dans la colonne I. De même, 46 et 61 ne peuvent paraitre dans la 3e rangée et dans la diagonale. Il est donc impossible pour une carte de BINGO d'avoir une 3e colonne et une diagonale avec la même somme de 124.
Il est possible pour une carte de BINGO d'avoir une 3e colonne et une diagonale avec une même somme de 126 comme dans l'exemple suivant :

B	I	N	G	O
1				
	16			
2	17	0	46	61
			47	
				62

On peut vérifier que les sommes sont $2+17+0+46+61 = 126$ et $1+16+0+47+62 = 126$.
Les autres cases de la carte peuvent être remplies avec les autres nombres non utilisés.

Existe-t-il une carte de BINGO ayant une rangée et une diagonale avec chacune une somme de 125 ?
On considère la plus petite somme possible pour une diagonale, soit $1 + 16 + 0 + 46 + 61$, ou 124.
Puisque 1, 16, 0, 46 et 61 sont les plus petits nombres possibles dans chaque colonne, il

faudrait augmenter de 1 un seul des entiers 1, 16, 46 ou 61 pour obtenir une somme de 125. On obtiendrait ainsi les quatre sommes possibles suivantes :

$$2 + 16 + 0 + 46 + 61 = 125 \qquad 1 + 17 + 0 + 46 + 61 = 125$$

$$1 + 16 + 0 + 47 + 61 = 125 \qquad 1 + 16 + 0 + 46 + 62 = 125$$

Pour la même raison, si on voulait une 3ᵉ rangée avec une somme de 125, il faudrait aussi choisir une de ces quatre sommes.
En choisissant n'importe quelles deux de ces quatre séries de nombres, on choisirait toujours deux séries avec deux nombres communs, soit 0 et un autre nombre commun. (Par exemple, $2 + 16 + 0 + 46 + 61$ et $1 + 16 + 0 + 47 + 61$ ont en commun les nombres 16, 0 et 61 et le nombre 16 ne peut paraitre à deux endroits différents dans la colonne I, soit dans la diagonale (2ᵉ ou 4ᵉ rangée) et dans la 3ᵉ rangée.) Une somme commune de 125 est donc impossible.

Donc si les nombres d'une rangée et d'une diagonale ont une même somme, la plus petite somme possible est 126.

(c) *Solution 1*
La plus grande somme possible pour les nombres d'une 3ᵉ rangée ou d'une diagonale est $15 + 30 + 0 + 60 + 75$, ou 180.
On veut que les nombres de la 3ᵉ rangée aient une somme de 177, de même que ceux de la diagonale.
On déterminera le nombre de façons de le faire en commençant par une somme maximale de 180 et en diminuant les nombres jusqu'à ce qu'on obtienne une somme de 177.
Soit $15 - W, 30 - X, 60 - Y$ et $75 - Z$ les nombres de la 3ᵉ rangée et $15 - w, 30 - x, 60 - y$ et $75 - z$ les nombres de la diagonale, W, X, Y, Z, w, x, y et z étant des entiers quelconques.
On a donc la situation suivante :

B	I	N	G	O
$15 - w$	23	35	47	65
5	$30 - x$	31	52	63
$15 - W$	$30 - X$	0	$60 - Y$	$75 - Z$
11	20	40	$60 - y$	69
9	18	38	48	$75 - z$

Puisque les nombres de la colonne B peuvent avoir une valeur de 1 à 15, alors $w \geq 0$ et $W \geq 0$. De même, chacun des nombres x, X, y, Y, z et Z est supérieur ou égal à 0.
Puisque les nombres de la 3ᵉ rangée ont une somme de 177, alors

$$(15 - W) + (30 - X) + 0 + (60 - Y) + (75 - Z) = 177.$$

Donc $180 - (W + X + Y + Z) = 177$, ou $W + X + Y + Z = 3$.
De même, $w + x + y + z = 3$.
Puisque les nombres de la colonne B doivent être distincts, $15 - w$ et $15 - W$ ne peuvent être égaux. On a donc $w \neq W$. De la même façon, $x \neq X$, $y \neq Y$ et $z \neq Z$.

Le nombre de cartes de BINGO que l'on cherche correspond donc au nombre de façons de choisir des entiers w, x, y, z, W, X, Y, Z avec les bonnes sommes de manière qu'il n'y ait pas deux nombres égaux dans une même colonne.

Puisque W, X, Y et Z sont des entiers et que chacun est supérieur ou égal à 0, ils doivent être $3, 0, 0, 0$ dans un ordre quelconque ou $2, 1, 0, 0$ dans un ordre quelconque ou $1, 1, 1, 0$ dans un ordre quelconque. En effet :

Pour qu'une somme soit égale à 3, aucun entier ne peut être supérieur à 3. Si un entier est 3, les autres doivent être 0. Si un entier est 2, un autre doit être 1 et les autres doivent être 0. Si aucun entier n'est 2 ou 3, trois entiers doivent être 1.

De même, w, x, y, z doivent être $3, 0, 0, 0$ dans un ordre quelconque ou $2, 1, 0, 0$ dans un ordre quelconque ou $1, 1, 1, 0$ dans un ordre quelconque.
Puisqu'aucune des valeurs ne peut être supérieure à 3, les nombres manquants dans les colonnes B, I, G ou O sont supérieurs à 12, 27, 57 et 72, respectivement. Ils sont donc différents des nombres déjà sur la carte.
Pour déterminer le nombre de cartes de BINGO, on compte le nombre de combinaisons possibles des valeurs de W, X, Y, Z et w, x, y, z.
Dans ce qui suit, on dira que w et W ont des *positions correspondantes*, c'est-à-dire qu'elles correspondent à une même colonne. De même, x et X sont des positions correspondantes, y et Y le sont aussi et z et Z le sont aussi.

<u>1er cas : W, X, Y, Z ont pour valeurs $3, 0, 0, 0$ dans un ordre quelconque</u>

(i) w, x, y, z ne peuvent avoir pour valeurs $3, 0, 0, 0$. Autrement, dans au moins deux paires, les positions correspondantes égaleraient 0 et au moins deux colonnes contiendraient ainsi deux fois un même nombre. (Par exemple, si $W = 3$, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ et $w = 0$, $x = 0$, $y = 3$, $z = 0$, on aurait alors $X = x = 0$ et $Z = z = 0$. La colonne I contiendrait deux fois le nombre 30 et la colonne O contiendrait deux fois le nombre 75.)

(ii) w, x, y, z ne peuvent avoir pour valeurs $2, 1, 0, 0$. Autrement dans au moins une paire, les positions correspondantes égaleraient 0 et au moins une colonne contiendrait deux fois un même nombre.

(iii) w, x, y, z pourraient avoir pour valeurs $1, 1, 1, 0$ dans un ordre quelconque. De combien de façons cela peut-il se produire ?
Puisque W, X, Y, Z ont pour valeurs $3, 0, 0, 0$ dans un ordre quelconque, il y a 4 positions possibles pour le 3. Les trois autres positions doivent être des 0.
Quant à w, x, y, z, le 0 doit aller dans la position qui correspond au 3 (car il ne peut y avoir deux 0 en positions correspondantes) et les trois autres positions doivent être des 1.
Il y a donc 4 façons de le faire.

<u>2e cas : W, X, Y, Z ont pour valeurs $2, 1, 0, 0$ dans un ordre quelconque</u>

(i) w, x, y, z ne peuvent avoir pour valeurs $3, 0, 0, 0$ comme on l'a vu dans le 1er cas.

(ii) w, x, y, z pourraient avoir pour valeurs $2, 1, 0, 0$ dans un ordre quelconque.
On considère les valeurs de W, X, Y, Z : il y a 4 positions possibles pour le 2. Pour chacune d'elles, il y a 3 positions possibles pour le 1. Les deux autres positions doivent être des 0.
Quant à w, x, y, z, les 0 doivent aller dans les positions qui correspondent au 2 et au 1 dans les valeurs de W, X, Y, Z. Il y a donc 2 positions possibles pour le 2 et le 1 est placé dans l'autre position.
Il y a donc $4 \cdot 3 \cdot 2$ façons, ou 24 façons de le faire.

(iii) w, x, y, z pourraient avoir pour valeurs $1, 1, 1, 0$ dans un ordre quelconque.
On considère les valeurs de W, X, Y, Z : il y a 4 positions possibles pour le 2. Pour chacune d'elles, il y a 3 positions possibles pour le 1. Les deux autres positions doivent être des 0.
Quant à w, x, y, z, les 0 doivent aller dans les positions qui correspondent au 1 dans les valeurs de W, X, Y, Z, puisqu'il ne peut y avoir deux 1 dans cette position. Les positions

des 1 suivent.
Il y a donc $4 \cdot 3$ façons, ou 12 façons de le faire.

3ᵉ cas : W, X, Y, Z ont pour valeurs $1, 1, 1, 0$ dans un ordre quelconque

(i) w, x, y, z pourraient avoir pour valeurs $3, 0, 0, 0$ dans un ordre quelconque. Comme dans le 1ᵉʳ cas, il y a 4 façons de le faire.

(ii) w, x, y, z pourraient avoir pour valeurs $2, 1, 0, 0$ dans un ordre quelconque. Comme dans le 2ᵉ cas, il y a 12 façons de le faire.

(iii) w, x, y, z ne peuvent avoir pour valeurs $1, 1, 1, 0$ dans un ordre quelconque, Autrement, dans au moins deux paires, les positions correspondantes égaleraient 1 et au moins deux colonnes contiendraient ainsi deux fois un même nombre.

En tout, il y a $(4 + 24 + 12 + 4 + 12)$ façons, ou 56 façons d'attribuer les valeurs de W, X, Y, Z, w, x, y, z.
Chacune de ces 56 façons produit une carte de BINGO qui répond aux critères donnés. Il y a donc 56 façons de remplir la carte de BINGO de manière que les nombres de la diagonale et les nombres de la 3ᵉ rangée aient une somme de 177.

Solution 2
La plus grande somme possible pour les nombres d'une 3ᵉ rangée ou d'une diagonale est $15 + 30 + 0 + 60 + 75$, ou 180.
On veut que les nombres de la 3ᵉ rangée aient une somme de 177, de même que ceux de la diagonale.
Puisque 177 est 3 de moins que la somme maximale possible de 180, alors tout nombre manquant sur la carte de BINGO peut être 0, 1, 2 ou 3 de moins que le plus grand nombre permis dans la colonne B, I, G ou O correspondante.
Ainsi dans la colonne B, les deux nombres manquants peuvent être 0, 1, 2 ou 3 de moins que 15.
Dans la colonne I, les deux nombres manquants peuvent être 0, 1, 2 ou 3 de moins que 30.
Dans la colonne G, les deux nombres manquants peuvent être 0, 1, 2 ou 3 de moins que 60 et dans la colonne O, les deux nombres manquants peuvent être 0, 1, 2 ou 3 de moins que 75.
Donc, les nombres manquants sur a carte de BINGO peuvent être choisis parmi les nombres suivants :

$12, 13, 14, 15$ pour la colonne B,
$27, 28, 29, 30$ pour la colonne I,
$57, 58, 59, 60$ pour la colonne G et
$72, 73, 74, 75$ pour la colonne O.

(On remarque qu'aucun de ces nombres ne parait déjà sur la carte de BINGO et chacun peut donc être choisi sans problème.)
Il existe exactement trois méthodes pour diminuer de 3 la somme maximale, 180, de manière à obtenir une somme de 177.
À partir des listes ci-dessus, on peut :

— choisir le plus petit nombre d'une liste (ce nombre est 3 de moins que le plus grand) et le plus grand nombre de chaque autre liste. Par exemple, on choisit le plus petit nombre de la liste B, 12, et le plus grand nombre de chaque autre liste, soit $30, 60$ et 75. On a alors $12 + 30 + 60 + 75 = 177$. OU
— choisir le plus grand nombre d'une liste et le deuxième plus grand de chaque autre liste. Par exemple, on choisit le plus grand nombre de la liste B, 15, et le deuxième plus grand de chaque autre liste, soit $29, 59$ et 74. On a alors $15 + 29 + 59 + 74 = 177$. OU

— choisir le plus grand nombre de deux des listes, le deuxième plus grand d'une troisième liste et le troisième plus grand de la quatrième liste. Par exemple, on choisit le plus grand nombre des listes B et C, 15 et 30, le deuxième plus grand de la liste G, 59, et le troisième plus grand de la liste O, 73. On a alors $15 + 30 + 59 + 73 = 177$.

Ce sont les trois seules méthodes pour diminuer de 3 la somme maximale, 180, afin d'obtenir une somme de 177.

On reformule ces trois méthodes au moyen du tableau suivant :

	B	I	G	O
P	15	30	60	75
Q	14	29	59	74
R	13	28	28	73
S	12	27	57	72

Les trois méthodes pour obtenir une somme de 177 dans la 3e rangée ou la diagonale sont :

(1) choisir 1 nombre de la ligne S (soit $12, 27, 57$ ou 72) et 3 nombres de la ligne P, OU

(2) choisir 1 nombre de la ligne P et 3 nombres de la ligne Q, OU

(3) choisir 2 nombres de la ligne P, 1 nombre de la ligne Q et 1 nombre de la ligne R.

Il faut aussi que les nombres de la 3e rangée aient une somme de 177, de même que ceux de la diagonale.

Il faut donc utiliser deux des méthodes précédentes pour choisir les nombre de la 3e rangée et ceux de la diagonale, tout en s'assurant de choisir deux nombres différents pour chaque colonne.

Quelles combinaisons de méthode peut-on utiliser parmi les trois méthodes ?

Si on utilise la méthode (1) pour remplir la 3e rangée de la carte de BINGO, on ne peut remplir la diagonale par la méthode (1) ou la méthode (3), car on aurait déjà utilisé trois nombres de la ligne P et il n'y en resterait pas suffisamment pour remplir la diagonale.

Si on utilise la méthode (1) pour remplir la 3e rangée de la carte de BINGO, il faut donc utiliser la méthode (2) pour remplir la diagonale.

De même, si on utilise la méthode (2) pour remplir la 3e rangée, on ne peut utiliser la méthode (2) pour remplir la diagonale.

Si on utilise la méthode (3) pour remplir la 3e rangée, on ne peut utiliser la méthode (1) pour remplir la diagonale.

Toutes les autres combinaisons de méthodes sont possibles. Elles sont résumées dans le tableau suivant :

Méthode utilisée pour remplir la 3e rangée	Méthode utilisée pour remplir la diagonale
1 : $SPPP$	2 : $PQQQ$
2 : $PQQQ$	1 : $SPPP$
2 : $PQQQ$	3 : $PPQR$
3 : $PPQR$	2 : $PQQQ$
3 : $PPQR$	3 : $PPQR$

Pour déterminer le nombre de façons de remplir la carte de BINGO, il faut compter le nombre de façons de choisir les nombres qui satisfont à chacune des cinq combinaisons du tableau.

<u>1re combinaison : $SPPP$ dans la 3e rangée et $PQQQ$ dans la diagonale</u>

Il y a 4 façons d'obtenir $SPPP$ dans la 3e rangée :

Il y a 4 choix pour la colonne (B, I, G ou O) dans laquelle on utilisera le nombre S, les autres colonnes recevant chacune un nombre P.

Pour remplir la diagonale de cette carte de BINGO au moyen de $PQQQ$, il faut que le nombre P soit dans la même colonne que le nombre S de la 3e rangée, car chacun des trois autres nombres P est déjà dans la 3e rangée.
Il n'y a donc qu'un choix pour le nombre P de la diagonale et chaque case des autres colonnes de la diagonale sera remplie par son nombre Q.
Il y a donc 4 choix possibles pour remplir la 3e colonne et pour chacun de ces choix, il y a 1 choix possible pour remplir la diagonale. Pour cette 1re combinaison, il y a donc 4×1 façons, ou 4 façons de remplir la carte de BINGO.

<u>2e combinaison : $PQQQ$ dans la 3e rangée et $SPPP$ dans la diagonale</u>
On procède comme dans la combinaison précédente, sauf que les rôles de la 3e rangée et de la diagonale sont renversés.
Il y a donc 4 façons possibles de remplir la carte de BINGO pour cette combinaison.

<u>3e combinaison : $PQQQ$ dans la 3e rangée et $PPQR$ dans la diagonale</u>
Il y a 4 façons d'obtenir $PQQQ$ dans la 3e rangée :

> Il y a 4 choix possibles pour la colonne (B, I, G ou O) dans laquelle on utilisera le nombre P, les autres colonnes recevant chacune un nombre Q.

Pour remplir la diagonale de cette carte de BINGO au moyen de $PPQR$, il faut que le nombre Q soit dans la même colonne que le nombre P de la 3e rangée, car chacun des trois autres nombres Q est déjà dans la 3e rangée.
Il faut remplir les 3 autres colonnes avec les nombres PPR correspondants.
Il y a 3 façons possibles de les mettre en ordre (PPR, PRP et RPP). Il y a donc 3 façons de continuer à remplir la diagonale.
Il y a donc 4 façons de remplir la 3e rangée et dans chaque cas, 1×3 façons de remplir la diagonale. Il y a donc 4×3 façons, ou 12 façons de remplir la carte de BINGO selon cette troisième combinaison.

<u>4e combinaison : $PPQR$ dans la 3e rangée et $PQQQ$ dans la diagonale</u>
On procède comme dans la combinaison précédente, sauf que les rôles de la 3e rangée et de la diagonale sont renversés.
Il y a donc 12 façons de remplir la carte de BINGO selon cette quatrième combinaison.

<u>5e combinaison : $PPQR$ dans la 3e rangée et $PPQR$ dans la diagonale</u>
Il y a 12 façons d'obtenir $PPQR$ dans la 3e rangée :

> Il y a 4 choix possibles pour la colonne qui contiendra le nombre Q. Pour chacun, il y a 3 choix possibles pour la colonne qui contiendra le nombre R. Les nombres P remplissent ensuite les places vides.

Il y a ensuite 2 façons possibles de remplir la diagonale :

> Les nombres P de la diagonale doivent occuper les mêmes colonnes que les nombres Q et R de la 3e rangée.
> Il y a 2 façons possibles de placer les nombres Q et R de la diagonale, soit dans l'ordre QR ou dans l'ordre RQ.

Il y a 12×2 façons, ou 24 façons de remplir la carte de BINGO selon cette cinquième combinaison.

En tout, il y a donc $(4 + 4 + 12 + 12 + 24)$ façons, ou 56 façons de remplir la carte de BINGO de manière que les nombres de la diagonale et les nombres de la 3e rangée aient une somme de 177.