Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2016

(11^e^ année – Secondaire V)

le mercredi 24 février 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 25 février 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. Puisque $x = 3$ et $y = 2x$, alors $y = 2 \cdot 3$, ou $y = 6$.
Puisque $y = 6$ et $z = 3y$, alors $z = 3 \cdot 6$, ou $z = 18$.

Réponse : (D)

2. Une pyramide à base carrée a 4 arêtes qui forment la base carrée et 4 arêtes inclinées qui relient les sommets de la base au sommet supérieur pour un total de 8 arêtes.

Réponse : (C)

3. On a : $\dfrac{20 + 16 \times 20}{20 \times 16} = \dfrac{20 + 320}{320} = \dfrac{340}{320} = \dfrac{17}{16}$
On peut aussi remarquer que 20 est un multiple du numérateur et du dénominateur.
Donc : $\dfrac{20 + 16 \times 20}{20 \times 16} = \dfrac{20(1 + 16)}{20 \times 16} = \dfrac{1 + 16}{16} = \dfrac{17}{16}$

Réponse : (E)

4. Le 7e nombre oblong est le nombre de points dans un tableau rectangulaire de points formé de 7 colonnes et 8 rangées.
Le 7e nombre oblong est donc égal à 7×8, ou 56.

Réponse : (C)

5. *Solution 1*
Soit (a, b) les coordonnées de R.
Puisque Q est le milieu de PR, le déplacement horizontal de P à Q est égal à celui de Q à R. De même, le déplacement vertical de P à Q est égal à celui de Q à R.
On a donc $4-1 = a-4$ et $7-3 = b-7$, d'où $a = 7$ et $b = 11$. Donc, R a pour coordonnées $(7, 11)$.

Solution 2
Soit (a, b) les coordonnées de R.
Puisque P a pour coordonnées $(1, 3)$, le milieu de PR a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(1 + a), \frac{1}{2}(3 + b)\right)$.
Puisque $Q(4, 7)$ est le milieu de PR, alors $4 = \frac{1}{2}(1 + a)$ et $14 = \frac{1}{2}(3 + b)$. Donc $7 = 1 + a$ et $14 = 3 + b$, d'où $a = 7$ et $b = 11$.
Donc, R a pour coordonnées $(7, 11)$.

Réponse : (B)

6. Le samedi et le dimanche, Carrine envoie à son frère un total de 10 messages $(5 + 5)$.
Les cinq autres jours de la semaine, elle envoie 2 messages par jour à son frère pour un total de 10 messages (5×2).
Elle lui envoie donc $(10 + 10)$ messages, ou 20 messages par semaine.
En 4 semaines, elle lui envoie $4 \cdot 20$ messages, ou 80 messages.

Réponse : (D)

7. On a : $(-2)^3 - (-3)^2 = -8 - 9 = -17$

Réponse : (A)

8. Puisque $\sqrt{25 - \sqrt{n}} = 3$, alors $25 - \sqrt{n} = 9$.
Donc $\sqrt{n} = 16$. Donc $n = 16^2$, ou $n = 256$.

Réponse : (E)

9. *Solution 1*
On sait que $\dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5} = \dfrac{20}{100} = 20\,\%$.
Donc, 12 correspond à $20\,\%$ de 60, d'où $x = 20$.
Donc $15\,\%$ de x est égal à $15\,\%$ de 20, ou $0{,}15 \cdot 20$, ou 3.

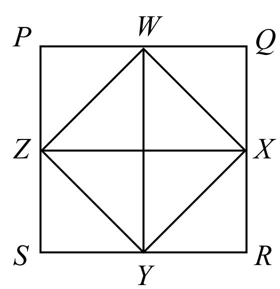
Solution 2
Puisque $x\,\%$ de 60 est égal à 12, alors $\dfrac{x}{100} \cdot 60 = 12$, d'où $x = \dfrac{12 \cdot 100}{60}$, ou $x = 20$.
Donc $15\,\%$ de x est égal à $15\,\%$ de 20, ou $0{,}15 \cdot 20$, ou 3.

Solution 3
Puisque $x\,\%$ de 60 est égal à 12, alors $\dfrac{x}{100} \cdot 60 = 12$, ou $\dfrac{60x}{100} = 12$.
Or, $15\,\%$ de x correspond à $\dfrac{15}{100}x$, ou $\dfrac{15x}{100}$.
Puisque $\dfrac{60x}{100} = 12$, alors : $\dfrac{15x}{100} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{60x}{100}\right) = \dfrac{1}{4} \cdot 12 = 3$

Réponse : (D)

10. *Solution 1*
Puisque le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 2, alors $PQ = QR = RS = SP = 2$.
Puisque W, X, Y et Z sont les milieux des côtés du carré $PQRS$, alors $PW = PZ = 1$.
Puisque $\angle ZPW = 90^\circ$, alors d'après le théorème de Pythagore, $WZ = \sqrt{PW^2 + PZ^2}$, ou $WZ = \sqrt{1^2 + 1^2}$, ou $WZ = \sqrt{2}$.
Le carré $WXYZ$ a donc des côtés de longueur $\sqrt{2}$.
L'aire du carré $WXYZ$ est donc égale à $(\sqrt{2})^2$, ou 2. L'aire du carré $PQRS$ est égale à 2^2, ou 4.
Le rapport de ces deux aires est donc de 2 : 4, ou 1 : 2.

Solution 2
On trace les segments WY et ZX.



Puisque $PQRS$ est un carré et que W, X, Y et Z sont les milieux de ses côtés, alors WY et ZX divisent le carré en 4 carrés identiques.
Chacun de ces quatre carrés est divisé en deux triangles de même aire par les diagonales. (Les diagonales sont WZ, WX, XY et YZ.)
Le carré $WXYZ$ est formé de 4 de ces triangles de même aire.
Le carré $PQRS$ est formé de 8 de ces triangles de même aire.
Le rapport de ces deux aires est donc de 4 : 8, ou 1 : 2.

Réponse : (A)

11. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PRS,

$$PS = \sqrt{RS^2 - PR^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5,$$

puisque $PS > 0$.
Puisque $PQ = PS + SQ$, alors $PQ = 5 + 11$, ou $PQ = 16$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PRQ,

$$RQ = \sqrt{PR^2 + PQ^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20,$$

puisque $RQ > 0$.
Le périmètre du triangle QRS est égal à $RS + SQ + RQ$, ou $13 + 11 + 20$, ou 44.

Réponse : (B)

12. Puisque $128 = 2^7$, ses diviseurs positifs sont :

$$2^0 = 1 \qquad 2^1 = 2 \qquad 2^2 = 4 \qquad 2^3 = 8 \qquad 2^4 = 16 \qquad 2^5 = 32 \qquad 2^6 = 64 \qquad 2^7 = 128$$

Parmi ces diviseurs, $1, 4, 16$ et 64 sont des carrés parfaits.
Donc, 128 admet trois diviseurs qui sont des carrés parfaits supérieurs à 1.

Réponse : (D)

13. Puisque $4x, 2x - 3, 4x - 3$ forment une suite arithmétiqe, alors la différence entre deux termes consécutifs est constante. On a donc $(2x - 3) - 4x = (4x - 3) - (2x - 3)$.
Donc $-2x - 3 = 2x$, d'où $4x = -3$, ou $x = -\frac{3}{4}$.

Réponse : (E)

14. Puisque les quatre nombres $4, a, b$ et 22 ont une moyenne de 13, ils ont une somme de 4×13, ou 52. Donc $4 + a + b + 22 = 52$, d'où $a + b = 26$.
Puisque $a > 4$ et que a est un entier, alors $a \geq 5$.
Puisque $a + b = 26$ et que $a < b$, les valeurs de a ne pourront pas égaler ou dépasser 13.
Donc $a < 13$. Puisque a est un entier, alors $a \leq 12$.
On a donc $5 \leq a \leq 12$.
Donc a peut prendre 8 valeurs dans cet intervalle, soit 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. (On remarque que $12 - 4 = 8$ ou $12 - 5 + 1 = 8$.)
Les valeurs de (a, b) sont $(5, 21), (6, 20), (7, 19), (8, 18), (9, 17), (10, 16), (11, 15)$ et $(12, 14)$.
Il y a donc 8 couples possibles.

Réponse : (B)

15. Lorsque Hichem parcourt les 10 premiers kilomètres à une vitesse moyenne de 12 km/h, il met $\frac{10}{12}$ heure, ou $\frac{5}{6}$ heure pour le faire.
Puisqu'il met 1,5 heure pour parcourir 16 km, le temps qu'il met pour parcourir les derniers 6 km est égal à : $\frac{3}{2} - \frac{5}{6} = \frac{9}{6} - \frac{5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ heure.
Puisqu'il parcourt 6 km en $\frac{2}{3}$ heure, sa vitesse moyenne dans les 6 derniers kilomètres est égale à $\frac{6}{2/3}$ km/h, ou 9 km/h.

Réponse : (B)

16. *Solution 1*
Puisque $x = 18$ est une solution de l'équation $x^2 + 12x + c = 0$, alors 18 vérifie l'équation.
On a donc $18^2 + 12(18) + c = 0$, ou $324 + 216 + c = 0$, ou $c = -540$.
L'équation initiale devient donc $x^2 + 12x - 540 = 0$, ou $(x - 18)(x + 30) = 0$.
L'autre solution est donc -30.

Solution 2
On sait que la somme des racines d'une équation de la forme $x^2 + bx + c = 0$ est égale à $-b$.
La somme des racines de l'équation $x^2 + 12x + c = 0$ est égale à -12. .
Soit r l'autre racine. La somme des racines est donc égale à $r + 18$. On a donc $r + 18 = -12$, ou $r = -30$.
L'autre solution est donc -30.

Réponse : (C)

17. Le nombre de points sur le cercle est le même que le nombre d'espaces entre les points.
Pour passer du point 7 au point 35, il faut parcourir 28 espaces autour du cercle, car $35 - 7 = 28$.
Puisque les points 7 et 35 sont diamétralement opposés, alors il faut parcourir le même nombre d'espaces pour continuer autour du cercle de 35 jusqu'à 7.
Il y a donc $2 \cdot 28$ espaces, ou 56 espaces entre les nombres autour du cercle.
Il y a donc 56 points autour du cercle. Donc $n = 56$.

Réponse : (C)

18. On peut récrire la première équation $\dfrac{x-y}{x+y} = 9$ sous la forme $x - y = 9x + 9y$, ou $-8x = 10y$, ou $-4x = 5y$.
On peut récrire la deuxième équation $\dfrac{xy}{x+y} = -60$ sous la forme $xy = -60x - 60y$.
On multiplie chaque membre de cette dernière équation par 5 pour obtenir $5xy = -300x - 300y$, ou $x(5y) = -300x - 60(5y)$.
Puisque $5y = -4x$, alors $x(-4x) = -300x - 60(-4x)$, ou $-4x^2 = -60x$, ou $4x^2 - 60x = 0$, ou $4x(x - 15) = 0$.
Donc $x = 0$ ou $x = 15$.
Puisque $y = -\frac{4}{5}x$, alors $y = 0$ ou $y = -12$.
D'après la première équation, on ne peut avoir $x = y = 0$.
On peut vérifier que le couple $(15, -12)$ vérifie les deux équations.
Donc $(x + y) + (x - y) + xy = 3 + 27 + (-180) = -150$.

Réponse : (B)

19. *Solution 1*
Lorsque les n élèves sont placés en groupes de 2, soit g le nombre de groupes complets et il y a un groupe incomplet.
Puisque ce sont des groupes de 2, le groupe incomplet doit donc avoir 1 élève.
Donc $n = 2g + 1$.
Puisque le nombre de groupes complets de 2 élèves est 5 de plus que le nombre de groupes complets de 3 élèves, il y avait $g - 5$ groupes complets de 3 élèves.
Après que les élèves sont en groupes de 3, il reste un groupe incomplet qui doit comprendre 1 ou 2 élèves.
On a donc $n = 3(g - 5) + 1$ ou $n = 3(g - 5) + 2$.
Si $n = 2g + 1$ et $n = 3(g - 5) + 1$, alors $2g + 1 = 3(g - 5) + 1$, ou $2g + 1 = 3g - 14$, d'où $g = 15$.

Dans ce cas, puisque $n = 2g + 1$, alors $n = 31$. Il y avait donc 15 groupes complets de 2 élèves et 10 groupes complets de 3 élèves.
Si $n = 2g+1$ et $n = 3(g-5)+2$, alors $2g+1 = 3(g-5)+2$, ou $2g+1 = 3g-13$, d'où $g = 14$.
Dans ce cas, puisque $n = 2g + 1$, alors $n = 29$. Il y avait donc 14 groupes complets de 2 élèves et 9 groupes complets de 3 élèves.
Si $n = 31$, on pourrait diviser 31 élèves en 7 groupes complets de 4 élèves et 1 groupe incomplet.
Si $n = 29$, on pourrait diviser 29 élèves en 7 groupes complets de 4 élèves et 1 groupe incomplet.
Or, l'énoncé indique que le nombre de groupes complets de 3 élèves est 3 de plus que le nombre de groupes complets de 4 élèves. On doit donc avoir $n = 31$.
Dans ce cas, on a $n^2 - n = 31^2 - 31$, ou $n^2 - n = 930$.
La somme des chiffres de l'entier égal à $n^2 - n$ est donc égale à 12.

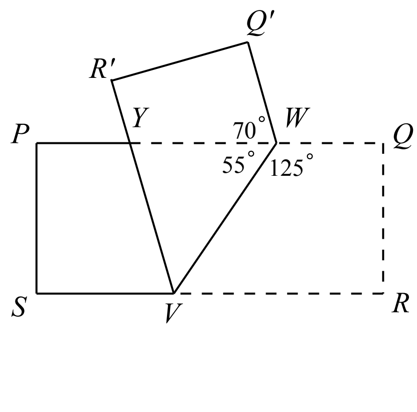
Solution 2
Puisque les n élèves ne peuvent pas être placés en groupes complets de 2, 3 ou 4 élèves, alors n n'est pas un multiple de 2, 3 ou 4.
Voici les premiers entiers supérieurs à 1 qui ne sont pas divisibles par 2, 3 ou 4 : 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35.
Dans chaque cas, on indique le nombre de groupes complets de chaque grandeur :

n	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31	35
N$^{\text{bre}}$ de groupes complets de 2 élèves	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17
N$^{\text{bre}}$ de groupes complets de 3 élèves	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N$^{\text{bre}}$ de groupes complets de 4 élèves	1	1	2	3	4	4	5	6	7	7	8

Puisque le nombre de groupes complets de 2 élèves est 5 de plus que le nombre de groupes complets de 3 élèves qui est lui-même 3 de plus que le nombre de groupes complets de 4 élèves, on voit que parmi ces résultats, $n = 31$ satisfait aux conditions.
Dans ce cas, on a $n^2 - n = 31^2 - 31$, ou $n^2 - n = 930$. La somme des chiffres de l'entier égal à $n^2 - n$ est donc égale à 12.
(Puisqu'il s'agit d'un problème à choix multiple et qu'on a trouvé une valeur de n qui vérifie les condidions données, cette réponse doit être bonne. La solution 1 indique pourquoi 31 est la seule valeur de n qui satisfait aux conditions données.)

Réponse : (B)

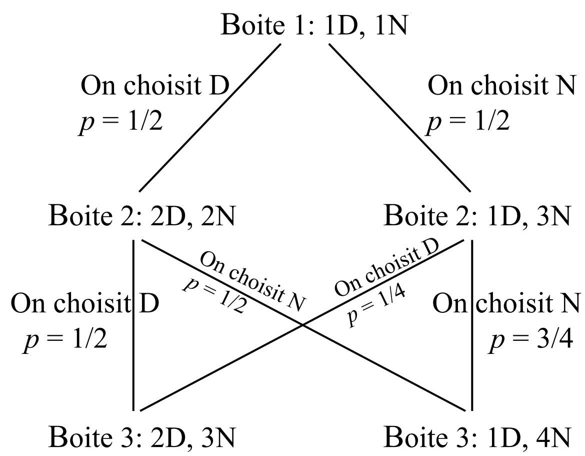
20. Puisque les points Y, W et Q sont alignés, alors $\angle YWV = 180° - \angle VWQ$.
Donc $\angle YWV = 180° - 125°$, ou $\angle YWV = 55°$.
Puisque Q' est la position finale du point Q après le pli, alors l'angle $Q'WV$ est la position finale l'angle QWV après le pli. Donc $\angle Q'WV = \angle QWV$.
Donc $\angle Q'WV = \angle QWV = 125°$. Donc $\angle Q'WY = \angle Q'WV - \angle YWV$, ou $\angle Q'WY = 125° - 55°$, ou $\angle Q'WY = 70°$.



Puisque $Q'W$ et $R'Y$ sont des côtés parallèles de la feuille , alors $\angle R'YW + \angle Q'WY = 180°$. Donc $\angle R'YW = 180° - \angle Q'WY$, ou $\angle R'YW = 180° - 70°$, ou $\angle R'YW = 110°$.
Puisque les angles PYV et $R'YW$ sont opposés par le sommet, alors $\angle PYV = \angle R'YW = 110°$.

Réponse : (A)

21. Lorsqu'on prend une bille au hasard de la boite 1, il y a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de choisir une bille dorée et une probabilité de $\frac{1}{2}$ de choisir une bille noire.
Après ce choix, il y a donc une probabilité de $\frac{1}{2}$ pour que la boite 2 contienne 2 billes dorées et 2 billes noires et une probabilité de $\frac{1}{2}$ pour que la boite 2 contienne 1 bille dorée et 3 billes noires.
Dans le premier cas (qui survient avec une probabilité de $\frac{1}{2}$), il y a une probabilité de $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$ de choisir une bille dorée dans la boite 2 et une probabilité de $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$, de choisir une bille noire soit dans la boite 2.
Dans le deuxième cas (qui survient avec une probabilité de $\frac{1}{2}$), il y a une probabilité de $\frac{1}{4}$ de choisir une bille dorée dans la boite 2 et une probabilité de $\frac{3}{4}$ de choisir une bille noire dans la boite 2.



Donc, la probabilité de choisir une bille dorée dans la boite 2 est égale à $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$, ou $\frac{3}{8}$ et la probabilité de choisir une bille noire dans la boite 2 est égale à $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$, ou $\frac{5}{8}$.
Donc après ce choix, il y a une probabilité de $\frac{3}{8}$ pour que la boite 3 contienne 2 billes dorées et 3 billes noires et une probabilité de $\frac{5}{8}$ pour que la boite 3 contienne 1 bille dorée et 4 billes noires.
La probabilité de choisir une bille dorée dans la boite 3 est égale au produit de la probabilité pour que la boite 3 contienne 2 billes dorées et 3 billes noires et de la probabilité de choisir une bille dorée dans cette situation (c'est-à-dire $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5}$) plus le produit de la probabilité pour que la boite 3 contienne 1 bille dorée et 4 billes noires et de la probabilité de choisir une bille dorée dans cette situation.
La probabilité est donc égale à $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5}$, ou $\frac{11}{40}$.

Réponse : (A)

22. *Solution 1*
On développe l'expression pour obtenir :

$$(x^2 + 6x + 9) + 2(y^2 - 4y + 4) + 4(x^2 - 14x + 49) + (y^2 + 8y + 16)$$

On développe davantage pour obtenir :

$$x^2 + 6x + 9 + 2y^2 - 8y + 8 + 4x^2 - 56x + 196 + y^2 + 8y + 16$$

On simplifie pour obtenir :

$$5x^2 - 50x + 3y^2 + 229$$

On met en évidence le facteur 5 dans les deux premiers termes :

$$5(x^2 - 10x) + 3y^2 + 229$$

On complète le carré pour obtenir :

$$5(x^2 - 10x + 5^2 - 5^2) + 3y^2 + 229$$

On obtient

$$5(x - 5)^2 - 125 + 3y^2 + 229$$

ou :

$$5(x - 5)^2 + 3y^2 + 104$$

Puisque $(x - 5)^2 \geq 0$ pour tout nombre réel x et que $3y^2 \geq 0$ pour tout nombre réel y, la valeur minimale de $5(x-5)^2 + 3y^2 + 104$ (et donc de l'expression initiale) est égale à $5(0) + 3(0) + 104$, ou 104.
On obtient cette valeur minimale lorsque $x = 5$ (ce qui donne $(x - 5)^2 = 0$) et $y = 0$ (ce qui donne $3y^2 = 0$).

Solution 2
On développe l'expression pour obtenir :

$$(x^2 + 6x + 9) + 2(y^2 - 4y + 4) + 4(x^2 - 14x + 49) + (y^2 + 8y + 16)$$

On développe davantage pour obtenir :

$$x^2 + 6x + 9 + 2y^2 - 8y + 8 + 4x^2 - 56x + 196 + y^2 + 8y + 16$$

On regroupe les termes qui contiennent x, ainsi que les constantes associées à ces termes :

$$x^2 + 6x + 9 + 4x^2 - 56x + 196 = 5x^2 - 50x + 205 = 5x^2 - 50x + 125 + 80 = 5(x - 5)^2 + 80$$

On regroupe les termes qui contiennent y, ainsi que les constantes associées à ces termes :

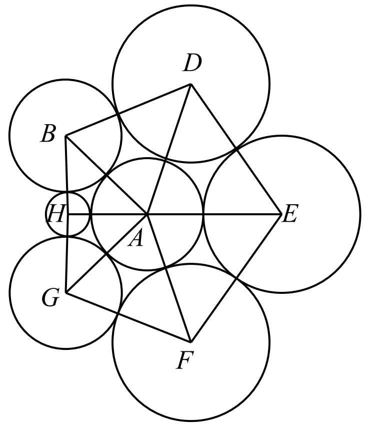
$$2y^2 - 8y + 8 + y^2 + 8y + 16 = 3y^2 + 24$$

Puisque $(x - 5)^2 \geq 0$ pour tout nombre réel x, l'expression $5(x - 5)^2 + 80$ a une valeur minimale de 80.

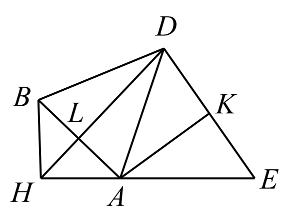
Puisque $y^2 \geq 0$ pour tout nombre réel y, l'expression $3y^2 + 24$ a une valeur minimale de 24.
Puisque l'expression $(x - 3)^2 + 4(x - 7)^2$ a une valeur minimale de 80 et que l'expression $2(y - 2)^2 + (y + 4)^2$ a une valeur minimale de 24, alors l'expression
$(x - 3)^2 + 2(y - 2)^2 + 4(x - 7)^2 + (y + 4)^2$ a une valeur minimale de $80 + 24$, ou 104.

Réponse : (E)

23. On nomme les centres des pièces de monnaie A, B, D, E, F, G et F, comme dans la figure suivante et on trace les segments AB, AD, AE, AF, AG, AH, BD, DE, EF, FG, GH et HB.



Les cercles de centres D, E et F ont un rayon de 3 cm et les cercles de centres A, B et G ont un rayon de 2 cm. (D'ici la fin de la solution, on ne mentionnera pas les unités qui sont des centimètres.)
Soit r le rayon du cercle de centre H. On cherche la valeur de r.
Lorsqu'on joint par un segment les centres de deux cercles qui se touchent, le segment passe par le point de contact des cercles et sa longueur est la somme des rayons des deux cercles.
On a donc $AB = 2 + 2$, ou $AB = 4$. De même, $AG = 4$, $BD = AD = AE = AF = GF = 5$, $DE = EF = 6$ et $HA = HB = HG = r + 2$.
Les triangles ADE et AFE ont tous deux des côtés de longueurs 5, 5 et 6. Ces triangles sont donc isométriques.
De même, les triangles ADB et AFG sont isométriques et les triangles ABH et AGH sont isométriques.
Puisque deux angles correspondants de deux triangles isométriques sont égaux, alors
$\angle HAB + \angle BAD + \angle DAE$ est égal à $\angle HAG + \angle GAF + \angle FAE$.
Or, ces six angles forment un angle plein au point A. Leurs mesures ont donc une somme de 360°.
Donc, $\angle HAB + \angle BAD + \angle DAE = \angle HAG + \angle GAF + \angle FAE = 180°$.
On retire les cercles de la figure et on porte attention à la partie supérieure de ce qui reste de la figure.
On joint A au milieu K du segment DE et on joint chacun des points D et H au milieu L du segment AB.



On considère le triangle ADE.
Puisque $DE = 6$ et que K est le milieu de DE, alors $DK = KE = 3$.
Puisque $AD = AE = 5$, le triangle ADE est isocèle. Donc AK est perpendiculaire à DE et AK est la bissectrice de l'angle DAE.
De même, les triangles AHB et ABD sont isocèles (avec $HA = HB$ et $DA = DB$).
Puisque L est le milieu de AB et que $AB = 4$, alors $AL = LB = 2$ et les segments DL et HL sont perpendiculaires à AB au point L.
On sait que $\angle HAB + \angle BAD + \angle DAE = \angle HAL + \angle LAD + 2\angle EAK = 180°$.
Or $\sin(\angle EAK) = \dfrac{EK}{AE} = \dfrac{3}{5}$. Donc $\angle EAK \approx 36{,}87°$.

De plus, $\cos(\angle LAD) = \dfrac{AL}{AD} = \dfrac{2}{5}$. Donc $\angle LAD \approx 66{,}42°$.

Donc : $\angle HAL = 180° - \angle LAD - 2\angle EAK \approx 180° - 66{,}42° - 2(36{,}87°) \approx 39{,}84°$

On sait aussi que : $\cos(\angle HAL) = \dfrac{AL}{HA} = \dfrac{2}{r+2}$

Puisque $\cos(39{,}84°) \approx 0{,}7679$, alors $\dfrac{2}{r+2} \approx 0{,}7679$.

On a donc $r \approx \dfrac{2}{0{,}7679} - 2$.

Puisque $\dfrac{2}{0{,}7679} - 2 \approx 0{,}60451$, alors parmi les choix de réponse, le rayon de la pièce X est plus près de 0,605 cm.

(Si on utilise un plus grand nombre de décimales dans les calculs, on obtient $r \approx 0{,}60466$, ce qui est encore plus près de 0,605 cm.)

Réponse : (D)

24. On explique d'abord l'expression $\lfloor\sqrt{k}\rfloor$ d'une autre façon pour augmenter sa compréhension.
Chaque entier strictement positif k peut être placé entre deux carrés parfaits consécutifs. C'est-à-dire qu'étant donné k, il existe exactement un entier strictement positif n de manière que $n^2 \leq k < (n+1)^2$.
Puisque $n^2 \leq k < (n+1)^2$, alors $n^2 \leq k < n^2 + 2n + 1$, d'où $n \leq \sqrt{k} < n+1$.
Puisque n et $n+1$ sont des entiers consécutifs, alors $\lfloor\sqrt{k}\rfloor = n$.
En d'autres mots, n est le plus grand entier inférieur ou égal à $\sqrt{k}$.
On cherche donc la somme de tous les entiers k ($1 \leq k \leq 999\,999$) pour lesquels k est un multiple du n correspondant.
Or, $n^2 = n \cdot n$ et $n^2 + 2n + 1 = n(n+2) + 1$.
Donc, les valeurs possibles de k ($n^2 \leq k < n^2 + 2n + 1$) sont les multiples de n dans cet intervale, soit $k = n \cdot n$, $k = n(n+1)$ et $k = n(n+2)$.
Puisque $k \leq 999\,999$, alors $k < 1000^2 = 1\,000\,000$, d'où $n \leq 999$.
Le problème est donc équivalent à celui de déterminer la somme de n^2, $n(n+1)$ et $n(n+2)$ pour toutes les valeurs de n de 1 à 999.
Puisque $n^2 + n(n+1) + n(n+2) = 3n^2 + 3n$, on cherche la somme des valeurs de l'expression $3n^2 + 3n$ pour toutes les valeurs de n de 1 à 999. Donc :

$$\begin{aligned} S &= (3(1^2) + 3(1)) + (3(2^2) + 3(2)) + \cdots + (3(998^2) + 3(998)) + (3(999^2) + 3(999)) \\ &= 3(1^2 + 2^2 + \cdots + 998^2 + 999^2) + 3(1 + 2 + \cdots + 998 + 999) \end{aligned}$$

Puisque $1+2+\cdots+(m-1)+m = \dfrac{m(m+1)}{2}$ et $1^2+2^2+\cdots+(m-1)^2+m^2 = \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}$ pour tout entier strictement positif m, alors :

$$\begin{aligned} S &= 3 \cdot \frac{999(1000)(1999)}{6} + 3 \cdot \frac{999(1000)}{2} \\ &= \frac{3(999)(1000)}{6}(1999 + 3) \\ &= \frac{999(1000)}{2}(2002) \\ &= 999(1000)(1001) \end{aligned}$$

Donc $S = 999\,999\,000$.

Réponse : (C)

25. On forme d'abord une partition de l'ensemble A en sous-ensembles disjoints de la forme

$$P_b = \{b, 3b, 9b, \dots, 3^k b\},$$

b étant un entier tel que $1 \leq b \leq 2045$ et k étant le plus grand entier non négatif tel que $3^k b \leq 2045$.
Les deux premiers de ces sous-ensembles sont $P_1 = \{1, 3, 9, 27, 81, 243, 729\}$ et $P_2 = \{2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458\}$. On a formé ces ensembles avec $b = 1$ et $b = 2$, d'où $k = 6$.
On montre que chaque élément de A est un élément d'exactement un de ces sous-ensembles.
Puisque $3^7 = 2187$, alors $3^7 b \geq 2187 > 2045$ pour chaque entier strictement positif b. Donc, la plus grande valeur possible de k est 6.
Pour chaque valeur de k dans l'intervalle $0 \leq k \leq 6$, on détermine l'intervalle des valeurs de b qui correspondent à cette valeur de k :

- $k = 6 : 1 \leq b \leq 2$, puisque $2 \cdot 3^6 = 1458 < 2045$ et $3 \cdot 3^6 = 2187 > 2045$
- $k = 5 : 3 \leq b \leq 8$, puisque $8 \cdot 3^5 = 1944 < 2045$ et $9 \cdot 3^5 = 2187 > 2045$
- $k = 4 : 9 \leq b \leq 25$, puisque $25 \cdot 3^4 = 2025 < 2045$ et $26 \cdot 3^4 = 2106 > 2045$
- $k = 3 : 26 \leq b \leq 75$, puisque $75 \cdot 3^3 = 2025 < 2045$ et $76 \cdot 3^3 = 2052 > 2045$
- $k = 2 : 76 \leq b \leq 227$, puisque $227 \cdot 3^2 = 2043 < 2045$ et $228 \cdot 3^2 = 2052 > 2045$
- $k = 1 : 228 \leq b \leq 681$, puisque $681 \cdot 3^1 = 2043 < 2045$ et $682 \cdot 3^1 = 2046 > 2045$
- $k = 0 : 682 \leq b \leq 2045$, puisque $2045 \cdot 3^0 = 2045$ et $2046 \cdot 3^0 = 2046 > 2045$

Puisqu'on veut créer des ensembles disjoints P_b dont la réunion est l'ensemble $A = \{1, 2, 3, \dots, 2044, 2045\}$, on exclut toutes les valeurs de b qui sont des multiples de 3. (Si b était un multiple de 3, il serait un élément d'un ensemble P_r où $r \leq b$.)
Dans chacun des intervalles précédents, on compte le nombre de multiples de 3 qu'il faut exclure :

k	Intervalles de b	N$^{\text{bre}}$ de multiples de 3	N$^{\text{bre}}$ de valeurs de b qui restent	N$^{\text{bre}}$ d'éléments dans chaque P_b
6	$1 \leq b \leq 2$	0	$2 - 0 = 2$	7
5	$3 \leq b \leq 8$	2	$6 - 2 = 4$	6
4	$9 \leq b \leq 25$	6	$17 - 6 = 11$	5
3	$26 \leq b \leq 75$	17	$50 - 17 = 33$	4
2	$76 \leq b \leq 227$	50	$152 - 50 = 102$	3
1	$228 \leq b \leq 681$	152	$454 - 152 = 302$	2
0	$682 \leq b \leq 2045$	454	$1364 - 454 = 910$	1

Par exemple, l'intervalle $26 \leq b \leq 75$ contient 50 entiers $(75 - 25 = 50)$ y compris les multiples de 3 à partir de $9 \cdot 3$ jusqu'à $25 \cdot 3$, c'est-à-dire 17 multiples de 3 $(25 - 8 = 17)$. L'intervalle $228 \leq b \leq 681$ contient 454 entiers $(681 - 227 = 454)$ y compris les multiples de 3 à partir de $76 \cdot 3$ jusqu'à $227 \cdot 3$, c'est-à-dire 152 multiples de 3 $(227 - 75 = 152)$.
Un entier b dans A qui n'est pas un multiple de 3 produit un ensemble P_b et ne peut pas paraitre dans un autre ensemble P_r. N'importe quel multiple de 3, par exemple m, va paraitre dans exactement un ensemble P_b dont la valeur de b (qui n'est pas un multiple de 3) est obtenue en enlevant par division tous les facteurs 3 de m.
On remarque que $2 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 11 \cdot 5 + 33 \cdot 4 + 102 \cdot 3 + 302 \cdot 2 + 910 \cdot 1 = 2045$. Donc, la réunion des ensembles P_b inclut suffisamment d'éléments pour produire l'ensemble A au complet. Aucun élément de A ne parait dans plus d'un ensemble P_b. Donc, la réunion de tous ces ensembles P_b est égale à l'ensemble A.

Pourquoi ces ensembles sont-ils utiles pour résoudre ce problème ? Un sous-ensemble de A est

sans-triple s'il ne contient pas deux éléments dont un est le triple de l'autre.
Un sous-ensemble de A est donc sans-triple exactement s'il ne contient pas deux éléments consécutifs de n'importe quel P_b.
Un sous-ensemble sans-triple T de A qui contient autant d'éléments que possible contiendra autant d'éléments que possible de chacun des P_b définis ci-haut.
Puisque deux éléments consécutifs de P_b ne peuvent paraitre dans T, alors un P_b de 7 éléments peut contribuer au plus 4 éléments à T (le 1^er^, le 3^e^, le 5^e^ et le 7^e^), un P_b de 6 éléments peut contribuer au plus 3 éléments à T (la moitié de ses éléments), et ainsi de suite.
Pour chaque valeur de k, de $k = 7$ jusqu'à $k = 0$, chaque P_b ci-dessus peut contribuer le nombre suivant d'éléments à T :

k	N^bre^ d'éléments dans chaque P_b	N^bre^ d'éléments qui peuvent être choisis
6	7	4
5	6	3
4	5	3
3	4	2
2	3	2
1	2	1
0	1	1

Ainsi T peut contenir au plus $2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 11 \cdot 3 + 33 \cdot 2 + 102 \cdot 2 + 302 \cdot 1 + 910 \cdot 1$ éléments, ou 1535 éléments. Ce résultat est conforme au renseignement donné dans l'énoncé.
Y a-t-il des choix lorsqu'on crée T ?
Si un P_b contient 1 élément, cet élément doit être choisi pour T.
Si un P_b contient 3 éléments, il y a 1 façon de choisir 2 éléments pour T, puisque les 1^er^ et 3^e^ éléments (en ordre croissant) doivent être choisis.
Si un P_b contient 5 éléments, il y a 1 façon de choisir 3 éléments pour T, puisque les 1^er^, 3^e^ et 5^e^ éléments (en ordre croissant) doivent être choisis.
Si un P_b contient 7 éléments, il y a 1 façon de choisir 3 éléments pour T, puisque les 1^er^, 3^e^, 5^e^ et 7^e^ éléments (en ordre croissant) doivent être choisis..
Si un P_b contient 2 éléments, il y a 2 façons de choisir 1 élément pour T.
Si un P_b contient 4 éléments, il y a 3 façons de choisir 2 éléments pour T. (Pour choisir 2 éléments de $\{A, B, C, D\}$ sans choisir deux éléments consécutifs, on peut choisir A et C, A et D, ou B et D.)
Si un P_b contient 6 éléments, il y a 4 façons de choisir 3 éléments pour T. (Pour choisir 3 éléments de $\{A, B, C, D\}$ sans choisir deux éléments consécutifs, on peut choisir A et C et E, ou A et C et F, ou A et D et F, ou B et D et F.)
Le nombre de façons de choisir un sous-ensemble sans-triple T de A qui contient autant d'éléments que possible est donc égal à $1^2 \cdot 4^4 \cdot 1^{11} \cdot 3^{33} \cdot 1^{102} \cdot 2^{302} \cdot 1^{910}$.
En effet, il y a 2 ensembles P_b avec $k = 6$ et 1 façon de choisir 4 éléments de chacun (ce qui donne 1^2 choix en tout), 4 ensembles P_b avec $k = 5$ et 4 façons de choisir 3 éléments de chacun (ce qui donne 4^4 choix en tout, et ainsi de suite.
Les sept facteurs de ce produit, de $k = 6$ jusqu'à $k = 0$, donnent le nombre de façons de choisir le nombre maximum d'éléments d'un ensemble P_b qui correspond à cette valeur de k, élevé à la puissance égale au nombre de tels ensembles P_b.
Le nombre de façons est égal à $4^4 \cdot 3^{33} \cdot 2^{302}$, ou $2^{310} \cdot 3^{33}$.
D'après l'énoncé du problème, on a $N = 2^2 + 3^2 + 310^2 + 33^2$, ou $N = 97\,202$.
Les trois derniers chiffres de N sont 202.

Réponse : (A)