



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat

(11^e année – Sec. V)

le mercredi 24 février 2016

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 25 février 2016

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF
WATERLOO

Durée : 60 minutes

©2015 University of Waterloo

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

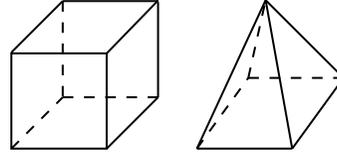
Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Sachant que $x = 3$, $y = 2x$ et $z = 3y$, quelle est la valeur de z ?

- (A) 8 (B) 9 (C) 6 (D) 18 (E) 15

2. Comme on le voit dans la figure ci-contre, un cube a 12 arêtes. Combien d'arêtes une pyramide à base carrée a-t-elle ?

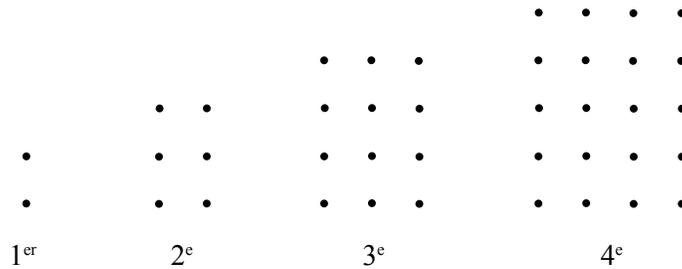
- (A) 6 (B) 12 (C) 8
(D) 4 (E) 10



3. Quelle est la valeur de l'expression $\frac{20 + 16 \times 20}{20 \times 16}$?

- (A) 20 (B) 276 (C) 21 (D) $\frac{9}{4}$ (E) $\frac{17}{16}$

4. Un *nombre oblong* est le nombre de points dans un tableau rectangulaire de points dont le nombre de rangées est un de plus que le nombre de colonnes. Les quatre premiers nombres oblongs sont 2, 6, 12 et 20. Ils sont représentés ci-dessous :

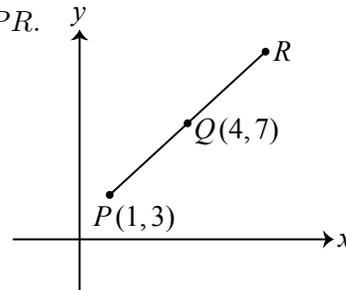


Quel est le 7^e nombre oblong ?

- (A) 42 (B) 49 (C) 56 (D) 64 (E) 72

5. Dans la figure ci-contre, le point Q est le milieu de PR . Quelles sont les coordonnées de R ?

- (A) (2, 5) (B) (7, 11) (C) (6, 9)
(D) (8, 10) (E) (9, 15)



6. Carrine envoie à son frère cinq textos chaque samedi et cinq textos chaque dimanche. Chaque autre jour de la semaine, elle envoie deux textos à son frère. Dans l'espace de quatre semaines complètes, combien de textos Carrine envoie-t-elle à son frère ?

- (A) 15 (B) 28 (C) 60 (D) 80 (E) 100

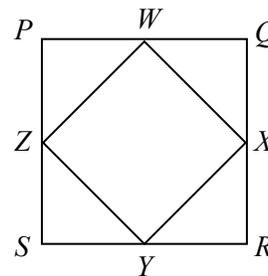
7. Quelle est la valeur de l'expression $(-2)^3 - (-3)^2$?

- (A) -17 (B) 1 (C) -12 (D) 0 (E) -1

8. Si $\sqrt{25 - \sqrt{n}} = 3$, quelle est la valeur de n ?
 (A) 4 (B) 16 (C) 64 (D) 484 (E) 256

9. Sachant que $x\%$ de 60 est égal à 12, quelle est la valeur de 15% de x ?
 (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 4 (D) 3 (E) 9

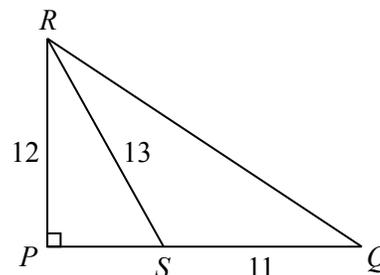
10. Dans la figure ci-contre, le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 2. Les points W, X, Y et Z sont les milieux des côtés du carré $PQRS$. Quel est le rapport de l'aire du carré $WXYZ$ à l'aire du carré $PQRS$?



- (A) 1 : 2 (B) 2 : 1 (C) 1 : 3
 (D) 1 : 4 (E) $\sqrt{2} : 2$

Partie B (6 points par bonne réponse)

11. Dans la figure ci-contre, le triangle PQR est rectangle en P et $PR = 12$. Le point S est situé sur PQ de manière que $SQ = 11$ et $SR = 13$. Quel est le périmètre du triangle QRS ?



- (A) 47 (B) 44 (C) 30
 (D) 41 (E) 61

12. Parmi les diviseurs positifs de 128, combien sont des carrés parfaits supérieurs à 1 ?

- (A) 2 (B) 5 (C) 1 (D) 3 (E) 4

13. Les nombres $4x, 2x - 3$ et $4x - 3$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Quelle est la valeur de x ?

(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7, 9 sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.)

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $-\frac{4}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$ (E) $-\frac{3}{4}$

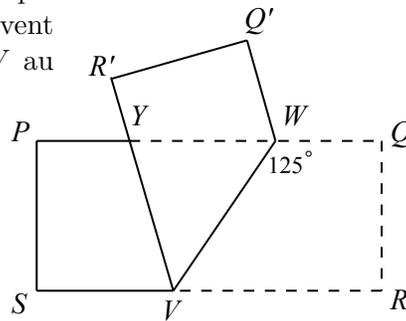
14. On considère des entiers a et b avec $4 < a < b < 22$. Si les nombres 4, a, b et 22 ont une moyenne de 13, combien y a-t-il de couples (a, b) possibles ?

- (A) 10 (B) 8 (C) 7 (D) 9 (E) 6

15. Hichem parcourt 16 km à la course en 1,5 heure. Il parcourt les 10 premiers kilomètres à une vitesse moyenne de 12 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne dans les 6 derniers kilomètres ?

- (A) 8 km/h (B) 9 km/h (C) 10 km/h (D) 6 km/h (E) 12 km/h

16. Sachant que $x = 18$ est une des solutions de l'équation $x^2 + 12x + c = 0$, quelle est l'autre solution?
 (A) $x = 216$ (B) $x = -6$ (C) $x = -30$ (D) $x = 30$ (E) $x = -540$
17. On place n points à égales distances sur un cercle et ces points sont nommés, dans l'ordre, au moyen des entiers de 1 à n . On dit que deux points sont *diamétralement opposés* si le segment de droite qui les joint est un diamètre du cercle. Sachant que les points 7 et 35 sont diamétralement opposés, quelle est la valeur de n ?
 (A) 54 (B) 55 (C) 56 (D) 57 (E) 58
18. Sachant que x et y vérifient les équations $\frac{x-y}{x+y} = 9$ et $\frac{xy}{x+y} = -60$, quelle est la valeur de l'expression $(x+y) + (x-y) + xy$?
 (A) 210 (B) -150 (C) 14160 (D) -14310 (E) -50
19. À l'école secondaire Pouliot, n élèves sont membres du club de maths. Lorsque madame Germain tente de placer les n élèves en groupes de 4, elle peut former un nombre de groupes complets, mais il reste un groupe de moins de 4 élèves. Lorsqu'elle tente de placer les n élèves en groupes de 3, elle réussit à former 3 groupes complets de plus qu'il y avait de groupes complets de 4 et il reste encore un groupe incomplet. Lorsqu'elle tente de placer les n élèves en groupes de 2, elle réussit à former 5 groupes complets de plus qu'il y avait de groupes complets de 3 et il reste encore un groupe incomplet. Quelle est la somme des chiffres de l'entier égal à $n^2 - n$?
 (A) 11 (B) 12 (C) 20 (D) 13 (E) 10
20. Dans la figure ci-contre, $PQRS$ représente une feuille de papier de forme rectangulaire. La feuille est pliée le long de la ligne VW de manière que $\angle VWQ = 125^\circ$. Lorsque la feuille pliée est aplatie, les coins R et Q se retrouvent aux points respectifs R' et Q' et $R'V$ traverse PW au point Y . Quelle est la mesure de l'angle PYV ?
 (A) 110° (B) 100° (C) 95°
 (D) 105° (E) 115°



Partie C (8 points par bonne réponse)

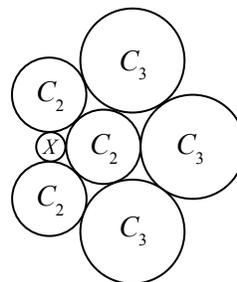
21. La boîte 1 contient une bille dorée et une bille noire. La boîte 2 contient une bille dorée et deux billes noires. La boîte 3 contient une bille dorée et trois billes noires. Lorsqu'on prend une bille au hasard dans une des boîtes, chaque bille de cette boîte a les mêmes chances d'être choisie. On prend une bille au hasard dans la boîte 1 et on la dépose dans la boîte 2. On prend ensuite une bille au hasard dans la boîte 2 et on la dépose dans la boîte 3. Enfin, on prend une bille au hasard dans la boîte 3. Quelle est la probabilité pour que la bille choisie dans la boîte 3 soit dorée ?

(A) $\frac{11}{40}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{13}{40}$ (D) $\frac{7}{20}$ (E) $\frac{3}{8}$

22. Sachant que x et y sont des nombres réels, quelle est la valeur minimale possible de l'expression $(x + 3)^2 + 2(y - 2)^2 + 4(x - 7)^2 + (y + 4)^2$?

(A) 172 (B) 65 (C) 136 (D) 152 (E) 104

23. Sept pièces de monnaie de trois différentes grandeurs sont placées à plat sur une table, comme dans la figure ci-contre. Chaque pièce, à l'exception de celle au centre, touche à exactement trois autres pièces. La pièce au centre touche à toutes les autres pièces. Sachant que les pièces C_3 ont un rayon de 3 cm et que les pièces C_2 ont un rayon de 2 cm, alors le rayon de la pièce X est plus près de :



(A) 0,615 cm (B) 0,620 cm (C) 0,610 cm
(D) 0,605 cm (E) 0,625 cm

24. Étant donné un nombre réel x , l'expression $\lfloor x \rfloor$ représente le plus grand entier inférieur ou égal à x . Par exemple, $\lfloor 4,2 \rfloor = 4$ et $\lfloor 0,9 \rfloor = 0$. S représente la somme de tous les entiers k ($1 \leq k \leq 999\,999$) qui sont divisibles par $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$. Quelle est la valeur de S ?

(A) 999 500 000 (B) 999 000 000 (C) 999 999 000
(D) 998 999 500 (E) 998 500 500

25. L'ensemble $A = \{1, 2, 3, \dots, 2044, 2045\}$ contient 2045 éléments. On dit qu'un sous-ensemble S de A est *sans-triple* si aucun élément de S est égal à trois fois un autre élément de S . Par exemple, le sous-ensemble $\{1, 2, 4, 5, 10, 2043\}$ est sans-triple, mais le sous-ensemble $\{1, 2, 4, 5, 10, 681, 2043\}$ n'est pas sans-triple. Les sous-ensembles sans-triple de A qui contiennent le plus grand nombre d'éléments contiennent exactement 1535 éléments. Il existe n sous-ensembles sans-triple de A qui contiennent exactement 1535 éléments. L'entier n peut être écrit sous la forme $p^a q^b$, p et q étant des nombres premiers distincts et a et b étant des entiers strictement positifs. Soit $N = p^2 + q^2 + a^2 + b^2$. Les trois derniers chiffres de N sont :

(A) 202 (B) 102 (C) 302 (D) 402 (E) 502



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2016! Chaque année, plus de 220 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Hypatie
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^e et 12^e année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours