Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2016

le mardi 12 avril 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

©2016 University of Waterloo

1. (a) La moyenne est égale à :

$$\frac{5+15+25+35+45+55}{6} = \frac{(5+55)+(15+45)+(25+35)}{6} = \frac{60+60+60}{6} = 30$$

(b) Puisque $x^2 = 2016$, alors : $(x+2)(x-2) = x^2 - 4 = 2016 - 4 = 2012$

(c) Puisque les points P, Q et R sont situés sur une même droite, alors la pente de PQ est égale à la pente de PR.
Or, la pente de PQ est égale à $\dfrac{2a-5}{a-7}$ et la pente de PR est égale à $\dfrac{30-5}{12-7}$, ou $\dfrac{25}{5}$, ou 5.
Donc $\dfrac{2a-5}{a-7} = 5$, d'où $2a - 5 = 5(a-7)$.
Cette équation devient $2a - 5 = 5a - 35$, d'où $3a = 30$. Donc $a = 10$.

2. (a) Puisque $\dfrac{n}{9} = \dfrac{25}{n}$, alors $n^2 = 25(9)$, ou $n^2 = 225$. Donc $n = 15$ ou $n = -15$.
On vérifie par substitution que ces valeurs satisfont à l'équation donnée. Donc, les valeurs de n sont 15 et -15.

(b) L'équation $(x-3)(x-2) = 6$ devient $x^2 - 5x + 6 = 6$, ou $x^2 - 5x = 0$, ou $x(x-5) = 0$.
Donc $x = 0$ ou $x = 5$.
On vérifie par substitution que ces valeurs satisfont à l'équation donnée. Les valeurs de x sont donc 0 et 5.

(c) Soit p le cout d'une pomme, en dollars, et b le cout d'une banane, en dollars.
D'après l'énoncé, $2p = 3b$ et $6p + 12b = 6{,}30$.
Puisque $3b = 2p$, alors $12b = 4(3b) = 4(2p) = 8p$.
L'équation $6p + 12b = 6{,}30$ devient donc $6p + 8p = 6{,}3$ ou $14p = 6{,}3$, ou $p = 0{,}45$.
Une pomme coute donc 0,45 \$.

3. (a) *Solution 1*
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors les angles des triangles ABD, FBG et CBE ont une somme de $3 \cdot 180°$, ou 540°.
Les neuf angles de ces triangles comprennent ceux ayant des mesures de p, q, r, s, t et u degrés, ainsi que les angles ABD, FBG et CBE.
Ces trois angles forment un angle plat et leurs mesures ont donc une somme de 180°.
Les mesures des six autres angles ont donc une somme de $540° - 180°$, ou 360°.
Donc $p + q + r + s + t + u = 360$.

Solution 2
Dans les trois triangles suivants, les mesures des angles ont une somme de 180°.
D'après le triangle ABD, on a $\angle ABD = 180° - p° - q°$.
D'après le triangle FBG, on a $\angle FBG = 180° - r° - s°$.
D'après le triangle CBE, on a $\angle CBE = 180° - t° - u°$.
Puisque l'angle ABC est plat, alors :

$$\angle ABD + \angle FBG + \angle CBE = 180°$$

Donc :

$$(180° - p° - q°) + (180° - r° - s°) + (180° - t° - u°) = 180°$$

On simplifie pour obtenir $360 = p + q + r + s + t + u$. L'expression $p + q + r + s + t + u$ a donc une valeur de 360.

(b) *Solution 1*

Pour écrire 10^{20} en notation régulière, on écrit le chiffre 1 suivi de 20 fois le chiffre 0.
Pour écrire $10^{20} - 1$ en notation régulière, on écrit donc 20 fois le chiffre 9.
Or, le nombre $n = 10^{20} - 20$ est 19 de moins que le nombre $10^{20} - 1$ qui s'écrit au moyen de 20 fois le chiffre 9.
Donc $n = 10^{20} - 20 = 99 \cdots 980$, le chiffre 9 paraissant 18 fois.
La somme des chiffres de ce nombre n est donc égale à $18(9) + 8 + 0$, ou $162 + 8$, ou 170.

Solution 2

Puisque $10^{20} - 20 = 10(10^{19} - 2)$ et que $10^{19} - 2 = 99 \cdots 98$ (le chiffre 9 paraissant 18 fois), alors $10^{20} - 20 = 99 \cdots 980$, le chiffre 9 paraissant 18 fois.
La somme des chiffres de n est donc égale à $18(9) + 8 + 0$, ou $162 + 8$, ou 170.

(c) *Solution 1*

Puisqu'on a $P(2, 0)$ et $Q(8, 0)$, alors $PQ = 8 - 2$, ou $PQ = 6$.
Soit h la hauteur de S par rapport à PQ dans le triangle SPQ.
L'aire du triangle SPQ est donc égale à $\frac{1}{2}(PQ)h$.
Puisque ce triangle a une aire de 12, alors $\frac{1}{2}(PQ)h = 12$. Donc $\frac{1}{2}(6)h = 12$, d'où $h = 4$.
Puisque S est situé en dessous de l'axe des abscisses, S a donc pour ordonnée -4.
Puisque S est le sommet de la parabole et que celle-ci coupe l'axe des abscisses aux points P et Q, l'abscisse de S est égale à la moyenne des abscisses de P et Q, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(2 + 8)$, ou 5.
Donc, S a pour coordonnées $(5, -4)$.

Solution 2

Puisque la parabole coupe l'axe des abscisses en $P(2, 0)$ et $Q(8, 0)$, la parabole est définie par une équation de la forme $y = a(x - 2)(x - 8)$, a étant un nombre quelconque, $a \neq 0$.
On complète le carré pour obtenir :

$$y = a(x^2 - 10x + 16) = a((x - 5)^2 - 9) = a(x - 5)^2 - 9a$$

L'équation canonique $y = a(x - 5)^2 - 9a$ indique que la parabole a pour sommet $(5, -9a)$.
Puisque le sommet est situé en dessous de l'axe des abscisses, alors $-9a < 0$, d'où $a > 0$.
Le triangle SPQ a une base PQ sur l'axe des abscisses et cette base a une longueur égale à $8 - 2$, ou 6.
La hauteur correspondante est égale à la distance du sommet S jusqu'à l'axe des abscisses.
Elle est égale à $9a$, car $a > 0$.
Puisque le triangle SPQ a une aire de 12, alors $\frac{1}{2}(6)(9a) = 12$, d'où $27a = 12$, ou $a = \frac{4}{9}$.
On reporte $a = \frac{4}{9}$ dans $(5, -9a)$, ce qui donne les coordonnées de S, soit $(5, -4)$.

4. (a) On récrit $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = \frac{7}{4}$ sous la forme $(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + \cos^2\theta = \frac{7}{4}$.
Puisque $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ pour tout angle θ, l'équation devient $1 + \cos^2\theta = \frac{7}{4}$, d'où $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$, ou $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Puisque $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, alors $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ lorsque $\theta = 30^\circ$.
Puisque $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, alors $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ lorsque $\theta = 150^\circ$.
Donc $\theta = 30^\circ$ ou $\theta = 150^\circ$.
On vérifie ces valeurs par substitution. Les valeurs de θ sont donc 30° et 150°.

(b) Soit r cm le rayon du petit cercle et R cm celui du grand cercle.
Le petit cercle a donc une circonférence de $2\pi r$ cm et une aire de πr^2 cm^2, tandis que le grand cercle a une circonférence de $2\pi R$ cm et une aire de πR^2 cm^2.
Puisque les rayons des deux cercles ont une somme de 10 cm, alors $r + R = 10$.
Puisque la circonférence du grand cercle a 3 cm de plus que celle du petit cercle, alors $2\pi R - 2\pi r = 3$, ou $2\pi(R - r) = 3$.
La différence, en cm^2, entre l'aire du grand cercle et celle du petit cercle est donc égale à :

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R - r)(R + r) = \tfrac{1}{2}[2\pi(R - r)](R + r) = \tfrac{1}{2}(3)(10) = 15$$

Elle est donc égale à 15 cm^2.

5. (a) Lorsque le prix de p \$ est augmenté de n %, le prix est multiplié par $1 + \dfrac{n}{100}$.
Lorsque le nouveau prix est diminué de 20 %, le nouveau prix est multiplié par $1 - \dfrac{20}{100}$, c'est-à-dire par $\dfrac{80}{100}$.
À la suite des deux ajustements, le prix en solde est égal à $p\left(1 + \dfrac{n}{100}\right)\left(\dfrac{80}{100}\right)$ \$.
Or selon l'énoncé, le prix en solde est 20 % de plus que p \$. Il est donc égal à $p\left(1 + \dfrac{20}{100}\right)$ \$, ou $p\left(\dfrac{120}{100}\right)$ \$.
On a donc :

$$p\left(1 + \frac{n}{100}\right)\left(\frac{80}{100}\right) \$ = p\left(\frac{120}{100}\right) \$$$

Sachant que $p \neq 0$, on simplifie pour obtenir $80\left(1 + \dfrac{n}{100}\right) = 120$.
On a donc $1 + \dfrac{n}{100} = \dfrac{120}{80}$, ou $1 + \dfrac{n}{100} = \dfrac{3}{2}$, ou $1 + \dfrac{n}{100} = \dfrac{150}{100}$. On a donc $\dfrac{n}{100} = \dfrac{50}{100}$, d'où $n = 50$.

(b) *Solution 1*
Soit $m = f(n)$. L'équation $f(f(n)) = 3$ devient $f(m) = 3$.
Supposons que $f(m) = 3$ et que m est impair.
Selon la définition, l'équation $f(m) = 3$ devient $m - 1 = 3$, d'où $m = 4$. Or, ce résultat contredit la supposition que m est impair. Cette supposition ne peut donc pas se réaliser.
Supposons que $f(m) = 3$ et que m est pair.
Selon la définition, l'équation $f(m) = 3$ devient $m^2 - 1 = 3$, d'où $m^2 = 4$. Donc $m = \pm 2$, chaque solution étant un nombre pair.
Donc si $f(f(n)) = 3$, alors $f(n) = 2$ ou $f(n) = -2$.
Supposons que $f(n) = 2$ ou $f(n) = -2$ et que n est impair.
Selon la définition, l'équation $f(n) = 2$ devient $n - 1 = 2$ (d'où $n = 3$) et l'équation $f(n) = -2$ devient $n - 1 = -2$ (d'où $n = -1$). Chacune de ces valeurs de n est impaire.
Supposons que $f(n) = 2$ ou $f(n) = -2$ et que n est pair.
Selon la définition, l'équation $f(n) = 2$ devient $n^2 - 1 = 2$ et l'équation $f(n) = -2$ devient $n^2 - 1 = -2$. On a donc $n^2 = 3$ ou $n^2 = -1$. Aucune de ces équation n'admet une solution entière.
Les entiers n pour lesquels $f(f(n)) = 3$ sont $n = 3$ et $n = -1$.
On vérifie que ces valeurs satisfont à l'équation donnée.

Solution 2
On considère séparément le cas où n est pair et le cas où n est impair.

Supposons que n est pair.
Donc, n^2 est pair et $f(n) = n^2 - 1$ doit être impair.
On a $f(f(n)) = f(n^2 - 1) = (n^2 - 1) - 1 = n^2 - 2$, puisque $f(m) = m - 1$ lorsque m est impair.
Si n est impair et $f(f(n)) = 3$, on doit avoir $n^2 - 2 = 3$, ou $n^2 = 5$.
Cette équation n'admet aucune solution entière. Donc, l'équation donnée n'admet aucune solution dans ce cas.

Supposons que n est impair.
Donc, $f(n) = n - 1$ doit être pair.
On a $f(f(n)) = f(n - 1) = (n - 1)^2 - 1 = n^2 - 2n + 1 - 1 = n^2 - 2n$.
Si n est impair et $f(f(n)) = 3$, on doit avoir $n^2 - 2n = 3$, ou $n^2 - 2n - 3 = 0$.
Sous forme factorisée, l'équation devient $(n - 3)(n + 1) = 0$. Donc $n = 3$ ou $n = -1$. Ces deux solutions sont des nombres impairs.

Les entiers n pour lesquels $f(f(n)) = 3$ sont $n = 3$ et $n = -1$.
On vérifie que ces valeurs satisfont à l'équation donnée.

6. (a) Puisque $10^y \neq 0$, l'équation $\dfrac{1}{32} = \dfrac{x}{10^y}$ est équivalente à l'équation $10^y = 32x$.
Pour résoudre ce problème, on cherche donc le plus petit entier strictement positif x pour lequel $32x$ est égal à une puissance de 10, l'exposant étant un entier strictement positif.
Or, $32 = 2^5$ et on a donc $32x = 2^5x$.
Pour que $32x$ soit une puissance de 10, chaque facteur 2 doit être accompagné d'un facteur 5.
Donc x doit être divisible par 5^5 (c'est-à-dire que x doit avoir au moins 5 fois le nombre 5 dans sa factorisation première). Donc $x \geq 5^5 = 3125$.
Or $32(5^5) = 2^5 5^5 = 10^5$. Si $x = 5^5 = 3125$, alors $32x$ est bien une puissance de 10, car il est égal à 10^5.
La plus petite valeur de x pour laquelle $\dfrac{1}{32} = \dfrac{x}{10^y}$, y étant un entier strictement positif quelconque est $x = 5^5$, ou $x = 3125$.

(b) *Solution 1*
Puisque les longueurs des trois côtés du triangle rectangle forment une suite arithmétique et qu'un des côtés a une longueur de 60, les trois longueurs doivent être $60, 60 + d, 60 + 2d$ ou $60 - d, 60, 60 + d$ ou $60 - 2d, 60 - d, 60$, d étant un nombre non nul.

Si un triangle rectangle a des côtés de longueurs $60, 60 + d$ et $60 + 2d$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} 60^2 + (60 + d)^2 &= (60 + 2d)^2 \\ 3600 + 3600 + 120d + d^2 &= 3600 + 240d + 4d^2 \\ 0 &= 3d^2 + 120d - 3600 \\ 0 &= d^2 + 40d - 1200 \\ 0 &= (d + 60)(d - 20) \end{aligned}$$

(Puisque $d \geq 0$, alors $60 + 2d$ représente la longueur de l'hypoténuse du triangle.)
Puisque $d \geq 0$, alors $d = 20$. On a le triangle avec des côtés de longueurs $60, 80$ et 100.
La grandeur la plus longue est celle de l'hypoténuse et les deux autres sont celles des cathètes qui sont perpendiculaires. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}(60)(80)$, ou 2400.

Si un triangle rectangle a des côtés de longueurs $60-d, 60$ et $60+d$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}(60-d)^2+60^2&=(60+d)^2\\ 3600-120d+d^2+3600&=3600+120d+d^2\\ 3600&=240d\\ d&=15\end{aligned}$$

Puisque $d \geq 0$, alors $d=15$ est admissible. On a le triangle avec des côtés de longueurs $45, 60$ et 75.
On procède comme ci-haut et l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(45)(60)$, ou 1350.

Si un triangle rectangle a des côtés de longueurs $60-2d, 60-d$ et 60, alors d'après le théorème de Pythagore, on a les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}(60-2d)^2+(60-d)^2&=60^2\\ 3600-240d+4d^2+3600-120d+d^2&=3600\\ 5d^2-360d+3600&=0\\ d^2-72d+720&=0\\ (d-60)(d-12)&=0\end{aligned}$$

Puisque $d \geq 0$, alors $d=60$ ou $d=12$. Avec $d=60$, on obtient des longueurs de côtés $-60, 0$ et 60, qui ne forment pas un triangle. Avec $d=12$, on obtient des longueurs de côtés $36, 48$ et 60 qui forment un triangle.
On procède comme ci-haut et l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(36)(48)$, ou 864.

Les aires possibles de ces triangles sont 2400, 1350 et 864.

Solution 2
On considère un triangle rectangle dont les longueurs de côtés forment une suite arithmétique.
Soit $a-d, a$ et $a+d$ ces longueurs, où $a>0$ et $d \geq 0$.
On remarque que $a-d \leq a \leq a+d$.
Puisque le triangle est rectangle, alors d'après le théorème de Pythagore, les équations équivalentes suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned}(a-d)^2+a^2&=(a+d)^2\\ a^2-2ad+d^2+a^2&=a^2+2ad+d^2\\ a^2&=4ad\end{aligned}$$

Puisque $a>0$, alors $a=4d$. Les longueurs $a-d$, a et $a+d$ deviennent donc $3d$, $4d$ et $5d$, d étant un nombre réel quelconque, $d \geq 0$.
(On remarque que ces triangles sont tous semblables au triangle remarquable 3-4-5.)
Puisqu'un des côtés a une longueur de 60, on a une des possibilités suivantes :

(i) $3d=60$: Donc $d=20$ et les côtés ont pour longueurs $60, 80$ et 100.
Le triangle a une hypoténuse de longueur 100 et des cathètes perpendiculaires de longueurs 60 et 80. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(60)(80)$, ou 2400.

(ii) $4d=60$: Donc $d=15$ et les côtés ont pour longueurs $45, 60$ et 75.
On procède comme ci-haut. L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(45)(60)$, ou 1350.

(iii) $5d=60$: Donc $d=12$ et les côtés ont pour longueurs $36, 48$ et 60.
On procède comme ci-haut. L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(36)(48)$, ou 864.

Les aires possibles de ces triangles sont 2400, 1350 et 864.

7. (a) *Solution 1*

Supposons qu'Amrita parcourt p km en kayak et n km à la nage.
Puisqu'Amrita laisse le kayak sur place et qu'il ne bouge pas, alors Zénon parcourt p km à la nage et n km en kayak.
On sait que chacun pagaie à une vitesse de 7 km/h, chacun nage à une vitesse de 2 km/h et chacun met 90 minutes (ou 1,5 heure) pour traverser le lac.
Si $n < p$, alors Amrita pagaie sur une plus grande distance que Zénon et nage sur une plus petite distance que lui.
Si $n > p$, alors Zénon pagaie sur une plus grande distance qu'Amrita et nage sur une plus petite distance qu'elle.
Puisque chacun met 90 minutes pour compléter la traversée, on doit avoir $n = p$.
On pourrait aussi considérer que puisque chacun pagaie à une vitesse de 7 km/h, chacun nage à une vitesse de 2 km/h et que chacun met 90 minutes (ou 1,5 heure) pour compléter la traversée, alors on a les équations suivantes :

$$\frac{p}{7} + \frac{n}{2} = 1{,}5 \qquad \frac{p}{2} + \frac{n}{7} = 1{,}5$$

Puisque les deux membres de droite sont égaux, on a :

$$\begin{aligned} \frac{p}{7} + \frac{n}{2} &= \frac{n}{7} + \frac{p}{2} \\ \frac{n}{2} - \frac{n}{7} &= \frac{p}{2} - \frac{p}{7} \\ n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) &= p\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7}\right) \\ n &= p \end{aligned}$$

Donc $\frac{p}{7} + \frac{p}{2} = 1{,}5$ ou $\frac{9}{14}p = 1{,}5 = \frac{3}{2}$, d'où $p = \frac{7}{3}$.
Amrita pagaie cette distance de $\frac{7}{3}$ km à une vitesse de 7 km/h.
Pour le faire, elle met $\frac{7/3}{7}$ heure, ou $\frac{1}{3}$ heure, ou 20 minutes.
Zénon nage sur cette distance de $\frac{7}{3}$ km à une vitesse de 2 km/h.
Pour le faire, il met $\frac{7/3}{2}$ heure, ou $\frac{7}{6}$ heure, ou 70 minutes.
Le kayak n'est pas utilisé à partir du moment où Amrita cesse de pagayer jusqu'au moment où Zénon cesse de nager, soit une période de $(70 - 20)$ minutes, ou 50 minutes.

Solution 2

Soit t_1 heures le temps pendant lequel Amrita pagaie et Zénon nage.
Soit t_2 heures le temps pendant lequel Amrita nage et Zénon nage (le kayak ne bouge pas pendant ce temps).
Soit t_3 heures le temps pendant lequel Amrita nage et Zénon pagaie.
Soit d km la longueur de la traversée.
Puisqu'Amrita pagaie à une vitesse de 7 km/h et nage à une vitesse de 2 km/h, alors $7t_1 + 2t_2 + 2t_3 = d$.
Puisque Zénon pagaie à une vitesse de 7 km/h et nage à une vitesse de 2 km/h, alors $2t_1 + 2t_2 + 7t_3 = d$.
Puisque le kayak bouge à une vitesse de 7 km/h et qu'il ne bouge pas lorsqu'Amrita et

Zénon nagent tous les deux, alors $7t_1 + 0t_2 + 7t_3 = d$.
Puisqu'Amrita et Zénon mettent chacun 90 minutes ($\frac{3}{2}$ heure) pour traverser le lac, alors $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3}{2}$.
D'après les équations $7t_1 + 2t_2 + 2t_3 = d$ et $2t_1 + 2t_2 + 7t_3 = d$, on obtient
$7t_1 + 2t_2 + 2t_3 = 2t_1 + 2t_2 + 7t_3$, ou $5t_1 = 5t_3$, d'où $t_1 = t_3$.
Puisque $7t_1+2t_2+2t_3 = d$ et $7t_1+0t_2+7t_3 = d$ et $t_1 = t_3$, alors $7t_1+2t_2+2t_1 = 7t_1+7t_1$, ou $2t_2 = 5t_1$, d'où $t_2 = \frac{5}{2}t_1$.

Puisque $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3}{2}$, alors $t_1 + \frac{5}{2}t_1 + t_1 = \frac{3}{2}$, ou $\frac{9}{2}t_1 = \frac{3}{2}$, ou $t_1 = \frac{1}{3}$.

Donc $t_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3}$ heure, ou $t_2 = \frac{5}{6}$ heure (ou 50 minutes).

Le kayak ne bouge pas pendant $\frac{5}{6}$ heure.

(b) D'après la première équation, $x\left(\frac{1}{2} + y - 2x^2\right) = 0$, on a $x = 0$ ou $\frac{1}{2} + y - 2x^2 = 0$.
D'après la deuxième équation, $y\left(\frac{5}{2} + x - y\right) = 0$, on a $y = 0$ ou $\frac{5}{2} + x - y = 0$.

Si $x = 0$, la première équation donnée est vérifiée.
Dans ce cas, d'après la deuxième équation donnée, on a $y = 0$ (ce qui donne la solution $(0, 0)$) ou $\frac{5}{2} + 0 - y = 0$ qui devient $y = \frac{5}{2}$ (ce qui donne la solution $(0, \frac{5}{2})$).

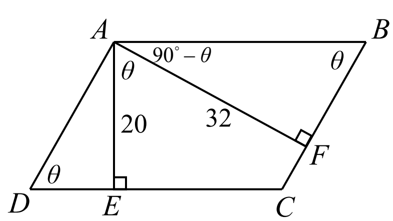
Si $y = 0$, la deuxième équation donnée est vérifiée.
Dans ce cas, d'après la première équation donnée, on a $x = 0$ (ce qui donne la solution $(0, 0)$) ou $\frac{1}{2} + 0 - 2x^2 = 0$ qui devient $x^2 = \frac{1}{4}$, ou $x = \pm\frac{1}{2}$ (ce qui donne les solutions $(\frac{1}{2}, 0)$ et $(-\frac{1}{2}, 0)$).

Jusqu'à maintenant, on a déterminé toutes les solutions pour lesquelles $x = 0$ ou $y = 0$.
Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, le système d'équations est vrai si $\frac{1}{2} + y - 2x^2 = 0$ et $\frac{5}{2} + x - y = 0$ (ou $1 + 2y - 4x^2 = 0$ et $5 + 2x - 2y = 0$).
On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $6 + 2x - 4x^2 = 0$.
Cette équation est équivalente à $2x^2 - x - 3 = 0$, ou $(2x - 3)(x + 1) = 0$, dont les solutions sont $x = \frac{3}{2}$ et $x = -1$.
D'après l'équation $\frac{5}{2} + x - y = 0$, on a $y = x + \frac{5}{2}$.
On reporte $x = \frac{3}{2}$ dans cette équation pour obtenir $y = 4$. On reporte $x = -1$ dans la même équation pour obtenir $y = \frac{3}{2}$.

Les couples (x, y) qui vérifient le système donné sont donc :

$$(0, 0), (0, \tfrac{5}{2}), (\tfrac{1}{2}, 0), (-\tfrac{1}{2}, 0), (\tfrac{3}{2}, 4), (-1, \tfrac{3}{2})$$

8. (a) Soit $\angle EAF = \theta$.
Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, alors AB et DC sont parallèles, $AB = DC$, DA et CB sont parallèles et $DA = CB$.
Puisque AE est perpendiculaire à DC et que AB et DC sont parallèles, alors AE est perpendiculaire à AB.
Donc $\angle EAB = 90^\circ$ et $\angle FAB = 90^\circ - \theta$.
Puisque le triangle AFB est rectangle en F et que $\angle FAB = 90^\circ - \theta$, alors $\angle ABF = \theta$.
De la même manière, on obtient $\angle DAE = 90^\circ - \theta$ et $\angle ADE = \theta$.



Puisque $\cos(\angle EAF) = \cos\theta = \frac{1}{3}$ et $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, alors :

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\tfrac{1}{9}} = \sqrt{\tfrac{8}{9}} = \tfrac{2\sqrt{2}}{3}$$

(On remarque que $\sin\theta > 0$ puisque θ est un angle d'un triangle, ce qui en fait un angle saillant.)

Dans le triangle AFB, $\sin\theta = \dfrac{AF}{AB}$ et $\cos\theta = \dfrac{FB}{AB}$.

Puisque $AF = 32$ et $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, alors $AB = \dfrac{AF}{\sin\theta} = \dfrac{32}{2\sqrt{2}/3} = \dfrac{48}{\sqrt{2}} = 24\sqrt{2}$.

Puisque $AB = 24\sqrt{2}$ et $\cos\theta = \frac{1}{3}$, alors $FB = AB\cos\theta = 24\sqrt{2}(\frac{1}{3}) = 8\sqrt{2}$.

Dans le triangle AED, $\sin\theta = \dfrac{AE}{AD}$ et $\cos\theta = \dfrac{DE}{AD}$.

Puisque $AE = 20$ et $\sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, alors $AD = \dfrac{AE}{\sin\theta} = \dfrac{20}{2\sqrt{2}/3} = \dfrac{30}{\sqrt{2}} = 15\sqrt{2}$.

On a $DE = AD\cos\theta$. Puisque $AD = 15\sqrt{2}$ et $\cos\theta = \frac{1}{3}$, alors $DE = AD\cos\theta$, d'où $DE = 15\sqrt{2}(\frac{1}{3})$, ou $DE = 5\sqrt{2}$.

(Pour déterminer AD et DE, on aurait pu utiliser la similitude des triangles ADE et ABF.)

L'aire du quadrilatère $AECF$ est égale à l'aire du parallélogramme $ABCD$ moins l'aire des triangles AFB et ADE.

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à $AB \cdot AE$, ou $24\sqrt{2} \cdot 20$, ou $480\sqrt{2}$.

L'aire du triangle AFB est égale à $\frac{1}{2}(AF)(FB)$, ou $\frac{1}{2}(32)(8\sqrt{2})$, ou $128\sqrt{2}$.

L'aire du triangle AED est égale à $\frac{1}{2}(AE)(DE)$, ou $\frac{1}{2}(20)(5\sqrt{2})$, ou $50\sqrt{2}$.

L'aire du quadrilatère $AECF$ est donc égale à $480\sqrt{2} - 128\sqrt{2} - 50\sqrt{2}$, ou $302\sqrt{2}$.

(b) On remarque que $x \neq 1$ puisque 1 ne peut être la base d'un logarithme. Donc $\log x \neq 0$.

On utilise d'abord la relation $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$, suivie des autres lois des logarithmes, pour obtenir les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\log_4 x - \log_x 16 &= \tfrac{7}{6} - \log_x 8 \\
\frac{\log x}{\log 4} - \frac{\log 16}{\log x} &= \frac{7}{6} - \frac{\log 8}{\log x} \qquad \text{(on sait que } x \neq 1\text{, d'où } \log x \neq 0\text{)} \\
\frac{\log x}{\log 4} &= \frac{7}{6} + \frac{\log 16 - \log 8}{\log x} \\
\frac{\log x}{\log(2^2)} &= \frac{7}{6} + \frac{\log(\frac{16}{8})}{\log x} \\
\frac{\log x}{2\log 2} &= \frac{7}{6} + \frac{\log 2}{\log x} \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\log x}{\log 2}\right) &= \frac{7}{6} + \frac{\log 2}{\log x}
\end{aligned}$$

Posons $t = \dfrac{\log x}{\log 2} = \log_2 x$. Puisque $x \neq 1$, on a $t \neq 0$. On a donc les équations suivantes qui sont toutes équivalentes aux équations précédentes :

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2} &= \frac{7}{6} + \frac{1}{t} \\
3t^2 &= 7t + 6 \qquad \text{(on a multiplié chaque membre par } 6t\text{)} \\
3t^2 - 7t - 6 &= 0 \\
(3t+2)(t-3) &= 0
\end{aligned}$$

L'équation initiale est équivalente à $t = -\frac{2}{3}$ ou $t = 3$.
Puisque $t = \log_2 x$, on a $\log_2 x = -\frac{2}{3}$ ou $\log_2 x = 3$, d'où $x = 2^{-2/3}$, ou $x = 2^3$.
Les valeurs de x qui vérifient l'équation donnée sont $2^{-2/3}$ et 8.

9. (a) Le nombre de chaines possibles de dix lettres, chaque lettre étant un A ou un B, est égal à 2^{10}, ou 1024, puisqu'il y a 2 choix pour chaque position dans la chaine.
On déterminera le nombre de telles chaines qui ne contiennent pas la sous-chaine $ABBA$ (c.-à-d. qui ne contiennent pas les lettres consécutives $ABBA$) en déterminant le nombre de chaines qui contiennent la sous-chaine $ABBA$ et en soustrayant ce nombre de 1024.
Si une chaine contient la sous-chaine $ABBA$, cette sous-chaine peut se retrouver dans une de 7 positions ($ABBAxxxxxx$, $xABBAxxxxx$, …, $xxxxxxABBA$).
Il y a 2 choix pour chacune des 6 autres lettres d'une telle chaine. La sous-chaine $ABBA$ parait donc $7 \cdot 2^6$ fois, ou 448 fois dans les 1024 chaines.
Or, la sous-chaine $ABBA$ peut paraitre plusieurs fois dans une chaine. (Par exemple, la sous-chaine $ABBA$ parait deux fois dans la chaine $ABBAAAABBA$ et la chaine a été comptée deux fois dans le total.)
On doit donc apporter une correction au total de 448 en tenant compte des cas où $ABBA$ parait plus d'une fois dans une chaine.
La sous-chaine $ABBA$ peut être répétée sans chevauchement de lettres (par exemple, $ABBAABBAxx$) ou avec chevauchement d'une lettre (par exemple, $ABBABBAxxx$).
Seule la chaine $ABBABBABBA$ admet trois présences de la sous-chaine $ABBA$.
Une chaine qui contient deux fois la sous-chaine $ABBA$ avec chevauchement doit être d'une des formes suivantes :

$$ABBABBAxxx \qquad xABBABBAxx \qquad xxABBABBAx \qquad xxxABBABBA$$

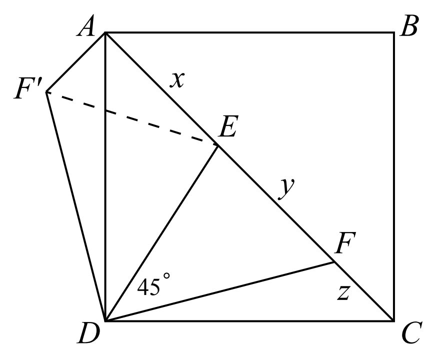
Il y a 4 choix pour la position de $ABBABBA$ dans la chaine et 2 choix pour chacune des autres lettres, pour un total de $4 \cdot 2^3$ chaines, ou 32 chaines de cette sorte.
Or, la chaine $ABBABBABBA$ est comptée dans la première forme et dans la quatrième forme. On doit donc soustraire 2 chaines. Il y a donc 30 chaines qui contiennent la sous-chaine $ABBA$ deux fois avec chevauchement.
Une chaine qui contient deux fois la sous-chaine $ABBA$ sans chevauchement doit être d'une des formes suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
ABBAABBAxx & ABBAxABBAx & ABBAxxABBA \\
xABBAABBAx & xABBAxABBA & xxABBAABBA
\end{array}$$

Il y a 6 formes et 2 choix pour chacune des 2 autres lettres pour un total de $6 \cdot 2^2$ chaines, ou 24 chaines de cette sorte.
Or, la chaine $ABBABBABBA$ est comptée dans la troisième forme. On doit donc soustraire 1 chaine. Il y a donc 23 chaines qui contiennent la sous-chaine $ABBA$ deux fois sans chevauchement.

Il y a donc 30 chaines qui contiennent exactement deux fois la sous-chaine $ABBA$ avec chevauchement, 23 chaines qui contiennent exactement deux fois la sous-chaine $ABBA$ sans chevauchement et 1 chaine qui contient exactement trois fois la sous-chaine $ABBA$.
Pour connaitre le nombre de chaines qui contiennent la sous-chaine $ABBA$ au moins une fois, on considère le nombre de parutions de la sous-chaine $ABBA$ (448), on soustrait le nombre de chaines qui contiennent exactement deux fois la sous-chaine $ABBA$ (puisque celles-ci avaient été comptées deux fois au départ) et on soustrait deux fois le nombre de chaines qui contiennent trois fois la sous-chaine $ABBA$ (puisque celles-ci avaient été comptées trois fois au départ).
On obtient $448 - 23 - 30 - 2 \cdot 1 = 393$. Il y a donc 393 chaines qui contiennent au moins une fois la sous-chaine $ABBA$. Le nombre de chaines de dix lettres qui ne contiennent pas la sous-chaine $ABBA$ est donc égal à $1024 - 393$, ou 631.

(b) *Solution 1*
On fait subir au triangle DFC une rotation de centre D de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Ainsi DA est l'image de DC et F' est l'image de F, comme dans la figure suivante.
On joint F' et E.

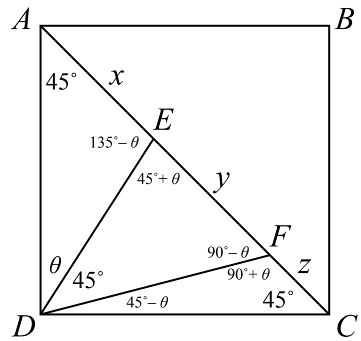


Puisque AC est la diagonale du carré $ABCD$, alors $\angle EAD = \angle FCD = 45°$.
Puisque $\angle EAD = 45°$ et $\angle F'AD = \angle FCD = 45°$, alors $\angle F'AE = 45° + 45°$, ou $\angle F'AE = 90°$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $F'AE$, $(F'E)^2 = (F'A)^2 + (AE)^2$.
Or $F'A = FC = z$ et $AE = x$. Donc $(F'E)^2 = z^2 + x^2$.
Pour démontrer que $y^2 = x^2 + z^2$, il suffit donc de démontrer que $F'E = y$.
On considère les triangles $F'DE$ et FDE.
On sait que $F'D = FD$ et que $\angle F'DA = \angle FDC$ d'après la rotation. De plus, $ED = ED$.
On a $\angle F'DE = \angle F'DA + \angle EDA = \angle FDC + \angle EDA = 90° - \angle EDF = 45°$. Donc $\angle F'DE = \angle FDE = 45°$.
Les triangles $F'DE$ et FDE sont donc isométriques (côté-angle-côté).
Donc $F'E = FE = y$.
Donc $y^2 = x^2 + z^2$.

Solution 2
Puisque AC est la diagonale du carré $ABCD$, alors $\angle EAD = \angle FCD = 45°$.
Soit $\angle ADE = \theta$.
Puisque les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors :

$$\angle AED = 180° - \angle EAD - \angle ADE = 180° - 45° - \theta = 135° - \theta$$

Puisque AEF est un angle plat, alors $\angle DEF = 180° - \angle AED = 180° - (135° - \theta) = 45° + \theta$.
De façon semblable, on obtient $\angle EFD = 90° - \theta$, $\angle DFC = 90° + \theta$ et $\angle FDC = 45° - \theta$.



D'après la loi des sinus dans le triangle AED, on a $\dfrac{AE}{\sin\angle ADE} = \dfrac{ED}{\sin\angle EAD}$, ou $\dfrac{x}{\sin\theta} = \dfrac{ED}{\sin 45^\circ}$.

D'après la loi des sinus dans le triangle DEF, on a $\dfrac{EF}{\sin\angle EDF} = \dfrac{ED}{\sin\angle EFD}$, ou $\dfrac{y}{\sin 45^\circ} = \dfrac{ED}{\sin(90^\circ - \theta)}$.

D'après la loi des sinus dans le triangle DEF, on a $\dfrac{EF}{\sin\angle EDF} = \dfrac{FD}{\sin\angle DEF}$, ou $\dfrac{y}{\sin 45^\circ} = \dfrac{FD}{\sin(45^\circ + \theta)}$.

D'après la loi des sinus dans le triangle DFC, on a $\dfrac{FC}{\sin\angle FDC} = \dfrac{FD}{\sin\angle DCF}$, ou $\dfrac{z}{\sin(45^\circ - \theta)} = \dfrac{FD}{\sin 45^\circ}$.

On divise la première de ces équations par la deuxième, membre par membre, pour obtenir $\dfrac{x\sin 45^\circ}{y\sin\theta} = \dfrac{\sin(90^\circ - \theta)}{\sin 45^\circ}$, ou $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\sin(90^\circ - \theta)\sin\theta}{\sin^2 45^\circ}$.

On divise la quatrième de ces équations par la troisème, membre par membre, pour obtenir $\dfrac{z\sin 45^\circ}{y\sin(45^\circ - \theta)} = \dfrac{\sin(45^\circ + \theta)}{\sin 45^\circ}$, ou $\dfrac{z}{y} = \dfrac{\sin(45^\circ + \theta)\sin(45^\circ - \theta)}{\sin^2 45^\circ}$.

Puisque $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ pour tout angle α, alors $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$.

De plus, $\sin(45^\circ + \theta) = \sin(90^\circ - (45^\circ - \theta)) = \cos(45^\circ - \theta)$.

On sait aussi que $\dfrac{1}{\sin^2 45^\circ} = \dfrac{1}{(1/\sqrt{2})^2} = 2$.

Les expressions pour $\dfrac{x}{y}$ et $\dfrac{z}{y}$ ci-haut deviennent donc

$$\frac{x}{y} = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$$

et

$$\frac{z}{y} = 2\cos(45^\circ - \theta)\sin(45^\circ - \theta) = \sin(2(45^\circ - \theta)) = \sin(90^\circ - 2\theta) = \cos 2\theta.$$

On a donc :

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{z^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 = \sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$$

Puisque $\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{z^2}{y^2} = 1$, alors $x^2 + z^2 = y^2$, ce qu'il fallait démontrer.

10. (a) On a $k = 10$ et il y a donc 10 boules dans chaque sac.
On peut donc choisir $10 \cdot 10$ paires de boules, ou 100 paires de boules en choisissant une boule dans chaque sac. Ces 100 choix sont équiprobables.
Soit a le numéro de la boule qui vient du premier sac et b le numéro de la boule qui vient du deuxième sac. Pour déterminer $P(10)$, on doit compter le nombre m de couples (a, b) dont le produit ab est divisible par 10.
On aura alors $P(10) = \dfrac{m}{100}$.
Pour que ab soit divisible par 10, il faut qu'au moins un des nombres a et b soit un multiple de 5 et qu'au moins un des nombres a et b soit pair.
Si $a = 10$ ou $b = 10$, le couple (a, b) donne un produit ab qui est divisible par 10.
Il y a alors 19 couples favorables :

$$(a, b) = (1, 10), (2, 10), \ldots, (9, 10), (10, 10), (10, 9), \ldots, (10, 2),(10, 1)$$

Si ni a ni b n'est égal à 10, il faut que $a = 5$ ou $b = 5$ pour qu'au moins un des nombres a et b soit un multiple de 5. Dans ce cas, l'autre nombre, a ou b, doit être pair et pas égal à 10. (On a déjà compté les cas où $a = 10$ ou $b = 10$.)
Il y a alors 8 couples favorables :

$$(a, b) = (5, 2), (5, 4), (5, 6), (5, 8), (2, 5), (4, 5), (6, 5), (8, 5)$$

Il n'y a aucun autre couple (a, b) favorable pour lequel ab est divisible par 10.
Il y a donc 27 couples favorables $(19 + 8 = 27)$. Donc $P(10) = \frac{27}{100}$.
(On aurait pu créer un tableau 10 sur 10 qui indique toutes les combinaisons possibles de a et de b, ainsi que les produits ab correspondants, pour compter les produits divisibles par 10 et calculer $P(10)$.)

(b) Soit n un entier tel que $n \geq 2$.
On considère $f(n) = 2n - 1$. Il s'agit d'un polynôme en n.
On démontrera que $P(n) \geq \dfrac{2n-1}{n^2}$ pour tous les entiers n où $n \geq 2$ et que $P(n) = \dfrac{2n-1}{n^2}$ pour un nombre infini d'entiers n où $n \geq 2$.

On considère deux sacs contenant chacun n boules numérotées de 1 à n.
Puisque chaque sac contient n boules, il est possible de choisir n^2 couples de boules, une boule provenant de chaque sac. Ces choix sont équiprobables.
Soit a le numéro de la boule qui vient du premier sac et b le numéro de la boule qui vient du deuxième sac.
Les couples

$$(a, b) = (1, n),(2, n), \ldots, (n - 1, n), (n, n), (n, n - 1), \ldots, (n, 2), (n, 1)$$

sont tous tels que ab est divisible par n.
Le nombre de couples dans cette liste est égal à $(n - 1) + 1 + (n - 1)$, ou $2n - 1$.
Donc, au moins $2n-1$ des couples de boules peuvent être choisis de manière que le produit des numéros sur les boules soit divisible par n.
Puisque n^2 couples peuvent être choisis, que ces choix sont équiprobables et qu'il y a au moins $2n - 1$ choix favorables, alors $P(n) \geq \dfrac{2n-1}{n^2}$.
On a démontré la première condition.

Supposons que n est un nombre premier p $(n = p)$.
Pour que ab soit divisible par p, il faut que a soit divisible par p, que b soit divisible par p

ou que a et b soient divisibles par p. (Ceci n'est vrai que si p est un nombre premier ; par exemple, $2 \cdot 2$ est divisible par 4 même si aucun des facteurs n'est divisible par 4.)
Puisque $1 \leq a \leq p$ et $1 \leq b \leq p$, alors si a est divisible par p ou si b est divisible par p (ou si a et b sont divisibles par p), on doit avoit $a = p$ ou $b = p$ ou $a = b = p$.
En d'autres mots, ab est divisible par p exactement lorsque (a, b) est dans la liste

$$(1, p), (2, p), \dots, (p-1, p), (p, p), (p, p-1), \dots, (p, 2), (p, 1).$$

La liste contient $2p - 1$ couples. Ce sont les seuls couples pour lesquels ab est divisible par p.
Donc, $P(n) = \dfrac{2n-1}{n^2}$ lorsque n est un nombre premier.
Puisqu'il existe un nombre infini de nombres premiers, alors $P(n) = \dfrac{2n-1}{n^2}$ pour un nombre infini d'entiers n où $n \geq 2$. On a démontré la deuxième condition.
Donc, $f(n) = 2n - 1$ est un polynôme qui satisfait aux deux conditions.

(c) Soit $N = 2^k$, k étant un entier et $k \geq 2$.
On considère deux sacs contenant chacun N boules numérotées de 1 à N.
Puisque chaque sac contient N boules, il est possible de choisir N^2 couples de boules, une boule provenant de chaque sac. Ces choix sont équiprobables.
Soit a le numéro de la boule qui vient du premier sac et b le numéro de la boule qui vient du deuxième sac.
Soit j un entier, $1 \leq j \leq k - 1$.
On considère les couples de la forme $(a, b) = (2^j x, 2^{k-j} y)$, x et y étant des entiers positifs impairs tels que a et b soient dans l'intervalle voulu.
On remarque que $ab = (2^j x)(2^{k-j} y) = 2^k xy$, ce qui est divisible par $N = 2^k$.
Puisque $1 \leq a \leq 2^k$, alors $1 \leq 2^j x \leq 2^k$, d'où $x \leq 2^{k-j}$.
Puisque la moitié des entiers de 1 à 2^{k-j} sont impairs, il y a $\frac{1}{2} 2^{k-j}$ choix, ou 2^{k-j-1} choix pour x. De même, il y a $2^{k-(k-j)-1}$ choix, ou 2^{j-1} choix pour y.
Chaque choix de x et de y donne un couple unique (a, b).
Pour n'importe quelle valeur particulière de j, il y a 2^{k-j-1} choix pour x et 2^{j-1} choix pour y.
Il y a donc $2^{k-j-1} \cdot 2^{j-1}$ choix, ou 2^{k-2} choix de cette forme pour (a, b).
Donc pour une valeur particulière de j, où $1 \leq j \leq k-1$, cette méthode donne 2^{k-2} couples (a, b) pour lesquels ab est divisible par N.
Puisqu'il y a $k - 1$ valeurs différentes de j, il y a au moins $(k-1)2^{k-2}$ couples (a, b) pour lesquels ab est divisible par N. (Deux couples qui proviennent de deux valeurs différentes de j seront différents, puisque le nombre de facteurs 2 dans leurs valeurs de a seront différents.)
Puisqu'il y a N^2 choix pour (a, b), alors :

$$P(N) \geq \frac{(k-1)2^{k-2}}{N^2} = \frac{(k-1)2^k 2^{-2}}{N^2} = \frac{k-1}{4} \cdot \frac{1}{N}$$

Lorsque $\dfrac{k-1}{4} > 2016$, on a $P(N) > 2016 \cdot \dfrac{1}{N}$.
L'inéquation $\dfrac{k-1}{4} > 2016$ est équivalente à $k - 1 > 8064$, ou $k > 8065$.
On veut démontrer qu'il existe un entier strictement positif m pour lequel $P(m) > \dfrac{2016}{m}$.
Posons $m = 2^{8066}$.
D'après le travail précédent, $P(m) \geq \dfrac{8065}{4} \cdot \dfrac{1}{m} > \dfrac{2016}{m}$, ce qu'il fallait démontrer.