



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

# Concours Euclide

le mardi 12 avril 2016

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 13 avril 2016

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

**Durée :** 2 heures et demie

©2016 University of Waterloo

*Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.*

**Nombre de questions :** 10

**Chaque question vaut 10 points.**

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut 3 points.
- Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
- **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.

2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :



- Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
- La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
- Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
- Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

**ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.**

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme  $\pi + 1$  et  $\sqrt{2}$ , et ainsi de suite, plutôt que 4,14... ou 1,41..., sauf indication contraire.

*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca), Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de  , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de  , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent être présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par  $y = x^3 - x$ , mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

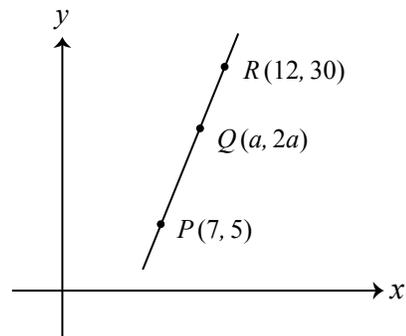
**Remarque au sujet de l'encodage par bulles**

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance et son année scolaire sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

1.  (a) Quelle est la moyenne des entiers 5, 15, 25, 35, 45, 55 ?

 (b) Si  $x^2 = 2016$ , quelle est la valeur de l'expression  $(x + 2)(x - 2)$  ?

 (c) Dans la figure ci-contre, les points  $P(7, 5)$ ,  $Q(a, 2a)$  et  $R(12, 30)$  sont situés sur une même droite. Déterminer la valeur de  $a$ .

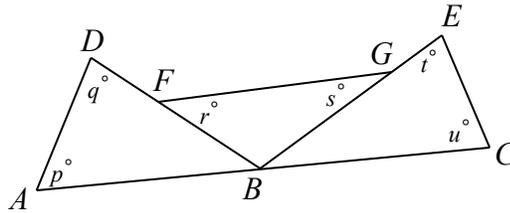


2.  (a) Quelles sont toutes les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $\frac{n}{9} = \frac{25}{n}$  ?

 (b) Quelles sont toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $(x - 3)(x - 2) = 6$  ?

 (c) Chez l'épicier Descartes, 2 pommes coûtent le même prix que 3 bananes. René achète 6 pommes et 12 bananes pour un coût total de 6,30 \$. Déterminer le coût d'une pomme.

3.  (a) Dans la figure suivante, le point  $B$  est situé sur  $AC$ , le point  $F$  est situé sur  $DB$  et le point  $G$  est situé sur  $EB$ .



Quelle est la valeur de l'expression  $p + q + r + s + t + u$  ?

-  (b) Soit  $n$  l'entier égal à  $10^{20} - 20$ . Quelle est la somme des chiffres de  $n$  ?
-  (c) Une parabole coupe l'axe des abscisses en  $P(2, 0)$  et  $Q(8, 0)$ . Le sommet  $S$  de la parabole est situé en dessous de l'axe des abscisses. Sachant que le triangle  $SPQ$  a une aire de 12, déterminer les coordonnées de  $S$ .
4.  (a) Déterminer toutes les mesures d'angles  $\theta$  telles que  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  et  $\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta = \frac{7}{4}$ .



- (b) Les rayons de deux cercles ont une somme de 10 cm. La circonférence du plus grand cercle a 3 cm de plus que celle du plus petit cercle. Déterminer la différence entre l'aire du grand cercle et celle du petit cercle.

5.  (a) Le dépanneur Chez Charlotte achète une calculatrice au prix de  $p$  \$ ( $p > 0$ ), ajoute  $n\%$  à ce coût pour fixer le prix de vente, puis diminue le résultat de 20% pour fixer le prix en solde. Sachant que le prix en solde est 20% de plus que  $p$  \$, quelle est la valeur de  $n$  ?



- (b) On définit une fonction  $f$  de manière que si  $n$  est un entier impair, alors  $f(n) = n - 1$  et si  $n$  est un entier pair, alors  $f(n) = n^2 - 1$ . Par exemple, si  $n = 15$ , alors  $f(n) = 14$  et si  $n = -6$ , alors  $f(n) = 35$ , puisque 15 est un entier impair et  $-6$  est un entier pair. Déterminer tous les entiers  $n$  pour lesquels  $f(f(n)) = 3$ .

6.  (a) Quel est le plus petit entier strictement positif  $x$  pour lequel  $\frac{1}{32} = \frac{x}{10^y}$ ,  $y$  étant un entier strictement positif quelconque ?



- (b) Déterminer toutes les aires possibles de triangles rectangles ayant un côté de longueur 60 et dont les longueurs des trois côtés forment une suite arithmétique.

(Une *suite arithmétique* est une suite de nombres dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7, 9 sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.)

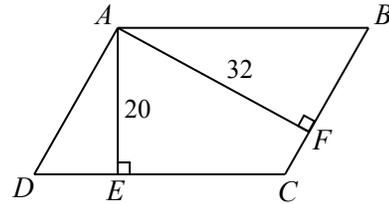
7.  (a) Amrita et Zénon traversent un lac en ligne droite avec l'aide d'un kayak à une place. Chacun peut pagayer le kayak à une vitesse de 7 km/h et nager à une vitesse de 2 km/h. Ils partent du même point, en même temps, avec Amrita en kayak et Zénon à la nage. Après un certain temps, Amrita arrête le kayak et se met immédiatement à nager. Lorsque Zénon atteint le kayak, qui n'a pas bougé depuis qu'Amrita l'a abandonné, il monte dans le kayak et se met à pagayer. Les deux arrivent de l'autre côté du lac en même temps, 90 minutes après leur départ. Déterminer le temps pendant lequel le kayak n'a pas été utilisé dans ces 90 minutes.



- (b) Déterminer tous les couples  $(x, y)$  de nombres réels qui vérifient le système d'équations :

$$\begin{aligned} x\left(\frac{1}{2} + y - 2x^2\right) &= 0 \\ y\left(\frac{5}{2} + x - y\right) &= 0 \end{aligned}$$

8.  (a) Dans la figure ci-contre,  $ABCD$  est un parallélogramme. Le point  $E$  est situé sur  $DC$  de manière que  $AE$  soit perpendiculaire à  $DC$  et le point  $F$  est situé sur  $CB$  de manière que  $AF$  soit perpendiculaire à  $CB$ . Sachant que  $AE = 20$ ,  $AF = 32$  et  $\cos(\angle EAF) = \frac{1}{3}$ , déterminer l'aire exacte du quadrilatère  $AECF$ .



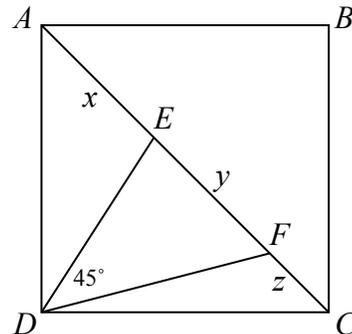
- (b) Déterminer tous les nombres réels  $x$  ( $x > 0$ ) pour lesquels

$$\log_4 x - \log_x 16 = \frac{7}{6} - \log_x 8$$

9.  (a) La chaîne  $AAABBBAAABB$  est une chaîne de dix lettres, chaque lettre étant un  $A$  ou un  $B$ , qui ne comprend pas les lettres consécutives  $ABBA$ . La chaîne  $AAABBBAAABB$  est une chaîne de dix lettres, chaque lettre étant un  $A$  ou un  $B$ , qui comprend les lettres consécutives  $ABBA$ . Déterminer le nombre de chaînes de dix lettres, chaque lettre étant un  $A$  ou un  $B$ , qui ne comprend pas les lettres consécutives  $ABBA$ . Justifier sa démarche.



- (b) Dans la figure ci-contre,  $ABCD$  est un carré. Les points  $E$  et  $F$  sont situés sur  $AC$  de manière que  $\angle EDF = 45^\circ$ . Si  $AE = x$ ,  $EF = y$  et  $FC = z$ , démontrer que  $y^2 = x^2 + z^2$ .



10.  Soit  $k$  un entier positif tel que  $k \geq 2$ . On a deux sacs contenant chacun  $k$  boules numérotées de 1 à  $k$ . André retire au hasard une boule de chaque sac. (Dans chaque sac, chaque boule a les mêmes chances d'être choisie.)  $P(k)$  représente la probabilité pour que le produit des numéros sur deux boules choisies soit divisible par  $k$ .

(a) Calculer  $P(10)$ .

(b) Tout en justifiant ses étapes, déterminer un polynôme  $f(n)$  pour lequel :

- $P(n) \geq \frac{f(n)}{n^2}$  pour tous les entiers positifs  $n$  avec  $n \geq 2$  et
- $P(n) = \frac{f(n)}{n^2}$  pour un nombre infini d'entiers positifs  $n$  avec  $n \geq 2$ .

(Un *polynôme*  $f(x)$  est une expression algébrique

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$m$  étant un entier quelconque avec  $m \geq 0$  et  $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$  étant des nombres réels.)

(c) Démontrer qu'il existe un entier strictement positif  $m$  pour lequel  $P(m) > \frac{2016}{m}$ .



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

*Pour les élèves...*

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2016! Chaque année, plus de 220 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2016.

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

*Pour les enseignants...*

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2016/2017
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours