Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2016

(10e année – Secondaire IV)

le mercredi 24 février 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 25 février 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $(3+2)-(2+1)=5-3=2$

Réponse : (E)

2. D'après le diagramme, 7 des 20 enseignants ont choisi le carré comme figure préférée.
Donc, 13 enseignants $(20-7=13)$ n'ont pas choisi le carré comme figure préférée.
(On peut aussi noter que 3, 4 et 6 enseignants ont choisi le triangle, le cercle et l'hexagone comme figure préférée et que $3+4+6=13$.)

Réponse : (E)

3. On a : $\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

Réponse : (C)

4. Puisque Blaise fait des pas de $\frac{1}{2}$ mètre, alors deux de ses pas font 1 m.
Pour parcourir 12 m, Blaise doit donc prendre 12×2 pas, ou 24 pas.

Réponse : (D)

5. *Solution 1*
Puisque l'angle PQS est extérieur au triangle QSR, alors $\angle PQS=\angle QSR+\angle SRQ$.
Donc $2x^\circ = x^\circ + 50^\circ$, ou $2x=x+50$, ou $x=50$.

Solution 2
Puisque les angles PQS et SQR forment un angle plat, ils sont supplémentaires.
Donc $\angle SQR=180^\circ-\angle PQS$, ou $\angle SQR=180^\circ-2x^\circ$.
Puisque les mesures des angles du triangle SQR ont une somme de 180°, alors :

$$\begin{aligned}\angle SQR+\angle QSR+\angle QRS &= 180^\circ\\ (180^\circ-2x^\circ)+x^\circ+50^\circ &= 180^\circ\\ 50^\circ-x^\circ &= 0^\circ\\ x^\circ &= 50^\circ\end{aligned}$$

Donc $x=50$.

Réponse : (A)

6. Puisque la droite qui passe par les points points $(2,7)$ et $(a,3a)$ a une pente de 2, alors $\dfrac{3a-7}{a-2}=2$.
Donc $3a-7=2(a-2)$, ou $3a-7=2a-4$, d'où $a=3$.

Réponse : (C)

7. Si une équipe A rencontre une équipe B et que l'équipe B remporte une victoire, alors celle-ci a marqué plus de buts que l'équipe A ; dans le cas d'une égalité, les deux équipes ont marqué un même nombre de buts.
Donc si une équipe a 0 victoire, 1 défaite et 2 égalités, elle a marqué moins de buts que l'équipe adverse une fois (lors de la défaite) et le même nombre de buts que l'équipe adverse deux fois (lors des deux égalités).
Dans ces trois rencontres, elle a donc marqué moins de buts contre ses adversaires que ceux-ci n'ont marqués contre elle.
Or, selon l'énoncé, l'équipe a compté plus de buts que ses adversaires n'en ont comptés contre elle. Il est donc impossible qu'elle ait 0 victoire, 1 défaite et 2 égalités.

Si on examine chacun des choix de réponse (A), (B), (D) et (E), on voit qu'il est possible pour

l'équipe d'obtenir le résultat indiqué et de marquer plus de buts que les adversaires n'en ont comptés contre elle.
Ceci élimine chacun de ces choix et indique que le choix (C) est impossible.
(A) : Si l'équipe gagne 2-0 et 3-0 et fait match nul 1-1, elle a marqué 6 buts et les adversaires ont marqué 1 but.
(B) : Si l'équipe gagne 4-0 et perd 1-2 et 2-3, elle a marqué 7 buts et les adversaires ont marqué 5 buts.
(D) : Si l'équipe gagne 4-0, perd 1-2 et fait match nul 1-1, elle a marqué 6 buts et les adversaires ont marqué 3 buts.
(E) : Si l'équipe gagne 2-0 et fait deux matchs nuls 1-1 et 2-2, elle a marqué 5 buts et les adversaires ont marqué 3 buts.
Donc, seul le résultat de 0 victoire, 1 défaite et 2 égalités est impossible étant donné que l'équipe a compté plus de buts que ses adversaires n'en ont comptés contre elle.

Réponse : (C)

8. *Solution 1*
On calcule la valeur de chaque mot comme suit :
- BAD a pour valeur $2 + 1 + 4$, ou 7
- CAB a pour valeur $3 + 1 + 2$, ou 6
- DAD a pour valeur $4 + 1 + 4$, ou 9
- BEE a pour valeur $2 + 5 + 5$, ou 12
- BED a pour valeur $2 + 5 + 4$, ou 11

Le mot qui a la plus grande valeur est BEE.

Solution 2
On détermine le mot qui a la plus grande valeur en comparant les mots deux à deux.
Puisque BAD et CAB ont les lettres A et B en commun, la valeur de BAD est plus grande que celle de CAB, puisque la valeur de D est plus grande que celle de C. Ceci élimine le mot CAB comme choix possible.
De même, la valeur de DAD est plus grande que celle de BAD (ce qui élimine le mot BAD) et la valeur de BEE est plus grande que celle de BED (ce qui élimine le mot BED).
Il reste donc les mots DAD et BEE.
Le mot DAD a une valeur de 9 $(4 + 1 + 4)$ et le mot BEE a une valeur de 12 $(2 + 5 + 5)$.
Donc, le mot qui a la plus grande valeur est BEE.
(On aurait pu noter, pour comparer DAD et BEE, que les deux E ont une plus grande valeur que les deux D et que B a une plus grande valeur que A. Donc, BEE a une plus grande valeur que DAD.)

Réponse : (D)

9. *Solution 1*
On écrit les nombres de la suite jusqu'à ce qu'on obtienne un nombre négatif :

$$43, 39, 35, 31, 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3, -1$$

Puisqu'on soustrait toujours 4, tous les nombres qui suivent seront négatifs.
Donc, Gianna écrit 11 nombres positifs.

Solution 2
Le $n^{\text{ième}}$ nombre de la suite est $4(n-1)$ de moins que le premier nombre puisqu'il faut soustraire 4 un total de $(n-1)$ fois pour l'atteindre.
Le $n^{\text{ième}}$ nombre est donc égal à $43 - 4(n-1)$, ou $47 - 4n$.
La première valeur de n pour laquelle cette expression donne un nombre négatif est 12.
Donc, Gianna écrit 11 nombres positifs.

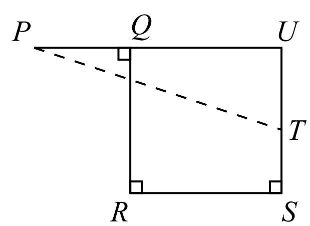
Réponse : (A)

10. *Solution 1*
On nomme les élèves A, B, C, D et E.
Le nombre total de parties est égal au nombre d'appariements de deux élèves que l'on peut faire multiplié par le nombre de parties que deux élèves peuvent jouer l'un contre l'autre.
Les appariements possibles de deux élèves sont AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE et DE.
Il y a 10 appariements possibles.
Le nombre total de parties est donc égal à 10×3, ou 30.

Solution 2
A joue 3 parties contre B, C, D et E pour un total de 3×4 parties, ou 12 parties.
B a déjà joué contre A. Il lui reste à jouer 3 parties contre C, D et E pour un total de 3×3 parties, ou 9 parties.
C a déjà joué contre A et B. Il lui reste à jouer 3 parties contre D et E pour un total de 3×2 parties, ou 6 parties.
D a déjà joué contre A, B et C. Il lui reste à jouer 3 parties contre E. On remarque que E a joué 3 parties contre chacun de ses adversaires. Le nombre de parties jouées en tout est égal à $12 + 9 + 6 + 3$, ou 30.

Réponse : (C)

11. On prolonge PQ et ST jusqu'à ce qu'ils se coupent en U.



Puisque $QUSR$ admet trois angles droits, son quatrième angle doit aussi être droit. $QUSR$ est donc un rectangle.
Le triangle PUT est donc rectangle en U.
D'après le théorème de Pythagore, $PT^2 = PU^2 + UT^2$.
Or $PU = PQ + QU$ et $QU = RS$. Donc $PU = 4 + 8 = 12$.
De plus, $UT = US - ST$ et $US = QR$. Donc $UT = 8 - 3$, ou $UT = 5$.
Donc $PT^2 = 12^2 + 5^2$, ou $PT^2 = 144 + 25$, ou $PT^2 = 169$.
Puisque $PT > 0$, alors $PT = \sqrt{169}$, ou $PT = 13$.

Réponse : (E)

12. Puisque les 30 boules ont la même chance d'être choisies, les 30 numéros sont équiprobables. Donc, la situation la plus probable est celle qui admet le plus de nombres favorables.
Il y a 3 boules dont le numéro est un multiple de 10, soit les boules 10, 20 et 30.
Il y a 15 boules dont le numéro est impair, soit les boules 1, 3, 5, 7, 9, ..., 27, 29.

Il y a 4 boules dont le numéro contient le chiffre 3, soit les boules 3, 13, 23 et 30.
Il y a 6 boules dont le numéro est un multiple de 5, soit les boules 5, 10, 15, 20, 25 et 30.
Il y a 12 boules dont le numéro contient le chiffre 2, soit les boules 2, 12, 20, 21, 22, …, 28, 29.
La situation la plus probable est le choix d'un nombre impair.

Réponse : (B)

13. On remarque que les choix de réponse sont tous des fractions avec un numérateur de 5. Pour comparer, on peut écrire $\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$ et $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$.
Lorsqu'on compare deux fractions positives ayant le même numérateur, celle qui a le plus petit dénominateur est la plus grande. On cherche donc une fraction dont le dénominateur est entre 20 et 30. Une seule fraction répond à ce critère, soit $\frac{5}{24}$.
Donc $\frac{5}{30} < \frac{5}{24} < \frac{5}{20}$, ou $\frac{1}{6} < \frac{5}{24} < \frac{1}{4}$.
(On aurait pu remarquer que puisque $\frac{1}{6} = \frac{4}{24}$ et $\frac{1}{4} = \frac{6}{24}$, alors le choix de réponse $\frac{5}{24}$ est celui qui est entre ces deux fractions.)

Réponse : (C)

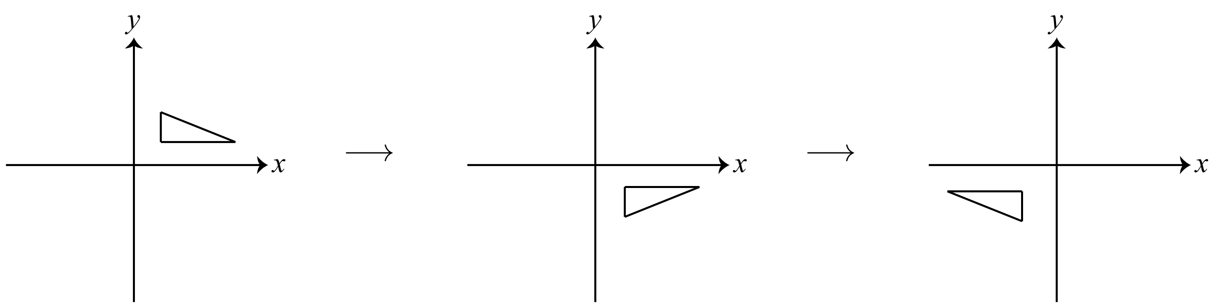
14. Puisque $100 = 10^2$, alors $100^{10} = (10^2)^{10} = 10^{20}$.
Donc $(10^{100}) \times (100^{10}) = (10^{100}) \times (10^{20}) = 10^{120}$.
En notation régulière, ce nombre s'écrit avec un 1 suivi de 120 zéros.

Réponse : (A)

15. En factorisation première, on a $20 = 2^2 \cdot 5$, $16 = 2^4$ et $2016 = 16 \cdot 126 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$.
Pour qu'un entier soit divisible par chacun des nombres $2^2 \cdot 5$ et 2^4 et $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, il doit admettre au moins 5 facteurs 2, au moins 2 facteurs 3, au moins 1 facteur 5 et au moins 1 facteur 7.
Le plus petit tel entier est $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$, ou 10 080. Le chiffre des dizaines de ce nombre est 8.

Réponse : (E)

16. Les trois figures suivantes indiquent la position initiale, la position après la réflexion par rapport à l'axe des abscisses et la position après la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées :



Le choix de réponse (D) représente la position finale.

Réponse : (D)

17. Puisque le carré $PQRS$ a un périmètre de 120, ses côtés ont une longueur de $\frac{1}{4}(120)$, ou 30.
Donc $PQ = QR = RS = SP = 30$.
Puisque le triangle PZS a un périmètre de $2x$, alors $PZ + ZS + SP = 2x$.
Puisque $PS = 30$ et que $PZ + ZS = 2x - PS$, alors $PZ + ZS = 2x - 30$.
Le périmètre du pentagone $PQRSZ$ est donc égal à

$$PQ + QR + RS + ZS + PZ = 30 + 30 + 30 + (PZ + ZS) = 30 + 30 + 30 + (2x - 30) = 2x + 60,$$

ou $60 + 2x$.

Réponse : (C)

18. *Solution 1*
Soit x, y et z les trois entiers de manière que $x + y = 998$, $x + z = 1050$ et $y + z = 1234$.
D'après les deux premières équations, on a $(x + z) - (x + y) = 1050 - 998$, d'où $z - y = 52$.
Puisque $z + y = 1234$ et $z - y = 52$, alors $(z + y) + (z - y) = 1234 + 52$, d'où $2z = 1286$, ou $z = 643$.
Puisque $z = 643$ et $z - y = 52$, alors $y = z - 52$, d'où $y = 643 - 52$, ou $y = 591$.
Puisque $x + y = 998$ et $y = 591$, alors $x = 998 - y$, d'où $x = 998 - 591$, ou $x = 407$.
Les trois entiers sont 407, 591 et 643.
La différence du plus grand et du plus petit est donc égale à $643 - 407$, ou 236.

Solution 2
Soit x, y et z les trois entiers de manière que $x \leq y \leq z$.
Puisque $y \leq z$, alors $x + y \leq x + z$.
Puisque $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$.
Donc $x + y \leq x + z \leq y + z$.
On a donc $x + y = 998$, $x + z = 1050$ et $y + z = 1234$.
Puisque z est le plus grand des trois entiers et que x est le plus petit, on cherche la valeur de $z - x$.
Or $z - x = (y + z) - (x + y)$. Donc $z - x = 1234 - 998$, ou $z - x = 236$.

Réponse : (E)

19. Le nombre de points sur le cercle est le même que le nombre d'espaces entre les points.
Pour passer du point 7 au point 35, il faut parcourir 28 espaces autour du cercle, car $35 - 7 = 28$.
Puisque les points 7 et 35 sont diamétralement opposés, alors il faut parcourir le même nombre d'espaces pour continuer autour du cercle de 35 jusqu'à 7.
Il y a donc $2 \cdot 28$ espaces, ou 56 espaces entre les nombres autour du cercle.
Il y a donc 56 points autour du cercle. Donc $n = 56$.

Réponse : (C)

20. *Solution 1*
Lorsque les n élèves sont placés en groupes de 2, soit g le nombre de groupes complets et il y a un groupe incomplet.
Puisque ce sont des groupes de 2, le groupe incomplet doit donc avoir 1 élève.
Donc $n = 2g + 1$.
Puisque le nombre de groupes complets de 2 élèves est 5 de plus que le nombre de groupes complets de 3 élèves, il y avait $g - 5$ groupes complets de 3 élèves.
Après que les élèves sont en groupes de 3, il reste un groupe incomplet qui doit comprendre 1 ou 2 élèves.
On a donc $n = 3(g - 5) + 1$ ou $n = 3(g - 5) + 2$.
Si $n = 2g + 1$ et $n = 3(g - 5) + 1$, alors $2g + 1 = 3(g - 5) + 1$, ou $2g + 1 = 3g - 14$, d'où $g = 15$.
Dans ce cas, puisque $n = 2g + 1$, alors $n = 31$. Il y avait donc 15 groupes complets de 2 élèves et 10 groupes complets de 3 élèves.
Si $n = 2g + 1$ et $n = 3(g - 5) + 2$, alors $2g + 1 = 3(g - 5) + 2$, ou $2g + 1 = 3g - 13$, d'où $g = 14$.
Dans ce cas, puisque $n = 2g + 1$, alors $n = 29$. Il y avait donc 14 groupes complets de 2 élèves et 9 groupes complets de 3 élèves.
Si $n = 31$, on pourrait diviser 31 élèves en 7 groupes complets de 4 élèves et 1 groupe incomplet.
Si $n = 29$, on pourrait diviser 29 élèves en 7 groupes complets de 4 élèves et 1 groupe incomplet.
Or, l'énoncé indique que le nombre de groupes complets de 3 élèves est 3 de plus que le nombre de groupes complets de 4 élèves. On doit donc avoir $n = 31$.

Dans ce cas, on a $n^2 - n = 31^2 - 31$, ou $n^2 - n = 930$.
La somme des chiffres de l'entier égal à $n^2 - n$ est donc égale à 12.

Solution 2
Puisque les n élèves ne peuvent pas être placés en groupes complets de 2, 3 ou 4 élèves, alors n n'est pas un multiple de 2, 3 ou 4.
Voici les premiers entiers supérieurs à 1 qui ne sont pas divisibles par 2, 3 ou 4 : 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35.
Dans chaque cas, on indique le nombre de groupes complets de chaque grandeur :

n	5	7	11	13	17	19	23	25	29	31	35
N^bre^ de groupes complets de 2 élèves	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15	17
N^bre^ de groupes complets de 3 élèves	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N^bre^ de groupes complets de 4 élèves	1	1	2	3	4	4	5	6	7	7	8

Puisque le nombre de groupes complets de 2 élèves est 5 de plus que le nombre de groupes complets de 3 élèves qui est lui-même 3 de plus que le nombre de groupes complets de 4 élèves, on voit que parmi ces résultats, $n = 31$ satisfait aux conditions.
Dans ce cas, on a $n^2 - n = 31^2 - 31$, ou $n^2 - n = 930$. La somme des chiffres de l'entier égal à $n^2 - n$ est donc égale à 12.
(Puisqu'il s'agit d'un problème à choix multiple et qu'on a trouvé une valeur de n qui vérifie les condidions données, cette réponse doit être bonne. La solution 1 indique pourquoi 31 est la seule valeur de n qui satisfait aux conditions données.)

Réponse : (B)

21. Soit n le nombre de matchs que Jade a joués avant son dernier match.
Puisqu'elle a marqué une moyenne de 20 points par match pendant ces n matchs, elle a marqué un total de $20n$ points dans ces n matchs.
Dans son dernier match, elle a marqué 36 points pour un total de $20n + 36$ points.
Or, elle a maintenant joué $n + 1$ matchs et elle a marqué une moyenne de 21 points par match. Elle a donc marqué un total de $21(n + 1)$ points.
On a donc $21(n + 1) = 20n + 36$, ou $21n + 21 = 20n + 36$, d'où $n = 15$.
En 16 matchs, Jade a donc marqué $20(15) + 36$ points, ou 336 points.
Pour que sa moyenne monte à 22 points par match en 17 matchs, elle devra avoir marqué un total de $17 \cdot 22$ points, ou 374 points.
Elle doit donc marquer 38 points ($374 - 336 = 38$) dans son prochain match.

Réponse : (A)

22. Puisque la piste est circulaire avec un rayon de 25 km, elle a une circonférence de $2\pi(25)$ km, ou 50π km.
Pendant les 15 minutes qu'Alain conduit à 80 km/h, il parcourt une distance de $\frac{1}{4}(80)$ km, ou 20 km (puisque 15 minutes correspondent à un quart d'heure).
Lorsque Louise quitte la ligne de départ, Louise conduit dans la direction opposée à celle d'Alain.
Supposons que Louise conduit pendant t heures avant de rencontrer Alain pour la première fois.
Pendant ce temps, Louise conduit à une vitesse de 100 km/h et elle parcourt donc une distance de $100t$ km.
Pendant ce temps, Alain conduit à une vitesse de 80 km/h et il parcourt donc une distance de $80t$ km.
Puisqu'ils sont à $50\pi - 20$ km l'une de l'autre lors du départ de Louise (la circonférence de la piste moins les 20 km parcourus par Alain au départ), alors la somme des distances qu'ils parcourent

est de $50\pi - 20$ km.
Donc $100t + 80t = 50\pi - 20$, d'où $180t = 50\pi - 20$, ou $t = \frac{5\pi-2}{18}$.
Supposons qu'Alain et Louise coursent pendant T heures de plus avant de se rencontrer la deuxième fois.
Pendant ce temps, Louise parcourt $100T$ km et Alain parcourt $80T$ km.
Cette fois, la distance parcourue pendant ce temps est la circonférence au complet, soit 50π km.
Donc $180T = 50\pi$, ou $T = \frac{5\pi}{18}$.
Le temps écoulé entre les première et deuxième rencontres est le même que le temps écoulé entre les deuxième et troisième rencontres, et le temps écoulé entre les troisième et quatrième rencontres.
Lorsque les deux se rencontreront la quatrième fois sur la piste, Louise aura conduit pendant $t + 3T$ heures, ou $\frac{5\pi-2}{18} + 3 \cdot \frac{5\pi}{18}$ heures, c'est-à-dire $\frac{20\pi-2}{18}$ heures, ou $\frac{10\pi-1}{9}$ heures.

Réponse : (C)

23. Si on choisit quatre côtés adjacents et qu'on prolonge les côtés à l'infini dans les deux sens, les prolongements ne formeront pas un quadrilatère. (Voir la figure 1.)
Si on choisit des côtés de manière qu'il y ait exactement trois côtés non choisis adjacents et un autre côté non choisi ailleurs entre deux côtés choisis, les prolongements ne formeront pas un quadrilatère, car les lignes ne formeront pas une figure fermée. (Voir les figures 2 et 3.)

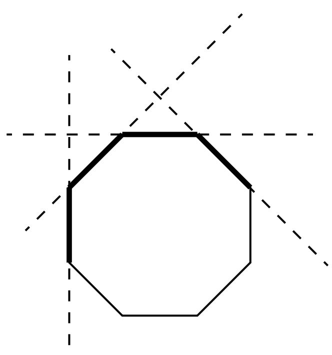


Figure 1

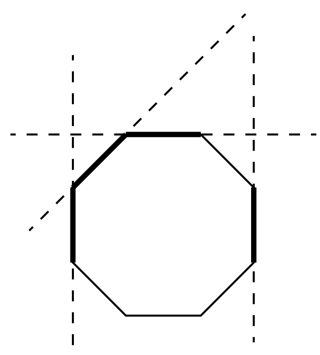


Figure 2

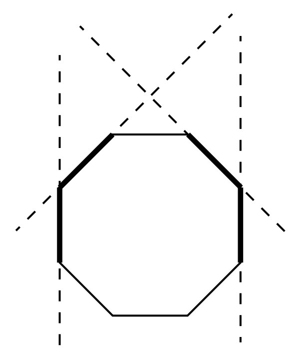


Figure 3

N'importe quel autre choix de quatre côtés permettra la formation d'un quadrilatère qui contient l'octogone. L'argument suivant le démontre :

> Supposons que l'on choisisse un côté c_1 et ensuite un côté c_2 dans le sens des aiguilles d'une montre.
> Ces deux côtés peuvent être adjacents (comme dans la figure 4), il peut y avoir un côté non choisi entre eux (comme dans la figure 5) ou il peut y avoir deux côtés non choisis entre eux (comme dans la figure 6). (S'il y a trois ou quatre côtés non choisis entre eux, on se retrouve avec une des deux situations précédentes. Il ne peut y avoir plus de quatre côtés non choisis, puisqu'on doit choisir quatre côtés sur huit.)

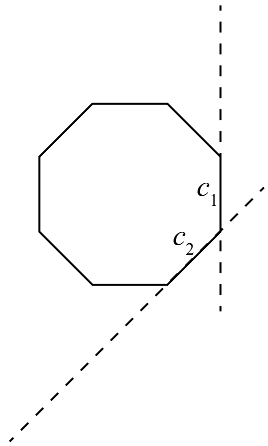


Figure 4

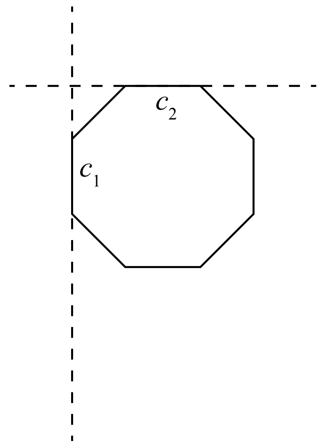


Figure 5

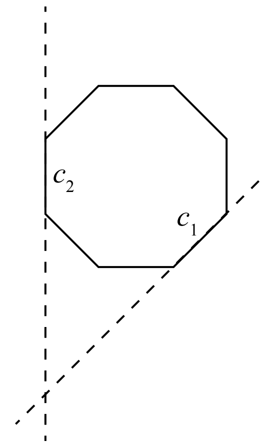


Figure 6

Dans chacun de ces cas, les côtés prolongés c_1 et c_2 se coupent sur l'octogone ou à l'extérieur de l'octogone.
On choisit ensuite c_3 et c_4 de manière qu'il ne reste pas trois ou quatre côtés non choisis adjacents.
Dans chaque paire de côtés choisis consécutifs (c_1 et c_2, c_2 et c_3, c_3 et c_4, c_4 et c_1) il y a des prolongements qui se coupent sur l'octogone ou à l'extérieur de l'octogone. Les quatre points d'intersection et les droites qui les produisent forment donc un quadrilatère qui contient l'octogone. (Voir un exemple dans la figure 7.)

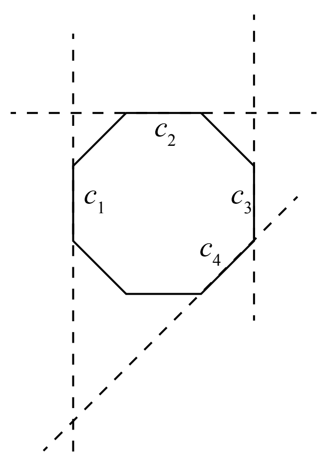


Figure 7

Selon l'énoncé, il y a 70 façons différentes de choisir quatre côtés de l'octogone.
On comptera le nombre de façons de choisir quatre côtés de manière à ne pas produire un quadrilatère et on soustraira ce nombre de 70, ce qui nous donnera le nombre de choix qui produisent le quadrilatère.
Il y a 8 façons de choisir quatre côtés adjacents : on choisit un côté initial (il y a 8 choix) et on choisit les trois côtés suivants dans l'ordre des aiguilles d'une montre (il n'y a qu'un choix). On peut aussi choisir quatre côtés adjacents et leur faire subir une de huit rotations possibles.
Il y a 8 façons de « choisir » les trois côtés adjacents non choisis (on en choisit trois et on leur fait subir une de 8 rotations possibles). Pour chacun de ces choix, il y a 3 façons de placer le quatrième côté non choisi (la figure 2 est est une, la figure 3 en est une et la réflexion de la figure 2 par rapport à un axe vertical en est une autre). Il y a donc 8×3 façons, ou 24 façons de choisir quatre côtés de manière qu"il y ait 3 côtés non choisis adjacents.
Pour résumer, il y a 70 façons de choisir quatre côtés et il y a $(8 + 24)$ façons, ou 32 façons de les

choisir de manière à ne pas obtenir un quadrilatère qui contient l'octogone. Il y a donc $(70-32)$ façons, ou 38 façons de les choisir de manière à en obtenir un.
La probabilité de choisir quatre côtés de manière que les prolongements des côtés se rencontrent pour former un quadrilatère qui contient l'octogone est donc égale à $\frac{38}{70}$, ou $\frac{19}{35}$.

Réponse : (B)

24. Soit q un nombre pour lequel il existe exactement 19 entiers n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$.
Soit $m, m+1, m+2, \ldots, m+17, m+18$ ces 19 entiers.
Donc $\sqrt{q} < m < m+1 < m+2 < \cdots < m+17 < m+18 < q$.
On a donc $q - \sqrt{q} > (m+18) - m$, ou $q - \sqrt{q} > 18$, puisque $q - \sqrt{q}$ est le plus petit possible lorsque q est aussi petit que possible et $\sqrt{q}$ est aussi grand que possible.
Aussi, puisqu'il s'agit de la liste des entiers qui sont situés entre $\sqrt{q}$ et q, on doit avoir $m - 1 \leq \sqrt{q} < m < m+1 < m+2 < \cdots < m+17 < m+18 < q \leq m+19$.
En d'autres mots, ni $m-1$ ni $m+19$ ne vérifie $\sqrt{q} < n < q$.
Donc $q - \sqrt{q} \leq (m+19) - (m-1) = 20$.
On a donc $18 < q - \sqrt{q} \leq 20$.

On utilise ensuite $18 < q - \sqrt{q} \leq 20$ pour obtenir une contrainte sur q.
Pour obtenir $q - \sqrt{q} > 18$, il faut que $q > 18$.
Or si $q > 18$, alors $\sqrt{q} > \sqrt{18} > 4$.
De plus, $q - \sqrt{q} > 18$ et $\sqrt{q} > 4$ impliquent que $q - 4 > q - \sqrt{q} > 18$, d'où $q > 22$.
Ensuite, on remarque que $q - \sqrt{q} = \sqrt{q}(\sqrt{q} - 1)$.
Lorsque q est supérieur à 1 et croissant, chacun des facteurs $\sqrt{q}$ et $\sqrt{q} - 1$ est croissant et le produit $q - \sqrt{q}$ est donc croissant.
Lorsque $q = 25$, $q - \sqrt{q} = 25 - 5$, ou $q - \sqrt{q} = 20$.
On veut que $q - \sqrt{q} \leq 20$. Puisque $q - \sqrt{q} = 20$ lorsque $q = 25$ et puisque $q - \sqrt{q}$ est croissant, alors on doit avoit $q \leq 25$ lorsque $q - \sqrt{q} \leq 20$.
Puisque $18 < q - \sqrt{q} \leq 20$, on a donc $22 < q \leq 25$.
On limite donc notre recherche de q dans cet intervalle.

Lorsque $q = 22$, on a $\sqrt{q} \approx 4{,}69$. Les valeurs entières de n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ sont $5, 6, 7, \ldots, 20, 21$. Il y en a 17.
Lorsque $22 < q \leq 23$, on a $4 < \sqrt{q} < 5$ et $22 < q \leq 23$. Les valeurs entières de n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ sont $5, 6, 7, \ldots, 20, 21, 22$. Il y en a 18.
Lorsque $23 < q \leq 24$, on a $4 < \sqrt{q} < 5$ et $23 < q \leq 24$. Les valeurs entières de n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ sont $5, 6, 7, \ldots, 20, 21, 22, 23$. Il y en a 19.
Lorsque $24 < q < 25$, on a $4 < \sqrt{q} < 5$ et $24 < q < 25$. Les valeurs entières de n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ sont $5, 6, 7, \ldots, 20, 21, 22, 23, 24$. Il y en a 20.
Lorsque $q = 25$, on a $\sqrt{q} = 5$. Les valeurs entières de n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ sont $6, 7, \ldots, 20, 21, 22, 23, 24$. Il y en a 19.
Donc, les nombres q pour lesquels il existe exactement 19 valeurs entières de n qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ sont $q = 25$ et les valeurs de q qui vérifient $23 < q \leq 24$.

On doit déterminer la somme de tous ces nombres q qui sont de la forme $q = \dfrac{a}{b}$, a et b étant des entiers strictement positifs tels que $b \leq 10$.
Les entiers $q = 24$ et $q = 25$ sont de cette forme si on pose respectivement $a = 24$ et $a = 25$, avec $b = 1$.
Les nombres q qui sont de cette forme, entre 23 et 24 avec $b \leq 4$, sont :

$$23\tfrac{1}{2} = \tfrac{47}{2}, 23\tfrac{1}{3} = \tfrac{70}{3}, 23\tfrac{2}{3} = \tfrac{71}{3}, 23\tfrac{1}{4} = \tfrac{93}{4}, 23\tfrac{3}{4} = \tfrac{95}{4}$$

On a omis $23\frac{2}{4}$, puisqu'il s'agit du même nombre que $23\frac{1}{2}$.
On continue à inclure les nombres qui sont dans l'intervalle $5 \leq b \leq 10$, tout en omettant les nombres équivalents à d'autres nombres déjà inclus avec de plus petits dénominateurs. On obtient :

$$23\tfrac{1}{2}, 23\tfrac{1}{3}, 23\tfrac{2}{3}, 23\tfrac{1}{4}, 23\tfrac{3}{4}, 23\tfrac{1}{5}, 23\tfrac{2}{5}, 23\tfrac{3}{5}, 23\tfrac{4}{5}, 23\tfrac{1}{6}, 23\tfrac{5}{6}, 23\tfrac{1}{7}, 23\tfrac{2}{7}, 23\tfrac{3}{7}, 23\tfrac{4}{7}, 23\tfrac{5}{7}, 23\tfrac{6}{7},$$

$$23\tfrac{1}{8}, 23\tfrac{3}{8}, 23\tfrac{5}{8}, 23\tfrac{7}{8}, 23\tfrac{1}{9}, 23\tfrac{2}{9}, 23\tfrac{4}{9}, 23\tfrac{5}{9}, 23\tfrac{7}{9}, 23\tfrac{8}{9}, 23\tfrac{1}{10}, 23\tfrac{3}{10}, 23\tfrac{7}{10}, 23\tfrac{9}{10}$$

Cette liste contient 31 nombres.
Chacun de ces 31 nombres est égal à 23 plus une fraction entre 0 et 1.
À l'exception du seul nombre avec dénominateur 2, chaque fraction peut être appariée à une autre fraction pour obtenir une somme de 1. (Par exemple, $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$ et $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$.)
La somme de ces valeurs de q, entre 23 et 24, est égale à $31(23) + \frac{1}{2} + 15(1)$, ou $728\frac{1}{2}$, puisque 23 parait 31 fois, plus la fraction $\frac{1}{2}$ plus les 15 paires de fractions qui ont une somme de 1.
La somme des valeurs de q de la forme appropriée pour lequelles il existe 19 entiers qui vérifient $\sqrt{q} < n < q$ est égale à $728\frac{1}{2} + 25 + 24$, ou $777\frac{1}{2}$.

Réponse : (C)

25. D'après les règles, les mots de 1 lettre sont A, B, C, D, E.
D'après les règles, les mots de 2 lettres sont AB, AC, AD, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA, DB, DC, DE, EB, EC et ED.
Soit v_n le nombre de mots de n lettres qui commencent par une voyelle. On remarque que $v_1 = 2$ et $v_2 = 6$.
Soit c_n le nombre de mots de n lettres qui commencent par une consonne. On remarque que $c_1 = 3$ et $c_2 = 12$.
Supposons que $n \geq 2$.
On considère un mot de longueur n qui commence par une voyelle (c'est-à-dire par A ou par E).
Puisqu'il ne peut y avoir deux voyelles de suite dans un mot, la deuxième lettre doit être un B, un C ou un D.
Donc, chaque mot de longueur n peut être transformé en un mot de longueur $n-1$ qui commence par une consonne en enlevant la première lettre.
De plus, chaque mot de longueur $n-1$ qui commence par une consonne peut être transformé en deux mots différents de longueur n qui commencent par une voyelle.
Donc $v_n = 2c_{n-1}$.

On considère un mot de longueur n qui commence par une consonne.
Puisqu'un mot ne peut pas contenir une même lettre deux fois de suite, la deuxième lettre de ce mot doit être une voyelle ou une consonne différente de la première lettre du mot.
Chaque mot de longueur $n-1$ qui commence par une voyelle peut être transformé en 3 mots différents de longueur n qui commencent par une consonne, en ajoutant un B, un C ou un D au début du mot.
Chaque mot de longueur $n-1$ qui commence par une consonne peut être transformé en 2 mots de longueur n qui commencent par une consonne, en ajoutant au début du mot une des consonnes autres que celle qui commence le mot de longueur $n-1$.
Donc $c_n = 3v_{n-1} + 2c_{n-1}$.

On sait que $v_1 = 2$ et $c_1 = 3$.
Les équations $v_2 = 2c_1$ et $c_2 = 3v_1 + 2c_1$ sont conformes aux résultats $v_2 = 6$ et $c_2 = 12$.
Puisque $v_2 = 6$ et $c_2 = 12$, alors $v_3 = 2c_2 = 24$ et $c_3 = 3v_2 + 2c_2 = 3(6) + 2(12) = 42$.
On cherche v_{10}.

On continue à calculer tout en remplissant un tableau :

n	v_n	c_n
1	2	3
2	6	12
3	24	42
4	84	156
5	312	564
6	1128	2064
7	4128	7512
8	15 024	27 408
9	54 816	99 888
10	199 776	364 224

Il y a donc 199 776 mots de 10 lettres qui commencent par une voyelle.

Réponse : (E)