Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2016

le mercredi 23 novembre 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 novembre 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. On a :

$$\frac{1^3+2^3+3^3}{(1+2+3)^2} = \frac{1+8+27}{6^2} = \frac{36}{36} = 1$$

RÉPONSE : 1

2. *Solution 1*
Soit x \$ le prix régulier du deuxième livre.
Puisque 50 % correspond à $\frac{1}{2}$, Miguel a dépensé $33 + \frac{1}{2}x$ dollars pour les deux livres.
Le prix total régulier des deux livres est de $33 + x$ dollars.
Puisque Miguel a épargné 20 % du prix total régulier, il a payé 80 % du prix total régulier.
Puisque 80 % correspond à $\frac{4}{5}$, Miguel a payé $\frac{4}{5}(33 + x)$ dollars.
On a donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \tfrac{4}{5}(33+x) &= 33 + \tfrac{1}{2}x \\ \tfrac{4}{5}(33) + \tfrac{4}{5}x &= 33 + \tfrac{1}{2}x \\ \tfrac{3}{10}x &= \tfrac{1}{5}(33) \\ x &= \tfrac{10}{3} \cdot \tfrac{1}{5}(33) \\ x &= 2 \cdot 11 \\ x &= 22 \end{aligned}$$

Le prix total régulier est de $(33 + x)$ dollars, ou $(33 + 22)$ dollars, ou 55 \$.
Miguel a épargné 20 % de ce montant, soit $\frac{1}{5}(55\,\$)$, ou 11 \$.

Solution 2
Soit x \$ le prix régulier du deuxième livre.
Le prix total régulier des deux livres est de $33 + x$ dollars.
Puisque 50 % correspond à $\frac{1}{2}$, Miguel a épargné $\frac{1}{2}x$ dollars à l'achat du deuxième livre.
Puisque 20 % correspond à $\frac{1}{5}$, Miguel a épargné $\frac{1}{5}(33 + x)$ dollars du prix des deux livres.
On a donc les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{5}(33+x) &= \tfrac{1}{2}x \\ 2(33+x) &= 5x \\ 66 + 2x &= 5x \\ 3x &= 66 \\ x &= 22 \end{aligned}$$

Donc, le prix régulier du deuxième livre est de 22 \$.
Miguel a épargné 50 % de 22 \$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ de 22 \$, ou 11 \$.

RÉPONSE : 11 \$

3. Il existe exactement 5 listes qui vérifient ces propriétés, soit

$$3+5+7+9=1+5+7+11=1+3+5+15=1+3+7+13=1+3+9+11=24$$

Pourquoi s'agit-il des seules listes ?

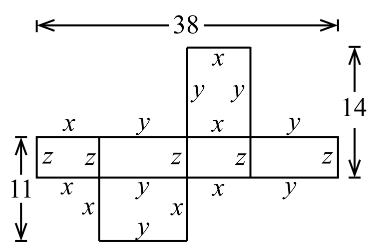
Supposons que $a=3$. Puisque a,b,c et d sont des entiers impairs positifs et que $a<b<c<d$, alors $b\geq 5$ et $c\geq 7$ et $d\geq 9$. Donc $a+b+c+d\geq 3+5+7+9$, ou $a+b+c+d\geq 24$.
Puisque $a+b+c+d=24$ selon l'énoncé, alors $b=5$ et $c=7$ et $d=9$.
Supposons que $a=1$. On ne peut pas avoir $b\geq 7$, sinon on aurait $c\geq 9$ et $d\geq 11$, d'où

$$a+b+c+d\geq 1+7+9+11=28.$$

Donc si $a=1$, on doit avoir $b=3$ ou $b=5$, puisque $a<b$.
Si $b=5$, alors $c+d=24-a-b$, d'où $c+d=24-1-5$, ou $c+d=18$.
Puisque $5<c<d$, il faut que $18=c+d>2c$, d'où $c<9$.
Puisque c et d sont des entiers impairs positifs, alors $c=7$, d'où $d=11$.
Si $b=3$, alors $c+d=24-1-3$, ou $c+d=20$.
De la même manière, on obtient $c<10$, d'où $c=9$ (ce qui donne $d=11$) ou $c=7$ (ce qui donne $d=13$) ou $c=5$ (ce qui donne $d=15$).
Il y a donc 5 listes qui vérifient les propriétés.

Réponse : 5

4. Soit $x\times y\times z$ les dimensions du prisme.
On a donc les longueurs suivantes :



(On peur supposer que les quatre rectangles au milieu de la figure représentent les faces latérales du prisme, tandis que les deux autres rectangles représentent le dessous et le dessus du prisme. D'après cette figure, on a les équations suivantes : $2x+2y=38$ et $y+z=14$ et $x+z=11$.)
On divise la première équation par 2, membre par membre, pour obtenir $x+y=19$.
On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir
$(x+y)+(y+z)+(x+z)=19+14+11$.
On obtient $2x+2y+2z=44$, ou $x+y+z=22$.
Donc :

$$\begin{aligned}x&=(x+y+z)-(y+z)=22-14=8\\y&=(x+y+z)-(x+z)=22-11=11\\z&=(x+y+z)-(x+y)=22-19=3\end{aligned}$$

Le volume du prisme est égal à xyz, ou $8\cdot 11\cdot 3$, ou 264.

Réponse : 264

5. Puisque le premier joueur qui gagne quatre parties devient champion, Gary et Deep joueront un maximum de sept parties. (Le nombre maximum de parties est atteint lorsque les deux joueurs ont chacun gagné trois parties et qu'une septième et dernière partie est nécessaire pour qu'un joueur gagne une quatrième partie.)
On sait que Gary a gagné les deux premières parties.
Pour que Deep devienne champion, les joueurs doivent jouer un total de 6 ou 7 parties, car 2 parties ont été jouées et Deep doit gagner 4 autres parties. Aussi, Deep ne peut perdre 4 parties, autrement Gary devient champion.
Si Deep gagne en 6 parties, la séquence de victoires doit être GGDDDD. (D représente une victoire de Deep et G représente une victoire de Gary.)
Si Deep devient champion en 7 parties, il doit gagner 4 des 5 dernières parties, y compris la cinquième.
Donc, la séquence de victoires doit être GGGDDDD ou GGDGDDD ou GGDDGDD ou GGDDDGD. (En d'autres mots, Gary peut gagner la 3e, la 4e, la 5e ou la 6e partie.)
La probabilité d'obtenir la séquence GGDDDD, sachant que Gary a gagné les deux premières parties, est de $\left(\frac{1}{2}\right)^4$, ou $\frac{1}{16}$. En effet, la probabilité de G ou de D dans chaque position est de $\frac{1}{2}$, puisque chaque joueur a les mêmes chances de gagner une partie.
De même, la probabilité d'obtenir chacune des séquences GGGDDDD, GGDGDDD, GGDDGDD et GGDDDGD, sachant que Gary a gagné les deux premières parties, est de $\left(\frac{1}{2}\right)^5$, ou $\frac{1}{32}$.
Donc, la probabilité pour que Deep devienne champion, sachant que Gary a gagné les deux premières parties, est égale à $\frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{32}$, ou $\frac{6}{32}$, ou $\frac{3}{16}$.

Réponse : $\frac{3}{16}$

6. Les chiffres de n, en ordre de gauche à droite, seront nommés $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9$.
Puisque n est un entier de neuf chiffres, alors $n_1 \neq 0$.
D'après la deuxième condition, les sommes suivantes doivent être des multiples de 5 : $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5$ et $n_2+n_3+n_4+n_5+n_6$ et $n_3+n_4+n_5+n_6+n_7$ et $n_4+n_5+n_6+n_7+n_8$ et $n_5+n_6+n_7+n_8+n_9$.
D'après la troisième condition, les sommes suivantes doivent être des multiples de 4 : $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7$ et $n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8$ et $n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8+n_9$.

On utilisera la propriété suivante qu'on appelle $(*)$:

> Si a et b sont deux entiers strictement positifs qui sont multiples de l'entier positif d, alors leur différence $a - b$ est aussi un multiple de d.

En effet, si a et b sont des multiples de d, alors $a = ed$ et $b = fd$, e et f étant des entiers positifs quelconques. Donc $a - b = ed - fd = d(e - f)$, ce qui est un multiple of d.

D'après $(*)$, $(n_1+n_2+n_3+n_4+n_5)-(n_2+n_3+n_4+n_5+n_6) = n_1 - n_6$ doit être un multiple de 5.
Puisque n_1 et n_6 sont des membres de la liste $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et que n'importe quels deux membres de cette liste diffèrent au plus de 8, alors pour que $n_1 - n_6$ soit un multiple de 5, il faut que n_1 et n_6 diffèrent de 5.
De même, n_2 et n_7 diffèrent de 5, n_3 et n_8 diffèrent de 5 et n_4 et n_9 diffèrent de 5.
Les paires de chiffres de la liste $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ qui diffèrent de 5 sont 0 et 5, 1 et 6, 2 et 7, 3 et 8. Il faut donc attribuer ces paires, dans un ordre quelconque, au paires n_1 et n_6, n_2 et n_7, n_3 et n_8, n_4 et n_9.
On remarque que n_5 ne fait pas partie de ces positions et que 4 ne fait pas partie de la liste des chiffres attribués à ces positions.
Donc $n_5 = 4$.

D'après ($*$), on voit que la différence entre n_1 et n_8 est un multiple de 4 et que la différence entre n_2 et n_9 est un multiple de 4.

Supposons que $n_1 = 1$. Donc, $n_6 = 6$ (d'après la divisibilité par 5) et $n_8 = 5$ (d'après la divisibilité par 4, 5 étant le seul chiffre qui diffère de 1 par un multiple de 4).
Puisque $n_8 = 5$, alors $n_3 = 0$, selon la divisibilité par 5.
Donc si $n_1 = 1$, les chiffres de n ressemblent à 1_0_46_5_.
On utilise une analyse semblable pour obtenir les configurations suivantes de chiffres selon le choix du premier chiffre :

n_1	Configuration
1	1_0_46_5_
2	2_1_47_6_
3	3_2_48_7_
5	5_6_40_1_
6	6_7_41_2_
7	7_8_42_3_
8	8_5_43_0_

Or remarque que dans le cas où $n_1 = 8$, on sait que la différence entre n_8 et 4 est un multiple de 4, mais que n_8 ne peut pas être égal à 4, puisqu'on a déjà $n_5 = 4$.

Bien que la différence entre n_1 et n_8 doit être un multiple de 4, cela ne suffit pas pour garantir que chaque ensemble de 7 chiffres d'affilée est un multiple de 4.
Puisque la somme des 9 chiffres de n est égale à $0+1+2+3+4+5+6+7+8$, ou 36 (ce qui est un multiple de 4) et que $n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8+n_9$ est un multiple de 4, alors n_1+n_2 doit être un multiple de 4.
Puisque les chiffres varient de 0 à 8, la somme de deux chiffres a une valeur maximale de 15.
Donc n_1+n_2 doit égaler un des multiples de 4 suivants : 4, 8 ou 12.
Si $n_1 = 1$, alors $n_2 = 3$ ou $n_2 = 7$.
Si $n_1 = 2$, alors $n_2 = 6$, ce qui est impossible, puisque $n_8 = 6$.
Si $n_1 = 3$, alors $n_2 = 1$ ou $n_2 = 5$.
Si $n_1 = 5$, alors $n_2 = 3$.
Si $n_1 = 6$, alors $n_2 = 2$, ce qui est impossible, puisque $n_8 = 6$.
Si $n_1 = 7$, alors $n_2 = 1$ ou $n_1 = 5$.
Si $n_1 = 8$, alors $n_2 = 0$ ou $n_2 = 4$, ce qui est impossible, puisque ces chiffres sont déjà utilisés.

Si $n_2 = 3$, on utilise une analyse semblable pour obtenir $n_7 = 8$, $n_9 = 7$ et $n_4 = 2$.
Donc lorsque $n_1 = 1$ et $n_2 = 3$, alors $n = 130246857$.
On utilise une analyse semblable pour les autres cas possibles pour obtenir les valeurs possibles suivantes de n :

$$130246857, 170846253, 312048675, 352648071, 536240817, 576840213, 718042635, 758642031$$

On peut vérifier que ces nombres de neuf chiffres vérifient les conditions d'un nombre Moffat.
Ces huit nombres Moffat ont une somme de 3555555552.
(On remarque que les valeurs possibles de chaque chiffre ont une somme de 32.)

Réponse : 3555555552

Partie B

1. (a) On prolonge le tableau :

Palindrome	Différence
1001	
	110
1111	
	110
1221	
	110
1331	
	110
1441	
	110
1551	
	110
1661	
	110
1771	
	110
1881	
	110
1991	
	11
2002	
	110
2112	
$\vdots$	$\vdots$

Les huitième et neuvième palindromes dans la première colonne sont 1771 et 1881.

(b) On continue à calculer les différences positives entre les palindromes consécutifs. On obtient

$$1551 - 1441 = 1661 - 1551 = 1771 - 1661 = 1881 - 1771 = 1991 - 1881 = 110$$

et $2002 - 1991 = 11$.
Puisqu'on nous dit qu'il n'y a que deux nombres différents, soit 110 et x, alors $x = 11$.

(c) *Solution 1*
Les palindromes entre 1000 et 10 000 sont les entiers positifs de la forme $xyyx$, x et y étant des chiffres ($1 \leq x \leq 9$ et $0 \leq y \leq 9$). (On remarque que chaque entier est un palindrome et que chaque palindrome obtenu est un entier de quatre chiffres dans l'intervalle donné.)
Il y a 9 choix pour x et pour chacun de ces choix, il y a 10 choix pour y. Il y a donc 9×10 palindromes, ou 90 palindromes dans la première colonne.
Donc $N = 90$.

Solution 2
Les palindromes entre 1000 et 10 000 sont les palindromes de quatre chiffres.
Entre 1000 et 2000, il y a 10 palindromes, comme on peut le voir dans le tableau ci-haut.
Entre 2000 et 3000, il y a aussi 10 palindromes :

$$2002, 2112, 2222, 2332, 2442, 2552, 2662, 2772, 2882, 2992$$

De même, entre 3000 et 4000, il y a 10 palindromes, ainsi qu'entre 4000 et 5000, entre 5000 et 6000, entre 6000 et 7000, entre 7000 et 8000, entre 8000 et 9000 et entre 9000 et 10 000.
Dans chacun de ces 9 intervalles, il y a 10 palindromes, pour un total de 9×10 palindromes, ou 90 palindromes.
Donc $N = 90$.

(d) Puisqu'il y a 90 palindromes dans la première colonne, il y a 89 différences dans la deuxième colonne.
Deux palindromes consécutifs ayant le même chiffre des milliers ont une différence de 110. En effet, deux tels palindromes peuvent être écrits sous les formes $xyyx$ et $xzzx$, où $z = y + 1$. Lorsqu'on les soustrait, on obtient « 0110 », ou 110.

Il y a 9 groupes de 10 palindromes ayant le même chiffre des milliers. Il y a donc $10 - 1$ différences, ou 9 différences égales à 110 dans chacun de ces groupes pour un total de 9×9 différences, ou 81 différences.
Puisqu'il y a 89 différences et que chacune est égale à 110 ou à 11 (d'après (b)), il y a 8 différences ($89 - 81 = 8$) égales à 11.
(On peut vérifier que la différence entre les palindromes consécutifs $x99x$ et $w00w$ (où $w = x + 1$) est toujours égale à 11.)
Donc la moyenne des 89 nombres dans la deuxième colonne du tableau est égale à :

$$\frac{81 \cdot 110 + 8 \cdot 11}{89} = \frac{8910 + 88}{89} = \frac{8998}{89}$$

2. (a) Puisque P est sur l'axe des abscisses et sur le cercle, on pose $y = 0$ dans l'équation du cercle et on obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}(x-6)^2 + (0-8)^2 &= 100\\ (x-6)^2 + 64 &= 100\\ (x-6)^2 &= 36\\ x - 6 &= \pm 6\end{aligned}$$

Donc $x - 6 = -6$ (d'où $x = 0$) ou $x - 6 = 6$ (d'où $x = 12$).
Puisque O a pour coordonnées $(0, 0)$, alors P a pour coordonnées $(12, 0)$.

(b) *Solution 1*
Le point Q, sur le cercle, dont l'ordonnée est maximale est situé directement au-dessus du centre C du cercle.
Puisque C a pour coordonnées $(6, 8)$ et que le cercle a un rayon de 10, alors Q a pour coordonnées $(6, 8 + 10)$ ou $(6, 18)$.

Solution 2
On considère un point (x, y) sur le cercle.
Puisque $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$, alors $(y-8)^2 \le 100 - (x-6)^2$.
Puisque $y > 8$, y est à son maximum lorsque $(y-8)^2$ est à son maximum.
Puisque $(x-6)^2 \ge 0$, alors $(y-8)^2$ atteint sa valeur maximale de 100 lorsque $(x-6)^2 = 0$, ou $x = 6$.
Puisque $y > 8$, alors $y - 8 = 10$, ou $y = 18$.
Le point sur le cercle dont l'ordonnée est maximale est $Q(6, 18)$.

(c) *Solution 1*
Puisque $\angle PQR = 90^\circ$, alors PR est un diamètre du cercle (il s'agit d'une propriété des cercles).
Puisque PR est un diamètre, il a pour centre C (le centre du cercle).
Puisque P a pour coordonnées $(12, 0)$ et que C a pour coordonnées $(6, 8)$, alors les coordonnées (a, b) de R satisfont à $6 = \frac{1}{2}(12 + a)$ (d'où $a = 0$) et $8 = \frac{1}{2}(b + 0)$ (d'où $b = 16$).
Donc, R a pour coordonnées $(0, 16)$.

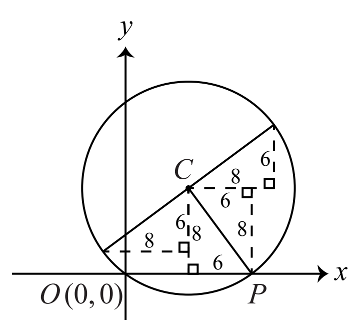
Solution 2
Puisque P et Q ont pour coordonnées respectives $(12, 0)$ et $(6, 18)$, la pente de PQ est égale à $\frac{18-0}{6-12}$, ou -3.
Puisque $\angle PQR = 90^\circ$, alors PQ et QR sont perpendiculaires.
Puisque PQ a une pente de -3, la pente de QR est égale à $-\frac{1}{-3}$, ou $\frac{1}{3}$.
Puisque Q a pour coordonnées $(6, 18)$, la droite qui passe aux points Q et R a pour équation $y - 18 = \frac{1}{3}(x - 6)$, ou $y = \frac{1}{3}x + 16$.
On cherche le deuxième point d'intersection de la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + 16$ et du cercle d'équation $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$. Ses coordonnées vérifient les deux équations.
On reporte $y = \frac{1}{3}x + 16$ dans l'équation du cercle pour obtenir :

$$\begin{aligned}
(x-6)^2 + \left(\tfrac{1}{3}x + 16 - 8\right)^2 &= 100 \\
9(x-6)^2 + 9\left(\tfrac{1}{3}x + 8\right)^2 &= 900 \\
9(x^2 - 12x + 36) + (x + 24)^2 &= 900 \\
9x^2 - 108x + 324 + x^2 + 48x + 576 &= 900 \\
10x^2 - 60x &= 0 \\
10x(x - 6) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $x = 6$ (ce qui donne le point Q) ou $x = 0$.
Lorsque $x = 0$, on a $y = 16$. Le point R a donc pour coordonnées $(0, 16)$.

(d) *Solution 1*
Soit X un point du cercle tel que $\angle PQX = 45^\circ$.
La corde PX est donc interceptée par un angle inscrit de 45°.
Donc $\angle PCX = 2(45^\circ)$, ou $\angle PCX = 90^\circ$ (l'angle au centre mesure le double d'un angle inscrit interceptant la même corde). Donc, l'angle au centre qui intercepte la corde PX mesure 90° et XC est donc perpendiculaire à PC.
On montrera deux façons d'obtenir les coordonnées des positions possibles de X.

<u>1re méthode</u>
Puisque C et P ont pour coordonnées respectives $(6, 8)$ et $(12, 0)$, alors pour se déplacer de C à P, on se déplace de 6 unités vers la droite et de 8 unités vers le bas.
Puisque X est sur le cercle, alors $CX = CP$, puisque CX et CP sont des rayons.
Si on utilise les mêmes déplacements horizontal et vertical pour CX que pour CP, tout en changeant leur ordre et même leur signe, on obtient pour CX la même longueur que celle de CP. En changeant leur ordre de même qu'un de leur signe, on obtient un segment CX perpendiculaire à CP. (Dans la figure ci-dessous, on voit divers triangles 6-8-10 placés en diverses positions qui illustrent ces angles droits.)
Puisque CX est perpendiculaire à CP, on peut obtenir les positions possibles du point X en partant de C et en se déplaçant de 8 unités vers la droite et de 6 unités vers le haut, ou en partant de C et en se déplaçant de 8 unités vers la gauche et de 6 unités vers le bas.



Les positions possibles de X sont donc $(6+8, 8+6)$ et $(6-8, 8-6)$, ou $(14, 14)$ et $(-2, 2)$, ce qui correspond aux positions possibles des points S et T.

2^e^ méthode

Le segment qui joint les points $P(12, 0)$ et $C(6, 8)$ a pour pente $\frac{8-0}{6-12}$, ou $\frac{8}{-6}$, ou $-\frac{4}{3}$.
Puisque XC est perpendiculaire à PC, alors la pente de XC est égale à $-\frac{1}{-\frac{4}{3}}$, ou $\frac{3}{4}$.

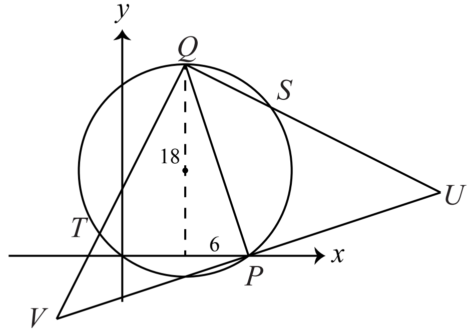
La droite qui passe aux points X et C a donc une pente de $\frac{3}{4}$. Puisqu'elle passe au point $C(6, 8)$, elle a pour équation $y - 8 = \frac{3}{4}(x-6)$, ou $y = \frac{3}{4}x - \frac{18}{4} + 8$, ou $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$.
Puisque le point X est situé sur le cercle et sur la droite, ses coordonnées vérifient les deux équations. On peut déterminer ses coordonnées en reportant $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$ dans l'équation du cercle. On obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
(x-6)^2 + \left(\tfrac{3}{4}x + \tfrac{7}{2} - 8\right)^2 &= 100 \\
(x-6)^2 + \left(\tfrac{3}{4}x - \tfrac{9}{2}\right)^2 &= 100 \\
(x-6)^2 + \left(\tfrac{3}{4}(x-6)\right)^2 &= 100 \\
(x-6)^2 \left(1 + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2\right) &= 100 \\
(x-6)^2 \left(\tfrac{25}{16}\right) &= 100 \\
(x-6)^2 &= 64 \\
x - 6 &= \pm 8
\end{aligned}$$

Donc, $x = 8+6$ ou $x = -8+6$, c'est-à-dire $x = 14$ ou $x = -2$. Si $x = 14$, alors $y = \frac{42}{4} + \frac{7}{2}$, ou $y = 14$. Si $x = -2$, alors $y = \frac{-6}{4} + \frac{7}{2}$, ou $y = 2$.
Les positions possibles de X sont donc $(14, 14)$ et $(-2, 2)$, ce qui correspond aux positions possibles des points S et T.

Solution 2

On considère les points $P(12, 0)$ et $Q(6, 18)$.
Pour aller du point Q au point P, on se déplace de 6 unités vers la droite et de 18 unités vers le bas.
À partir du point P, si on se déplace de 18 unités vers la droite et de 6 unités vers le haut jusqu'au point U qui a pour coordonnées $(30, 6)$, alors $PU = PQ$ et PU est perpendiculaire à PQ. (Cela découle d'un argument semblable à celui de la Solution 1, 1^re^ méthode).
De même, à partir du point P, si on se déplace de 18 unités vers la gauche et de 6 unités vers le bas jusqu'au point V qui a pour coordonnées $(-6, -6)$, alors $PV = PQ$ et PV est perpendiculaire à PQ.
Donc, les triangles QPU et QPV sont rectangles et isocèles.
On a donc $\angle PQU = \angle PQV = 45^\circ$ (chacun est un angle aigu dans un triangle rectangle isocèle), et aux points d'intersection S et T du cercle avec les segments respectifs QU et QV, on a $\angle PQS = \angle PQT = 45^\circ$.



Le segment qui joint les points $Q(6, 18)$ et $U(30, 6)$ a pour pente $\frac{18-6}{6-30}$, ou $-\frac{1}{2}$.
La droite qui passe aux points Q et U a donc pour équation $y - 18 = -\frac{1}{2}(x - 6)$, ou $y = -\frac{1}{2}x + 21$.
On peut écrire cette équation sous la forme $x = 42 - 2y$.
Le point d'intersection S est situé sur cette droite et sur le cercle. Ses coordonnées vérifient donc l'équation de la droite et celle du cercle. Pour déterminer les coordonnées de S, on reporte $x = 42 - 2y$ dans l'équation du cercle, $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 100$. On obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
(36 - 2y)^2 + (y - 8)^2 &= 100 \\
4y^2 - 144y + 1296 + y^2 - 16y + 64 &= 100 \\
5y^2 - 160y + 1260 &= 0 \\
y^2 - 32y + 252 &= 0 \\
(y - 18)(y - 14) &= 0
\end{aligned}$$

Donc, $y = 18$ ou $y = 14$.
La solution $y = 18$ donne $x = 42 - 2(18)$, ou $x = 6$, ce qui donne les coordonnées du point Q.
La solution $y = 14$ donne $x = 42 - 2(14)$, ou $x = 14$, ce qui donne les coordonnées du point S.

Le segment qui joint les points $Q(6, 18)$ et $V(-6, -6)$ a pour pente $\frac{18-(-6)}{6-(-6)}$ ou 2.
La droite qui passe aux points Q et V a donc pour équation $y-18 = 2(x-6)$, ou $y = 2x+6$.
Puisque T est situé sur la droite et sur le cercle, ses coordonnées vérifient les deux équations. On reporte donc $y = 2x+6$ dans l'équation $(x-6)^2+(y-8)^2 = 100$. On obtient les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
(x - 6)^2 + (2x - 2)^2 &= 100 \\
x^2 - 12x + 36 + 4x^2 - 8x + 4 &= 100 \\
5x^2 - 20x - 60 &= 0 \\
x^2 - 4x - 12 &= 0 \\
(x - 6)(x + 2) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $x = 6$ ou $x = -2$. La solution $x = 6$ donne $y = 2(6) + 6$, ou $y = 18$, ce qui donne les coordonnées du point Q.
La solution $x = -2$ donne $y = 2(-2) + 6$, ou $y = 2$, ce qui donne les coordonnées du point T.

Les coordonnées de S et de T sont $(14, 14)$ et $(-2, 2)$.

3. (a) Par définition, $a_2 + b_2\sqrt{6} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^4$.
Or
$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$$
d'où :
$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 = \left((\sqrt{3}+\sqrt{2})^2\right)^2 = (5+2\sqrt{6})^2 = 5^2+2(5)(2\sqrt{6})+(2\sqrt{6})^2 = 25+20\sqrt{6}+24 = 49+20\sqrt{6}$$
Donc $a_2 + b_2\sqrt{6} = 49 + 20\sqrt{6}$, d'où $a_2 = 49$ et $b_2 = 20$.
(Ce sont les seuls entiers c et d pour lesquels $c + d\sqrt{6} = 49 + 20\sqrt{6}$. Cela découle du fait que $\sqrt{6}$ est irrationnel.)

(b) *Solution 1*
Soit n un entier strictement positif.
On a $a_n + b_n\sqrt{6} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n}$ et $a_n - b_n\sqrt{6} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n}$. On additionne ces deux équations, membre par membre, pour obtenir
$$(a_n + b_n\sqrt{6}) + (a_n - b_n\sqrt{6}) = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n}$$
ou
$$2a_n = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n}$$
Or $\sqrt{3}-\sqrt{2} \approx 0{,}32$.
Puisque $0 < \sqrt{3}-\sqrt{2} < 1$, alors pour tout entier m strictement positif, on a $0 < (\sqrt{3}-\sqrt{2})^m < 1$.
En posant $m = 2n$, on a $0 < (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n} < 1$, d'où :
$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} + 0 < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n} < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} + 1$$
Puisque $2a_n = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n}$, alors :
$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} < 2a_n < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} + 1$$
On obtient $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} < 2a_n$ et $2a_n - 1 < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n}$ ou, ce qui est équivalent,
$$2a_n - 1 < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} < 2a_n,$$
ce qu'il fallait démontrer.

Solution 2
Puisque $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} = a_n + b_n\sqrt{6}$ et $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n} = a_n - b_n\sqrt{6}$, alors :
$$(a_n+b_n\sqrt{6})(a_n-b_n\sqrt{6}) = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n} = ((\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}))^{2n} = (3-2)^{2n} = 1$$
Donc $(a_n)^2 - 6(b_n)^2 = 1$.
Puisque a_n et b_n sont des entiers strictement positifs, alors $a_n = \sqrt{(a_n)^2} = \sqrt{1+6(b_n)^2} > 1$.
Puisque $a_n > 1$, les inégalités suivantes doivent être vraies :
$$\begin{array}{rcccl}
2-2a_n & < & 0 & < & 1 \\
-2a_n+1 & < & -1 & < & 0 \\
(a_n)^2-2a_n+1 & < & (a_n)^2-1 & < & (a_n)^2 \\
(a_n-1)^2 & < & 6(b_n)^2 & < & (a_n)^2 \\
a_n-1 & < & \sqrt{6}b_n & < & a_n \\
2a_n-1 & < & a_n+b_n\sqrt{6} & < & 2a_n \\
2a_n-1 & < & (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} & < & 2a_n
\end{array}$$
ce qu'il fallait démontrer.

(c) Puisque $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = a_1+b_1\sqrt{6}$, alors $3+2\sqrt{6}+2 = a_1+b_1\sqrt{6}$. Donc $a_1+b_1\sqrt{6} = 5+2\sqrt{6}$, d'où $a_1 = 5$ et $b_1 = 2$.
Dans la partie (a), on a déterminé que $a_2 = 49$ et $b_2 = 20$.
D'après la partie (b), on a $2a_1 - 1 < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 < 2a_1$, ou $9 < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 < 10$. Donc, $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ est supérieur à 9 et inférieur à 10. Son chiffre des unités est donc 9. (On peut aussi utiliser une calculatrice pour obtenir $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 \approx 9{,}899$.)
De même, $2a_2 - 1 < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 < 2a_2$, ou $97 < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 < 98$. Donc $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4$ se situe entre 97 et 98 et son chiffre des unités est donc 7.
De façon générale, puisque $2a_n - 1$ et $2a_n$ sont des entiers qui vérifient
$2a_n - 1 < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} < 2a_n$, alors d_n (le chiffre des unités de $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n}$) est le même que le chiffre des unités de $2a_n - 1$.
Or, pour tout entier strictement positif k,

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2(k+1)} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2k}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$$

d'où

$$a_{k+1} + b_{k+1}\sqrt{6} = (a_k + b_k\sqrt{6})(5+2\sqrt{6}) = (5a_k + 12b_k) + (2a_k + 5b_k)\sqrt{6}$$

Puisque $a_{k+1}, b_{k+1}, a_k, b_k$ sont des entiers et que $\sqrt{6}$ est irrationnel, alors :

$$a_{k+1} = 5a_k + 12b_k \qquad \text{et} \qquad b_{k+1} = 2a_k + 5b_k$$

On utilise ces équations pour remplir un tableau des premières valeurs de $a_n, b_n, 2a_n - 1$ et d_n :

n	a_n	b_n	$2a_n - 1$	d_n
1	5	2	9	9
2	49	20	97	7
3	485	198	969	9
4	4801	1960	9601	1
5	47 525	19 402	95 049	9

(Par exemple, on voit que $a_3 = 5a_2 + 12b_2$, d'où $a_3 = 5(49) + 12(20)$, ou $a_3 = 485$ et que $b_3 = 2a_2 + 5b_2$, d'où $b_3 = 2(49) + 5(20)$, ou $b_3 = 198$.)
Pour chaque valeur de n, on cherche la valeur de d_n, qui est le chiffre des unités de $2a_n - 1$.
Or, le chiffre des unités de $2a_n - 1$ est complètement déterminé par celui de a_n. De plus, pour tout n $(n \geq 2)$, $a_n = 5a_{n-1} + 12b_{n-1}$, ce qui implique que le chiffre des unités de a_n est complètement déterminé par ceux de a_{n-1} et de b_{n-1}. Il suffit donc de suivre les chiffres des unités de a_n et b_n.
On remplit le tableau suivant qui indique les chiffres des unités de $a_n, b_n, 2a_n - 1$ et d_n :

n	Chiffre des unités de a_n	Chiffre des unités de b_n	Chiffre des unités de $2a_n - 1$	d_n
1	5	2	9	9
2	9	0	7	7
3	5	8	9	9
4	1	0	1	1
5	5	2	9	9

Puisque les chiffres des unités de a_5 et b_5 sont les mêmes que ceux de a_1 et b_1 et que chaque rangée du tableau est complètement déterminée par la rangée précédente, alors les chiffres des unités de a_n et b_n vont se répéter selon un cycle de longueur 4. (Puisque $a_1 = a_5$ et $b_1 = b_5$, et que l'on détermine a_6 et b_6 à partir de a_5 et b_5 de la même façon que lorsqu'on a déterminé a_2 et b_2 à partir de a_1 et b_1. On doit donc avoir $a_6 = a_2$ et $b_6 = b_2$. Cet argument est répété sur les termes qui suivent.)

Puisque les chiffres des unités de a_n se répètent selon un cycle de longueur 4, alors ceux de d_n se répèteront selon un cycle de longueur 4.

On remarque que lorsqu'on divise 1867 par 4, on obtient le quotient 466 et un reste de 3. Donc :

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{1865} + d_{1866} + d_{1867} &= 466(d_1 + d_2 + d_3 + d_4) + (d_1 + d_2 + d_3) \\ &= 466(9 + 7 + 9 + 1) + (9 + 7 + 9) \\ &= 466(26) + 25 \\ &= 12\,141 \end{aligned}$$