Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mercredi 23 novembre 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 novembre 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures ©2016 University of Waterloo

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

Remarques :

1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

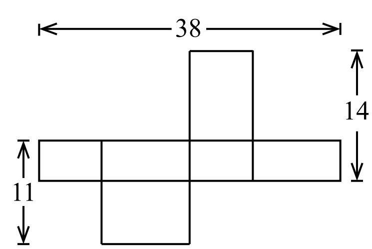
Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Quelle est la valeur de $\dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3}{(1 + 2 + 3)^2}$?

2. Miguel a acheté deux livres de la Compagnie canadienne de mathématiques suaves. Il a payé le premier livre au prix régulier de 33 \$ et il a reçu un escompte de 50 % du prix régulier à l'achat du deuxième livre. En tout, il a épargné 20 % du prix total régulier. Combien a-t-il épargné en dollars ?

3. Combien existe-t-il de listes a, b, c, d d'entiers distincts impairs positifs tels que $a < b < c < d$ et $a + b + c + d = 24$?

4. Dans la figure ci-contre (appelée un *développement*), les dimensions sont indiquées. On peut plier le développement pour former un prisme droit à base rectangulaire. Quel est le volume du prisme ?



5. Gary et Deep jouent à un jeu où chacun a les mêmes chances de gagner et il n'y a pas d'égalité. Le premier qui gagne quatre parties est déclaré champion et l'on cesse alors de jouer. Gary a gagné les deux premières parties. Quelle est la probabilité pour que Deep devienne champion ?

6. Un entier positif de neuf chiffres n est appelé un *nombre Moffat* si :
   - ses chiffres sont $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ sans répétitions,
   - la somme de n'importe quels 5 chiffres d'affilée est divisible par 5 et
   - la somme de n'importe quels 7 chiffres d'affilée est divisible par 4.

   Par exemple, 578460213 *n'est pas* un nombre Moffat. Bien que la somme de n'importe quels 7 chiffres d'affilée soit divisible par 4, les sommes de n'importe quels 5 chiffres d'affilée ne sont pas toutes divisibles par 5. Déterminer la somme de tous les nombres Moffat.

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Un *palindrome* est un entier positif que l'on peut lire de gauche à droite ou de droite à gauche. Dans le tableau ci-contre, la première colonne contient tous les palindromes entre 1000 et 10 000, en ordre croissant. La deuxième colonne contient les différences positives entre deux palindromes consécutifs. Par exemple, entre les deux palindromes consécutifs 1001 et 1111, on a inscrit la différence positive entre les deux palindromes, soit 110.

Palindrome	Différence
1001	
1111	110
1221	110
1331	110
1441	110
⋮	⋮

   (a) Quels sont les huitième et neuvième palindromes dans la première colonne ?

   (b) La deuxième colonne du tableau ne contient que deux nombres différents, soit 110 et x. Déterminer la valeur de x.

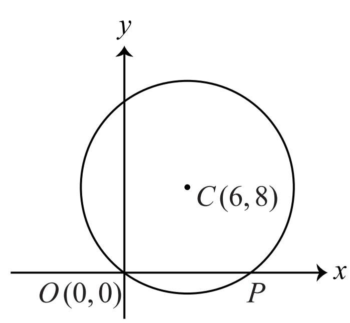
   (c) Lorsque le tableau est complet, il y a N palindromes dans la première colonne. Quelle est la valeur de N ?

   (d) Déterminer la moyenne des $N-1$ nombres dans la deuxième colonne du tableau.

2. Dans la figure ci-contre, le cercle a un rayon de 10. Il a pour centre $C(6, 8)$ et pour équation :

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$$

   Le cercle passe aussi à l'origine $O(0, 0)$.



   (a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection P du cercle et de l'axe des abscisses.

   (b) Déterminer, sans justification, les coordonnées du point Q, sur le cercle, dont l'ordonnée est maximale parmi tous les points du cercle.

   (c) Déterminer les coordonnées du point R, sur le cercle, tel que $\angle PQR = 90°$.

   (d) Déterminer les coordonnées de deux points distincts S et T, sur le cercle, tels que $\angle PQS = \angle PQT = 45°$.

3. Pour chaque entier strictement positif n, on définit a_n et b_n comme étant les deux entiers strictement positifs tels que :

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} = a_n + b_n\sqrt{6} \quad \text{et} \quad (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n} = a_n - b_n\sqrt{6}$$

   (a) Déterminer les valeurs de a_2 et b_2.

   (b) Démontrer que pour tout entier n ($n > 0$), on a $2a_n - 1 < (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n} < 2a_n$.

   (c) Soit d_n le chiffre des unités du nombre $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n}$ lorsqu'il est écrit sous forme décimale. Déterminer la valeur de

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{1865} + d_{1866} + d_{1867}$$

   (cette addition a 1867 termes), tout en justifiant sa démarche.