Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2016

le mercredi 23 novembre 2016
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 novembre 2016
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. *Solution 1*

   On récrit chaque fonction en utilisant le dénominateur commun 24 :

   $$\frac{2}{3} = \frac{16}{24} \qquad \frac{3}{4} = \frac{18}{24} \qquad \frac{5}{6} = \frac{20}{24} \qquad \frac{5}{8} = \frac{15}{24} \qquad \frac{11}{12} = \frac{22}{24}$$

   La plus petite de ces fractions est $\frac{15}{24}$, ou $\frac{5}{8}$.

   Solution 2

   On remarque que $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$, $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$, $\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$ et $\frac{11}{12} = 1 - \frac{1}{12}$.

   La plus petite de ces fractions est celle qui est égale à 1 moins la plus grande des fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{12}$. Il s'agit donc de $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$.

   Il nous reste donc à comparer $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{8}$. La plus petite de ces deux fractions est la plus petite des cinq fractions données.

   Puisque $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} \approx 0{,}667$ et $\frac{5}{8} = 0{,}625$, alors $\frac{5}{8}$ est la plus petite des cinq fractions.

   Réponse : $\frac{5}{8}$

2. *Solution 1*

   D'après le diagramme, il y a respectivement 4, 4, 2, 2, 8 et 6 élèves qui fêtent leur anniversaire le dimanche, le lundi, le mercredi, le jeudi, le vendredi et le samedi.

   Donc, il y a $4 + 4 + 2 + 8 + 6$ élèves, ou 24 élèves dont l'anniversaire n'est pas un jour qui commence par la lettre M.

   Puisque 25 % des élèves de la classe ont leur anniversaire un jour qui commence par la lettre M, alors 75 % (100 % − 25 %) des élèves ont leur anniversaire un jour qui ne commence pas par la lettre M.

   Puisque 75 % correspond à $\frac{3}{4}$, alors 24 des élèves correspondent à $\frac{3}{4}$ des élèves de la classe. Donc, 8 élèves correspondent à $\frac{1}{4}$ ou 25 % des élèves de la classe.

   Puisque 8 élèves de la classe (25 % des élèves de la classe) ont leur anniversaire un jour qui commence par la lettre M et que 2 de ces élèves ont leur anniversaire un mercredi, alors 6 élèves ont leur anniversaire un mardi ($8 - 2 = 6$).

   Solution 2

   Soit m le nombre d'élèves dont l'anniversaire est un mardi.

   Donc $m + 2$ élèves ont leur anniversaire un jour qui commence par la lettre M.

   Il y a $4 + 4 + m + 2 + 2 + 8 + 6$ élèves, ou $26 + m$ élèves dans la classe de Mme Gupta.

   On sait que 25 % correspond à $\frac{1}{4}$.

   Puisque 25 % des élèves ont leur anniversaire un jour qui commence par la lettre M, alors le nombre total d'élèves dans la classe est 4 fois plus grand que le nombre d'élèves dont l'anniversaire est un jour qui commence par la lettre M.

   Donc $26 + m = 4(m + 2)$.

   Donc $26 + m = 4m + 8$, d'où $18 = 3m$, ou $m = 6$.

   Donc en 2016, 6 élèves de la classe ont leur anniversaire un mardi.

   Réponse : 6

3. Puisqu'il y a 12 obstacles, il y a 11 espaces entre eux, chacun mesurant d mètres.

   Il y a un espace de 50 mètres avant le premier obstacle et un espace de 55 mètres après le dernier obstacle.

   Puisqu'il s'agit d'une course de 600 mètres, alors $50 + 11d + 55 = 600$, d'où $11d = 495$, ou $d = 45$.

   Réponse : $d = 45$

4. *Solution 1*

La machine de Dina fonctionne en prenant une entrée, en la multipliant par 2 puis en soustrayant 3.
Pour déterminer l'entrée à partir de la sortie, il faut renverser ce processus, c'est-à-dire prendre la sortie, ajouter 3 puis diviser par 2.
À partir de la deuxième sortie -35, on obtient $-35+3=-32$ puis $\frac{-32}{2}=-16$.
La deuxième entrée est donc -16.
Puisque la deuxième entrée était la première sortie, la première sortie était donc -16.
À partir de la première sortie -16, on obtient $-16+3=-13$ puis $\frac{-13}{2}$.
La première entrée était donc $\frac{-13}{2}$, ou $-6{,}5$.

Solution 2

Soit x la première entrée. La machine de Dina la multiplie par 2 pour obtenir $2x$ puis elle soustrait 3 pour obtenir $2x-3$.
Dina donne cette sortie comme entrée.
La machine multiplie cette entrée par 2 pour obtenir $2(2x-3)$, ou $4x-6$, puis elle soustrait 3 pour obtenir $4x-9$.
Puisque la deuxième sortie est -35, alors $4x-9=-35$, d'où $4x=-26$, ou $x=\frac{-26}{4}$, ou $x=-\frac{13}{2}$, ou $x=-6{,}5$.

Réponse : $-\frac{13}{2}$

5. *Solution 1*

De la position initiale de P jusqu'à X, il y a une distance de 8 m sur le cercle.
Donc, P atteindra X après avoir parcouru 8 m.
Puisque le cercle a une circonférence de $(8+16+16)$ m, ou 40 m, P arrivera de nouveau à X après n'importe quel multiple additionnel de 40 m .
C'est-à-dire que P atteint le point X après avoir parcouru 8 m, 48 m, 88 m, 128 m, 168 m et ainsi de suite.
De même, de la position initiale de Q jusqu'à X, il y a une distance de 16 m sur le cercle.
Donc, Q atteint le point X après avoir parcouru 16 m, 56 m, 96 m, 136 m, 176 m et ainsi de suite.
On remplit deux tableaux indiquant les distances parcourues par P et par Q pour atteindre X ainsi que les temps correspondants. On cherche les même temps pour P et pour Q , car ils indiquent que P et Q sont au point X en même temps.

Distance (m) parcoure par P	Temps (s) (au centième près)
8	2,67
48	16
88	29,33
128	42,67
168	56
208	69,33
248	82,67
288	96

Distance (m) parcoure par Q	Temps (s) (au centième près)
16	4,57
56	16
96	27,43
136	38,86
176	50,29
216	61,71
256	73,14
296	84,57
336	96

Dans chaque cas, on détermine le temps en divisant la distance parcourue par la vitesse constante correspondante (3 m/s pour P et 3,5 m/s pour Q). Par exemple, Q parcourt 56 m en $\dfrac{56 \text{ m}}{3{,}5 \text{ m/s}}$, ou 16 s.
En comparant les tableaux, on constate que P et Q se rencontrent au point X après 16 s (après avoir parcouru 48 m et 56 m respectivement $(16 \cdot 3 = 48$ m et $16 \cdot 3{,}5 = 56))$ et une deuxième fois après 96 s (après avoir parcouru 288 m et 336 m respectivement $(96 \cdot 3 = 288$ m et $96 \cdot 3{,}5 = 336))$.
Donc, P et Q se rencontrent une deuxième fois au point X après 96 s.

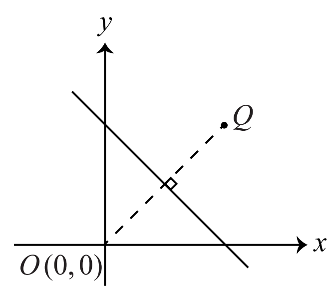
Solution 2
Le cercle a une circonférence de 40 m $(8 + 16 + 16 = 40)$.
Puisque P commence à 8 m du point X, alors P sera au point X après avoir parcouru $8+40p$ mètres, pour chaque valeur entière de p $(p \geq 0)$. (La variable p représente le nombre de tours complets du cercle que P a faits après sa première visite à X.)
De même, puisque Q commence à 16 m du point X, alors Q sera au point X après avoir parcouru $16 + 40q$ mètres, pour chaque valeur entière de de q $(q \geq 0)$.
Supposons que P et Q se rencontrent à X après t secondes. On cherche la deuxième plus petite valeur possible de t.
Puisque P se déplace à 3 m/s, alors après t secondes, P a parcouru $3t$ mètres.
Puisque Q se déplace à 3,5 m/s, alors après t secondes, Q a parcouru $3{,}5t$ mètres.
P et Q se rencontrent au point X après t secondes si $3t = 8 + 40p$ et $3{,}5t = 16 + 40q$, p et q étant des entiers $(p, q \geq 0)$.
On multiplie la première équation par 7 et la deuxième par 6, membre par membre, pour obtenir $21t = 56 + 280p$ et $21t = 96 + 240q$.
Puisque les deux membres de droite égalent $21t$, on a $56 + 280p = 96 + 240q$.
On transforme cette équation pour obtenir les équations équivalentes suiivantes, soit $280p = 40 + 240q$ et $7p = 1 + 6q$.
Puisqu'on cherche la deuxième plus petite valeur de t, on cherche la deuxième plus petite paire d'entiers p et q $(p, q \geq 0)$ qui vérifient cette équation.
On procède en considérant les valeurs successives de q et les valeurs correspondantes de $1+6q$ jusqu'à ce que l'on obtienne une deuxième valeur de q pour laquelle $1 + 6q$ est un multiple de 7 :

q	$1+6q$	Multiple of 7 ?
1	7	oui
2	13	non
3	19	non
4	25	non
5	31	non
6	37	non
7	43	non
8	49	oui

Donc, P et Q se rencontrent une deuxième fois au point X lorsque $p = 7$ et $q = 8$.
Lorsque $p = 7$, on a $3t = 8 + 40p$, d'où $3t = 8 + 40(7)$, ou $3t = 288$, ou $t = 96$.

Réponse : 96

6. Toute droite est déterminée par deux points sur la droite.
   Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x + y = 1$.
   Soit d la droite d'équation $y = kx$ et d' l'image de d par une réflexion par rapport à $\mathcal{D}$.
   On déterminera la pente et l'ordonnée à l'origine de d' en trouvant deux points sur d' et en utilisant ces points pour déterminer la pente et l'équation de la droite, ainsi que son ordonnée à l'origine.
   Le premier point que l'on utilise est le point d'intersection P de la droite d, d'équation $y = kx$, et de l'axe de réflexion $\mathcal{D}$.
   On peut récrire l'équation de l'axe de réflexion sour la forme $y = -x + 1$. On constate que la droite a pour pente -1.
   Puisque $k \neq -1$, alors d n'est pas parallèle à $\mathcal{D}$ et il y a donc un point d'intersection.
   Puisque P est situé sur d, son image par réflexion sera sur l'image d'.
   Puisque P est situé sur $\mathcal{D}$, son image par réflexion sera sur $\mathcal{D}$.
   Donc, P est situé sur d'.
   Pour déterminer l'abscisse de P, on reporte $y = kx$ dans l'équation $x + y = 1$. On obtient $x + kx = 1$, ou $x(k + 1) = 1$, d'où $x = \dfrac{1}{k+1}$.
   Puisque P est situé sur d, d'équation $y = kx$, l'ordonnée de P est $y = k \cdot \dfrac{1}{k+1}$, ou $\dfrac{k}{k+1}$.
   P a donc pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{k}{k+1}\right)$.
   On considère maintenant le point $O(0, 0)$ sur d.
   Soit Q l'image de O par rapport à $\mathcal{D}$.
   Puisque Q est l'image de O par rapport à $\mathcal{D}$, alors OQ est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.
   Puisque $\mathcal{D}$ a une pente de -1, toute droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ a une pente égale à $-\frac{1}{-1}$, ou 1.
   Donc, OQ a pour pente 1.
   Puisque O est l'origine $(0, 0)$, la droite qui passe par O et Q a pour équation $y = x$.



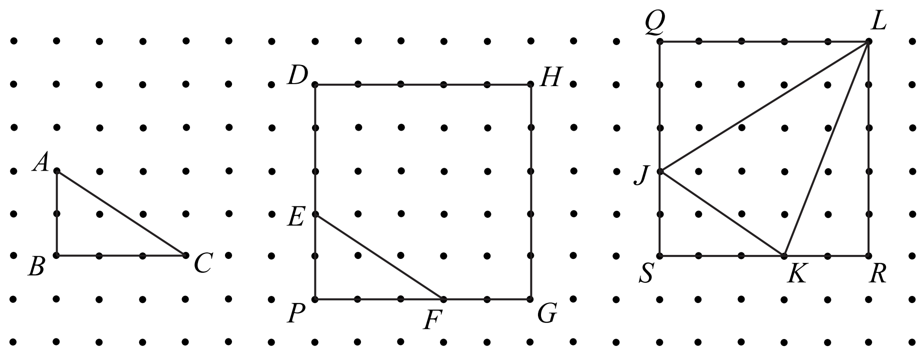
   Donc, Q a des coordonnées de la forme (q, q), q étant un nombre réel quelconque.
   Puisque Q est l'image de O, le milieu de OQ doit être situé sur $\mathcal{D}$.
   Puisque O et Q ont pour coordonnées $O(0, 0)$ et $Q(q, q)$ le milieu de OQ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}(0 + q), \frac{1}{2}(0 + q))$, ou $(\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}q)$.
   Puisque ce point est situé sur la droite d'équation $x + y = 1$, alors $\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q = 1$, d'où $q = 1$.
   Donc, Q a pour coordonnées $(1, 1)$.
   Donc, d' passe par les points $Q(1, 1)$ et $P\left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{k}{k+1}\right)$.
   La pente de d' est donc égale à : $\dfrac{1 - \frac{k}{k+1}}{1 - \frac{1}{k+1}} = \dfrac{\frac{k+1}{k+1} - \frac{k}{k+1}}{\frac{k+1}{k+1} - \frac{1}{k+1}} = \dfrac{\frac{1}{k+1}}{\frac{k}{k+1}} = \dfrac{1}{k}$ (On sait que $k \neq 0$.)
   Donc, d' a pour équation $y = \dfrac{1}{k}x + b$, b étant un nombre réel quelconque.
   Puisque $Q(1, 1)$ est situé sur d', alors $1 = \dfrac{1}{k} + b$, d'où $b = \dfrac{k-1}{k}$.
   Donc, la pente de d' est égale à $\dfrac{1}{k}$ l'ordonnée à l'origine de d' est égale à $\dfrac{k-1}{k}$.

   Réponse : La pente est $\dfrac{1}{k}$; l'ordonnée à l'origine est $\dfrac{k-1}{k}$

Partie B

1. (a) Le triangle ABC est rectangle en B.
On a aussi $AB = 2$ et $BC = 3$.
Puisque le triangle ABC est rectangle en B, son aire est égale à $\frac{1}{2}AB \cdot BC$. Elle est donc égale à $\frac{1}{2}(2)(3)$, ou 3.

(b) On prolonge DE et GF jusqu'à ce qu'ils se coupent en P, comme dans la figure ci-dessous.



On peut donc considérer la figure $DEFGH$ comme un rectangle $DHGP$ dont on a enlevé le triangle EPF.
Or, $DHGP$ est un carré, car $DH = 5$ et $HG = 5$.
De plus, le triangle EPF et le triangle ABC sont isométriques, car ils sont rectangles et ont une base de 3 et une hauteur de 2.
L'aire de $DEFGH$ est donc égale à l'aire de $DHGP$ moins celle du triangle EPF. Elle est donc égale à $5^2 - 3$, ou 22.

(c) On ajoute des droites horizontales ou verticales aux points J, K et L de manière à encadrer le triangle dans le rectangle $QLRS$, comme dans la figure ci-dessus.
On calculera l'aire du triangle JKL en calculant l'aire du rectangle $QLRS$ et en soustrayant l'aire des triangles JSK, LQJ et LRK.
Or, $QLRS$ est un carré avec des côtés de longueur 5.
Les triangle JSK a une aire de 3, puisque les triangles JSK et ABC sont isométriques.
Le triangle LQJ est rectangle en Q et on a $LQ = 5$ et $JQ = 3$.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}LQ \cdot JQ$, ou $\frac{1}{2}(5)(3)$, ou $\frac{15}{2}$.
Le triangle LRKest rectangle en R et on a $LR = 5$ et $KR = 2$.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}LR \cdot KR$, ou $\frac{1}{2}(5)(2)$, ou 5.
Donc, l'aire du triangle JKL est égale à $25 - 3 - \frac{15}{2} - 5$, ou $\frac{19}{2}$.
(On peut aussi obtenir cette aire au moyen du théorème de Pick qui fait appel au nombre de points de la grille situés à l'intérieur d'un polygone et du nombre de points situés sur les côtés du polygone.)

2. (a) Voici une façon de placer les entiers : $1, 3, 5, 2, 4$
Les différences positives entre les entiers adjacents sont $2, 2, 3, 2$.
Il y a beaucoup d'autres façons de placer les entiers de manière à satisfaire à la condition. (On remarque que la condition est équivalente à celle de placer les entiers de manière à éviter que deux entiers consécutifs soient en positions adjacentes.)

(b) (i) Dans n'importe quel arrangement, l'entier 10 doit être placé à côté d'au moins un autre entier.
Dans la liste $1, 2, 3, \ldots, 20$, les entiers les plus éloignés de 10 sont 1 et 20.
Les différences positives entre 10 et ces deux entiers sont 9 et 10.
Donc, la différence positive entre 10 et tout autre entier de la liste est inférieure ou égale à 10.
Donc dans n'importe quel arrangement, il doit y avoir une différence qui est inférieure à 10. Ainsi N (la plus petite de ces différences) est inférieure ou égale à 10, c'est-à-dire que N ne peut pas être supérieur ou égal à 11.

(ii) On considère l'arrangement suivant :

$$10, 20, 9, 19, 8, 18, 7, 17, 6, 16, 5, 15, 4, 14, 3, 13, 2, 12, 1, 11$$

Les différences positives entre les entiers adjacents sont :

$$10, 11, 10, 11, 10, 11, 10, 11, 10, 11, 10, 11, 10, 11, 10, 11, 10, 11, 10$$

La plus petite de ces différences positives est 10.

(c) On considère l'entier 14 qui est le nombre du milieu dans la liste $1, 2, 3, \ldots, 25, 26, 27$.
La plus grande différence positive possible entre 14 et n'importe quel autre nombre de la liste est 13.
Donc dans n'importe quel arrangement, il doit y avoir une différence positive qui n'est pas plus grande que 13.
Donc N, la plus petite des différences positives, est inférieure ou égale à 13.
Pour montrer que la plus grande valeur possible de N est 13, il faut montrer l'existence d'un arrangement avec $N = 13$, car il se pourrait que pour une raison ou une autre, on ne puisse trouver une liste avec $N = 13$.
Voici un tel arrangement :

$$14, 27, 13, 26, 12, 25, 11, 24, 10, 23, 9, 22, 8, 21, 7, 20, 6, 19, 5, 18, 4, 17, 3, 16, 2, 15, 1$$

Les différences positives entre les entiers adjacents sont :

$$13, 14, 13, 14, 13, 14, 13, 14, 13, 14, 13, 14, 13, 14, 13, 14, 13, 14, 13, 14, 13, 14, 13, 14, 13, 14$$

La plus grande valeur possible de N est 13.

3. (a) Pour montrer que le nombre Martel de 6 est 12, il faut montrer que :

- il existe un ou des entiers distincts supérieurs ou égaux à $M = 12$ de manière que le produit de ces entiers et de 6 est un carré parfait et
- $M = 12$ est la plus petite valeur de M ($M > 6$) qui satisfait à cette propriété.

On remarque d'abord que $6 \times 8 \times 12 = 576 = 24^2$. La première condition est donc vérifiée. Ensuite, pour que 6 fois le produit d'un ou des entiers soit un carré parfait, ce produit doit admettre un nombre impair de diviseurs 3. En effet, 6 admet un diviseur 3 et le produit, qui est un carré parfait, doit admettre un nombre pair de diviseurs 3. Puisque ce produit admet un nombre impair de diviseurs 3, les facteurs du produit ne peuvent pas tous admettre un nombre pair de diviseurs 3. Au moins un de ces facteurs doit admettre un nombre impair de diviseurs 3. Or, les deux premiers multiples de 3 supérieurs à 6 sont 9 et 12 et 9 admet un nombre pair de diviseurs 3. Donc, le produit des facteurs doit être au moins aussi grand que 12. On doit donc avoir $M \geq 12$.
Ceci explique pourquoi 12 est le nombre Martel de 6.

(b) Le nombre Martel de 8 est 15.

Il n'était pas nécessaire de justifier sa réponse. On présente tout de même un argument semblable à celui de la partie (a).
On remarque d'abord que $8 \times 10 \times 12 \times 15 = 14\,400 = 120^2$.
Donc $M \leq 15$.
Est-il possible que $M < 15$?
Puisque 8 admet un nombre impair de diviseurs 2, le nombre Martel doit avoir un autre facteur qui admet un nombre impair de diviseurs 2.
Puisque $M \leq 15$, il suffit de considérer les entiers entre 8 et 15 qui admettent un nombre impair de diviseurs 2. Il s'agit de 10 et 14.
Puisque 10 est un facteur qui produit le nombre Martel, et puisque 10 admet un nombre impair de diviseurs 5, il faut admettre un autre facteur qui admet un nombre impair de diviseurs 5. Seul 15 vérifie cette condition.
Si 14 est un des facteurs qui produisent le nombre Martel, alors puisque 14 admet un nombre impair de facteurs 7, il faudrait un autre multiple de 7 comme facteur. Ce multiple doit être supérieur ou égal à 21, ce qui est trop grand.
Il est donc impossible que $M < 15$. Donc $M = 15$.

(c) Soit k un entier strictement positif. On considère $n = 8k^2 = 2(2k)^2$.
On voit que n ne peut être un carré parfait, puisque $(2k)^2$ est un carré parfait et qu'il admet donc un nombre pair de diviseurs 2. Donc, $n = 8k^2 = 2(2k)^2$ admet un nombre impair de diviseurs 2.
Le produit $8k^2 \times 10k^2 \times 12k^2 \times 15k^2 = 14\,400k^8 = (120k^4)^2$ est un carré parfait.
Donc, le nombre Martel de $n = 8k^2$ est inférieur ou égal à $15k^2$, ce qui est inférieur à $2n = 16k^2$.
Puisqu'il existe une infinité de valeurs de k, il existe une infinité d'entiers n qui vérifient la condition donnée.
(Il existe bien d'autres façons de résoudre ce problème.)

(d) *Solution 1*

Soit n un entier strictement positif.
On démontre d'abord que le nombre Martel de n existe.
Puisque $n \times 4n = 4n^2 = (2n)^2$, il existe bien un ensemble d'un entier ou d'entiers distincts supérieurs à n dont le produit avec n est un carré parfait.
Donc, le nombre Martel M de n existe et $n < M \leq 4n$. Le fait que $n \times 4n$ soit un carré parfait n'implique pas que $4n$ est le nombre Martel. Il reste à déterminer s'il existe un entier inférieur à $4n$ (et supérieur à n) qui satisfait à cette propriété ; s'il n'en existe pas, alors $4n$ est le nombre Martel.

On démontre maintenant que le nombre Martel de n est supérieur ou égal à $n + 3$.
Pour le faire, on prouve que le nombre Martel de n ne peut être inférieur à $n + 3$.
Puisque le nombre Martel de n est supérieur à n, les seuls autres entiers inférieurs à $n+3$ sont $n + 1$ et $n + 2$.

1er cas : Le nombre Martel de n peut-il être $n + 1$?
S'il l'était, il existerait un ou des entiers distincts supérieurs à n et inférieurs ou égaux à $n + 1$ dont le produit avec n est un carré parfait.
Puisque $n + 1$ est le seul entier dans cet intervalle, alors pour que $n + 1$ soit le nombre Martel de n, il faut que $n(n + 1)$ soit un carré parfait.
On remarque que n^2 et $(n + 1)^2$, ou $n^2 + 2n + 1$ sont deux carrés parfaits consécutifs.
Puisque n est un entier strictement positif, alors $n^2 = n \times n < n(n + 1)$.
De plus, $n(n + 1) < (n + 1)(n + 1) = (n + 1)^2$.
En d'autres mots, $n^2 < n(n + 1) < (n + 1)^2$.
Puisque $n(n+1)$ se situe entre deux carrés parfaits consécutifs, alors $n(n+1)$ ne peut être un carré parfait.
Donc, $n + 1$ ne peut être le nombre Martel de n.

2e cas : Le nombre Martel de n peut-il être $n + 2$?
S'il l'était, il existerait un ou des entiers distincts supérieurs à n et inférieurs ou égaux à $n + 2$ dont le produit avec n est un carré parfait.
Puisque $n + 1$ et $n + 2$ sont les seuls entiers dans cet intervalle, alors pour que $n + 2$ soit le nombre Martel de n, il faut que $n(n + 2)$ ou $n(n + 1)(n + 2)$ soit un carré parfait. (Le produit doit admettre $n + 2$ comme facteur, autrement le nombre Martel serait inférieur à $n + 2$. Le produit peut admettre ou non $n + 1$ comme facteur.)
Or, $n^2 < n(n + 2)$ et $n(n + 2) = n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.
Donc, $n^2 < n(n + 2) < (n + 1)^2$. Selon un argument semblable à celui du 1er cas, $n(n + 2)$ n'est pas un carré parfait.
Il reste à démontrer que $n(n + 1)(n + 2)$ n'est pas un carré parfait.
On fera appel aux trois faits suivants :

(F1) La différence entre deux carrés parfaits non nuls ne peut égaler 1.

Soit a^2 le plus petit de deux carrés parfaits ($a \geq 1$).
Le carré parfait plus grand le plus près est $(a + 1)^2$. La plus petite différence possible entre a^2 et un carré parfait plus grand est égale à $(a + 1)^2 - a^2$, ou $a^2 + 2a + 1 - a^2$, ou $2a + 1$ dont la valeur est supérieure à 3, puisque $a \geq 1$.
Donc, la différence entre deux carrés parfaits non nuls ne peut égaler 1.

(F2) Le plus grand commun diviseur que deux des entiers $n, n+1$ et $n+2$ peuvent partager est 2.

Supposons que deux entiers sont des multiples de d.
Leur différence doit aussi être un multiple de d.

Les différences possibles entre deux des entiers $n, n+1$ et $n+2$ sont 1 et 2.
Donc, les diviseurs communs possibles sont les diviseurs positifs de 1 et 2, qui sont 1 et 2.
Donc, le plus grand commun diviseur que deux des entiers $n, n+1$ et $n+2$ peuvent partager est 2.

(F3) Si le produit de deux entiers strictement positifs ou plus est un carré parfait et si chaque paire de ces entiers n'admet aucun diviseur commun supérieur à 1, alors chacun de ces entiers doit être un carré parfait.

Soit p un nombre premier qui est un des facteurs de ce produit.
Puisque le produit est un carré parfait, il admet un nombre pair de diviseurs p.
Or, p ne peut diviser plus d'un des entiers qui sont les facteurs du produit. Il doit donc diviser un des facteurs un nombre pair de fois et ne peut diviser un autre facteur.
Ceci doit être vrai pour n'importe quel nombre premier p qui est un diviseur du produit. Donc, chaque facteur du produit doit être un carré parfait.

On considère $n(n+1)(n+2)$ et on suppose qu'il s'agit d'un carré parfait.
Si n est impair, alors $n+1$ est pair et $n+2$ est impair.
Puisque le plus grand commun diviseur que deux de ces facteurs peuvent partager est 2 (d'après (F2)) et qu'un seul de ces facteurs est pair, alors aucune paire de ces facteurs n'admet un diviseur commun supérieur à 1.
D'après (F3), chacun des entiers $n, n+1$ et $n+2$ doit être un carré parfait.
Or selon (F1), la différence entre deux carrés parfaits ne peut égaler 1.
Donc, n ne peut être impair.
Si n est pair, alors $n+1$ est impair et $n+2$ est pair.
D'après un argument précédent, un diviseur premier supérieur à 2 d'un de ces entiers ne peut être un diviseur d'un des autres entiers. De plus, ce diviseur doit paraître un nombre pair de fois comme diviseur de l'entier.
Puisque $n+1$ est impair, il n'admet aucun diviseur 2. Il doit donc être impair, puisque ses diviseurs premiers paraissent un nombre pair de fois.
D'après (F1), ni n ni $n+2$ ne peut être un carré parfait.
Donc, $n = 2b^2$ et $n+2 = 2c^2$, b et c étant des entiers strictement positifs quelconques. En effet, n et $n+2$ sont pairs, leurs autres diviseurs premiers paraissent un nombre pair de fois et le diviseur 2 ne peut paraitre un nombre pair de fois (autrement n et $n+2$ seraient des carrés parfaits).
On a donc $2 = (n+2) - n = 2c^2 - 2b^2$, d'où $c^2 - b^2 = 1$, ce qui contredit (F1).
Donc, n ne peut être pair et $n(n+1)(n+2)$ ne peut être un carré parfait.

Donc, le nombre Martel de n existe et ne peut égaler $n+1$ ou $n+2$. Il doit donc être supérieur ou égal à $n+3$.

Solution 2
Soit n un entier strictement positif.
On démontre d'abord que le nombre Martel de n existe.
Puisque $n \times 4n = 4n^2 = (2n)^2$, il existe bien un ensemble d'un entier ou d'entiers distincts supérieurs à n dont le produit avec n est un carré parfait.
Donc, le nombre Martel M de n existe et $n < M \leq 4n$. Le fait que $n \times 4n$ soit un carré parfait n'implique pas que $4n$ est le nombre Martel. Il reste à déterminer s'il existe un entier inférieur à $4n$ (et supérieur à n) qui satisfait à cette propriété ; s'il n'en existe pas, alors $4n$ est le nombre Martel.

Pour montrer que le nombre Martel de n est supérieur ou égal à $n+3$, on montre d'abord que si j est un entier strictement positif, alors ni $j(j+1)$ ni $j(j+2)$ ne peut être un carré parfait :

> On remarque que j^2 et $(j+1)^2$, ou j^2+2j+1 sont des carrés parfaits consécutifs.
> Puisque j est un entier strictement positif, $j^2 = j \times j < j(j+1) < j(j+2)$.
> De plus, $j(j+1) < (j+1)(j+1) = (j+1)^2$ et $j(j+2) = j^2+2j < j^2+2j+1 = (j+1)^2$.
> On a donc $j^2 < j(j+1) < j(j+2) < (j+1)^2$.
> Puisque $j(j+1)$ et $j(j+2)$ sont situés entre deux carrés parfaits consécutifs, alors ni $j(j+1)$ ni $j(j+2)$ ne peut être un carré parfait.

Pour démontrer que le nombre Martel de n est supérieur ou égal à $n+3$, on démontre qu'il ne peut être inférieur à $n+3$.
Puisque le nombre Martel de n est supérieur à n, les seuls autres entiers inférieurs à $n+3$ sont $n+1$ et $n+2$.

1er cas : Le nombre Martel de n peut-il être $n+1$?
S'il l'était, il existerait un ou des entiers distincts supérieurs à n et inférieurs ou égaux à $n+1$ dont le produit avec n est un carré parfait.
Puisque $n+1$ est le seul entier dans cet intervalle, alors pour que $n+1$ soit le nombre Martel de n, il faut que $n(n+1)$ soit un carré parfait.
En posant $j = n$ dans la propriété ci-haut, on sait que ce n'est pas possible. Donc, $n+1$ ne peut être le nombre Martel de n.

2e cas : Le nombre Martel de n peut-il être $n+2$?
S'il l'était, il existerait un ou des entiers distincts supérieurs à n et inférieurs ou égaux à $n+2$ dont le produit avec n est un carré parfait.
Puisque $n+1$ et $n+2$ sont les seuls entiers dans cet intervalle, alors pour que $n+2$ soit le nombre Martel de n, il faut que $n(n+2)$ ou $n(n+1)(n+2)$ soit un carré parfait. (Le produit doit admettre $n+2$ comme facteur, autrement le nombre Martel serait inférieur à $n+2$. Le produit peut admettre ou non $n+1$ comme facteur.)
En posant $j = n$ dans la propriété ci-haut, on sait que $n(n+2)$ ne peut être un carré parfait.
Il reste à démontrer que $n(n+1)(n+2)$ n'est pas un carré parfait.
Suppons que $n(n+1)(n+2)$ est un carré parfait. (On démontrera que cela ne peut être vrai.)
Si n est un carré parfait, alors $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{n} = (n+1)(n+2)$ est un carré parfait. En posant $j = n+1$ dans la propriété ci-haut, on sait que ce n'est pas possible.
Donc, n ne peut être un carré parfait dans ce cas.
Il doit donc y avoir un nombre premier p qui divise n un nombre impair de fois. (En effet, un entier supérieur à 1 est un carré parfait lorsque tous ses diviseurs premiers paraissent un nombre pair de fois dans sa factorisation première.)
Puisque $n(n+1)(n+2)$ est un carré parfait, alors p parait un nombre pair de fois comme diviseur de $n(n+1)(n+2)$. Donc, p est un diviseur de $n+1$ ou de $n+2$.
Si $n+1$ et n sont tous deux multiples de p, alors leur différence est aussi un multiple de p. Donc, 1 est un multiple de p, ce qui est impossible.
Donc, $n+2$ est un multiple de p. Donc, p est aussi un diviseur de la différence de $n+2$ et n, c'est-à-dire un diviseur de 2. Donc $p = 2$.
Donc, $p = 2$ est le seul nombre premier qui divise n et $n+2$ un nombre impair de fois.
Donc, n et $n+2$ égalent chacun 2 fois un carré parfait.
Donc, $n = 2b^2$ et $n+2 = 2c^2$, b et c étant des entiers strictement positifs ($b < c$).

Donc, $2 = (n+2) - n = 2c^2 - 2b^2$, d'où $1 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$.
Puisque c et b sont des entiers strictement positifs ($c > b$) et que $(c+b)(c-b) = 1$, alors $c + b = c - b = 1$, d'où $c = 1$ et $b = 0$, ce qui est une contradiction.
Donc, $n(n+1)(n+2)$ ne peut être un carré parfait. Donc $n+2$ n'est pas le nombre Martel de n.

Donc, le nombre Martel de n existe et ne peut égaler $n + 1$ ou $n + 2$. Il doit donc être supérieur ou égal à $n + 3$.