Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

le mercredi 23 novembre 2016

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 24 novembre 2016

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Le questionnaire est divisé en deux parties. Dans chaque partie, les questions sont à peu près en ordre croissant de difficulté. Les premiers problèmes de la partie B sont probablement plus faciles que les derniers de la partie A.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, et le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca. Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire

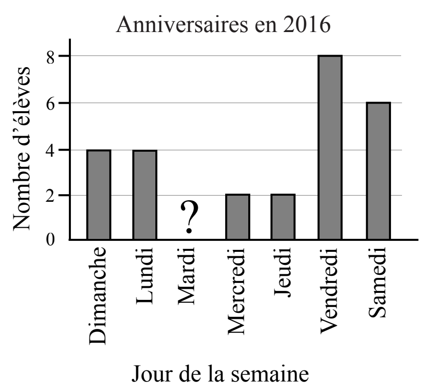
Remarques :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Exprimer les réponses sous forme de nombres exacts simplifiés, sauf indication contraire. Par exemple, $\pi + 1$ et $1 - \sqrt{2}$ sont des nombres exacts simplifiés.
4. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.
6. Aucun élève ne peut passer le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur et le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire la même année.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Laquelle des fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{8}$ et $\frac{11}{12}$ est la plus petite ?

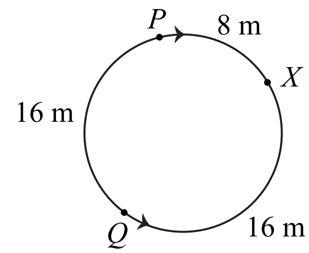
2. Le diagramme ci-contre représente combien d'élèves de la classe de Mme Gupta fêtent leur l'anniversaire chaque jour de la semaine en 2016. Sachant que 25 % des élèves de la classe ont leur anniversaire un jour qui commence par la lettre M, combien d'élèves de la classe ont leur anniversaire un mardi en 2016 ?



3. Pierre place 12 obstacles en vue d'une course de 600 mètres. Il y a une distance de 50 mètres entre la ligne de départ et le premier obstacle. Il y a une distance de 55 mètres entre le dernier obstacle et la ligne d'arrivée. Il y a une distance de d mètres entre chaque paire d'obstacles consécutifs. Quelle est la valeur de d ?

4. Dina a une machine à calculer, nommée f, qui reçoit un nombre comme entrée et qui calcule une sortie. La machine f calcule la sortie en multipliant l'entrée par 2 puis en soustrayant 3. Par exemple, si l'entrée est 2,16 alors la sortie est 1,32. Si Dina présente x comme entrée dans f, la sortie est un nombre que Dina donne à f comme entrée. Dina obtient -35 comme deuxième sortie. Quelle est la valeur de x ?

5. Dans la figure ci-contre, les positions initiales de P et Q sont indiquées et X est un point fixe sur le cercle. Au départ, la distance la plus courte sur le cercle entre P et X est de 8 m, celle entre Q et X est de 16 m et celle entre P et Q est de 16 m. P et Q se déplacent sur le cercle en sens contraires indiqués par les flèches. P se déplace à 3 m/s et Q se déplace à 3,5 m/s. Sachant que P et Q commencent à se déplacer en même temps, après combien de secondes P et Q se rencontreront-ils au point X la deuxième fois ?

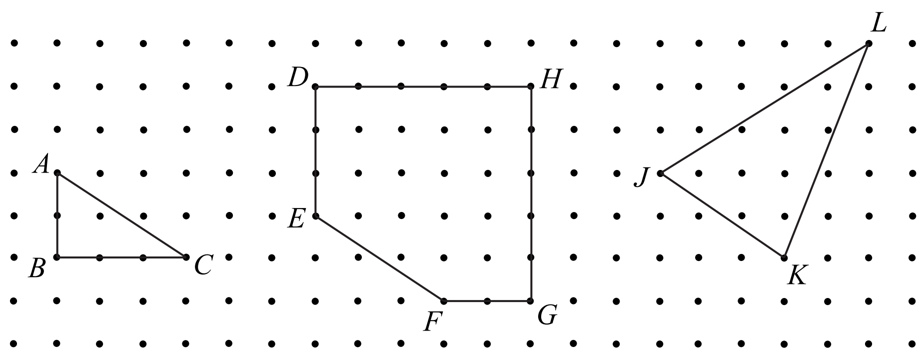


6. Une droite a pour équation $y = kx$, où $k \neq 0$ et $k \neq -1$. La droite est réfléchie par rapport à la droite d'équation $x + y = 1$. Déterminer, en fonction de k, la pente et l'ordonnée à l'origine de l'image.

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Dans la grille suivante, il y a une distance de 1 entre deux points adjacents dans une même colonne ou deux points adjacents dans une même rangée.



   (a) Déterminer l'aire du triangle ABC.

   (b) Déterminer l'aire de la figure $DEFGH$.

   (c) Déterminer l'aire du triangle JKL.

2. Étant donné la liste d'entiers $1, 3, 9, 4, 11$, les différences positives entre les nombres adjacents de la liste sont $3-1 = 2$, $9-3 = 6$, $9-4 = 5$ et $11-4 = 7$. La plus petite différence positive entre n'importe quels deux entiers adjacents de la liste est 2.

   (a) Placer les entiers $1, 2, 3, 4, 5$ de manière que la plus petite différence positive entre n'importe quels deux entiers adjacents de cette liste soit 2.

   (b) On place les vingt entiers $1, 2, 3, \ldots, 18, 19, 20$ de manière que la plus petite différence positive entre n'importe quels deux entiers adjacents de la liste soit N.

      (i) Expliquer pourquoi N ne peut pas être supérieur ou égal à 11.

      (ii) Trouver un arrangement des entiers pour lequel $N = 10$. (Les parties (i) et (ii) démontrent que la plus grande valeur possible de N est 10.)

   (c) On place les vingt-cinq entiers $1, 2, 3, \ldots, 25, 26, 27$ de manière que la plus petite différence positive entre n'importe quels deux entiers adjacents de la liste soit N. Quelle est la plus grande valeur possible de N ? Démontrer que cette réponse est correcte.

3. Étant donné un entier strictement positif n, le *nombre Martel de n* est le plus petit entier M ($M > n$) pour lequel il existe un ou des entiers distincts supérieurs à n et inférieurs ou égaux à M de manière que le produit de ces entiers et de n soit un carré parfait.

   Par exemple, le nombre Martel de 3 est 8 puisque $3 \times 6 \times 8 = 12^2$ et on peut démontrer qu'il est impossible de multiplier 3 par un ou des entiers supérieurs à 3 et inférieurs à 8 pour obtenir un carré parfait.

   (a) Le nombre Martel de 6 est 12. Montrer pourquoi cet énoncé est vrai.

   (b) Déterminer le nombre Martel de 8. (Il n'est pas nécessaire de justifier sa réponse.)

   (c) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n pour lesquels n n'est pas un carré parfait et le nombre Martel de n est inférieur à $2n$.

   (d) Démontrer que pour tout entier strictement positif n, le nombre Martel de n existe et qu'il est supérieur ou égal à $n + 3$.