Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Hypatie 2015

le jeudi 16 avril 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 17 avril 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) La distance de l'arrière d'un wagon ou de la locomotive jusqu'à l'arrière du wagon suivant est la somme de la distance de 2 m entre les wagons et de la longueur de 15 m d'un wagon, soit 17 m.
La distance de l'arrière de la locomotive jusqu'à l'arrière du 10^e wagon est donc égale à 10×17 m, ou 170 m.
Puisque la locomotive a une longueur de 26 m, alors un train qui a 10 wagons a une longueur totale de $(26 + 170)$ m, ou 196 m.

(b) Si on omet la longueur de la locomotive, soit 26 m, le train a une longueur de $(2015 - 26)$ m, ou 1989 m. Or, de l'arrière d'un wagon ou de la locomotive jusqu'à l'arrière du wagon suivant, il y a une distance de 17 m. Combien y a-t-il de longueurs de 17 m dans 1989 m ?
Puisque $1989 \div 17 = 117$, il y a 117 longueurs, donc 117 wagons.
OU
Un train qui a n wagons a une longueur de $(26 + 15n + 2n)$ m (la locomotive a une longueur de 26 m, les n wagons ont une longueur totale de $15n$ m et les n espaces devant les wagons ont une longueur totale de $2n$ m).
Un train de n wagons a donc une longueur totale de $(26 + 17n)$ m.
Si un train particulier a une longueur totale de 2015 m, alors $26 + 17n = 2015$, d'où $17n = 1989$, ou $n = 117$.
Un train qui a une longueur totale de 2015 m a 117 wagons.

(c) Un train avec 14 wagons a une longueur totale de $(26 + 17(14))$ m, ou 264 m.
Le temps pendant lequel une partie du train se trouve au Canada et une autre partie aux États-Unis est le temps qu'il met pour traverser la frontière. (Pendant que le train traverse la frontière, il y a une partie du train dans chaque pays.)
Le train commence à traverser la frontière lorsque le devant de la locomotive arrive à la frontière. Le train finit de traverser la frontière lorsque l'arrière du dernier wagon arrive à la frontière, soit lorsque le devant du train a parcouru 264 m de plus.
Le temps que le train met pour traverser la frontière est donc le temps qu'il met pour parcourir une distance de 264 m.
Puisque le train voyage à une vitesse de 1,6 m/s, le temps qu'il met pour parcourir 264 m est égal à $\frac{264}{1,6}$ s, ou 165 s.
Donc, une partie du train se trouve au Canada et une autre partie du train se trouve aux États-Unis pendant 165 s.

2. (a) Le nombre de deux chiffres, AB, est égal à $10A + B$ et le nombre BA est égal à $10B + A$.
L'équation $AB - BA = 72$ devient $(10A + B) - (10B + A) = 72$, ou $9A - 9B = 72$, d'où $A - B = 8$.
Puisque A et B sont des chiffres strictement positifs, alors $A - B = 8$ lorsque $A = 9$ et $B = 1$ seulement. (On peut le vérifier en vérifiant toutes les soustractions possibles.)
Donc, l'entier AB est 91.
(On peut vérifier que $AB - BA = 91 - 19 = 72$.)

(b) Les entiers positifs de deux chiffres, MN et NM, égalent respectivement $10M + N$ et $10N + M$.
L'équation $MN - NM = 80$ devient $(10M + N) - (10N + M) = 80$, ou $9M - 9N = 80$, ou $9(M - N) = 80$.
Puisque M et N sont des chiffres strictement positifs, alors $M - N$ est un entier et $9(M - N)$ est donc un multiple de 9.
Or, 80 is n'est pas un multiple de 9. L'équation $9(M - N) = 80$ a donc un membre de gauche qui est un multiple de 9 et un membre de droite qui ne l'est pas, ce qui est impossible.

L'équation n'admet donc aucune solution. Il est donc impossible que $MN - NM = 80$.

(c) Les entiers positifs de trois chiffres, PQR et RQP, égalent respectivement $100P+10Q+R$ et $100R + 10Q + P$.
L'expression $PQR - RQP$ devient $(100P + 10Q + R) - (100R + 10Q + P)$, ou $99P - 99R$, ou $99(P - R)$.
Puisque P et R sont des chiffres strictement positifs, la valeur maximale possible de $P - R$ est 8 (lorsque P prend la plus grande valeur possible et R prend la plus petite valeur possible, c'est-à-dire lorsque $P = 9$ et $R = 1$).
Puisque $P > R$, la valeur minimale possible de $P - R$ est 1 (par exemple, lorsque $P = 9$ et $R = 8$).
On a donc $1 \leq P - R \leq 8$, ce qui signifie qu'il y a exactement 8 valeurs entières possibles de $P - R$.
(On peut vérifier qu'il existe des valeurs de P et de R telles que $P - R$ soit égal à chacun des entiers de 1 à 8.)
Puisque $PQR - RQP = 99(P - R)$ et que l'expression $P - R$ peut prendre exactement 8 valeurs possibles, alors l'expression $PQR - RQP$ peut prendre exactement 8 valeurs possibles.
(On remarque que la valeur de $PQR - RQP$ ne dépend pas de la valeur de Q.)

3. (a) La figure 1 montre comment $T(3) = 9$.
Pour déterminer $T(4)$, on ajoute un segment à ceux de la figure 1, comme dans la figure 2.
Or, ce 4ᵉ segment coupe chaque autre segment exactement une fois, ce qui crée 3 nouveaux points d'intersection (les points $1, 2, 3$).
Ce 4ᵉ segment ajoute également 2 nouvelles extrémités (les points 4 et 5) distinctes des trois points d'intersection.
De plus, tous les points qui illustrent $T(3)$ (figure 1) continuent d'exister dans l'illustration de $T(4)$ (figure 2) et ils sont distincts des points qu'on vient d'ajouter. On a donc :

$$\begin{aligned} T(4) &= T(3) + 3 + 2 \\ &= 9 + 3 + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

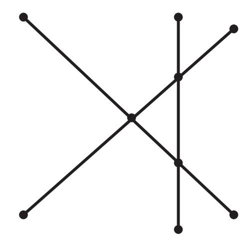

Figure 1

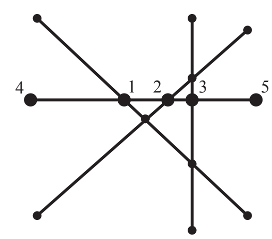

Figure 2

Pour déterminer $T(5)$, on ajoute un segment à ceux de la figure 2, comme dans la figure 3.
Or, ce 5ᵉ segment coupe chaque autre segment exactement une fois, ce qui crée 4 nouveaux points d'intersection (les points $1, 2, 3, 4$).
Ce 4ᵉ segment ajoute également 2 nouvelles extrémités (les points 5 et 6) distinctes des quatre points d'intersection.

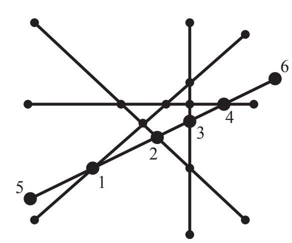

Figure 3

De plus, tous les points qui illustrent $T(4)$ (figure 2) continuent d'exister dans l'illustration de $T(5)$ (figure 3) et ils sont distincts des points qu'on vient d'ajouter. On a donc :

$$\begin{aligned} T(5) &= T(4)+4+2 \\ &= 14+4+2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Donc $T(4)=14$ et $T(5)=20$.

(b) Comme dans la partie (a), on déterminera $T(n)$ à partir de $T(n-1)$ pour tout entier n, $n \geq 2$.
Pour déterminer $T(n)$, on ajoute un segment à ceux d'une figure représentative de $T(n-1)$.
Ce $n^{\text{ième}}$ segment coupe chacun des $n-1$ autres segments exactement 1 fois, ce qui crée $n-1$ nouveaux points d'intersection.
Ce $n^{\text{ième}}$ segment ajoute aussi 2 extrémités qui sont distinctes des $n-1$ points d'intersection.
De plus, tous les points qui illustrent $T(n-1)$ continuent d'exister dans l'illustration de $T(n)$ et ils sont distincts des points qu'on vient d'ajouter. On a donc :

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1)+(n-1)+2 \\ T(n) &= T(n-1)+n+1 \end{aligned}$$

Donc $T(n)-T(n-1)=n+1$ pour tout n, $n \geq 2$.

(c) Dans la partie (b), on a obtenu $T(n)-T(n-1)=n+1$, d'où $T(n)=T(n-1)+n+1$.
Lorsqu'on ajoute un $n^{\text{ième}}$ segment, la valeur de $T(n-1)$ est augmentée de $n+1$ pour donner la valeur de $T(n)$.
Par exemple, étant donné $T(1)=2$, alors $T(2)=T(1)+3$, ou $T(2)=2+3$.
On utilise le tableau suivant pour les premières valeurs de $T(n)$.

n	$T(n)=T(n-1)+n+1, n \geq 2$
2	$T(2)=T(1)+3=2+3$
3	$T(3)=T(2)+4=2+3+4$
4	$T(4)=T(3)+5=2+3+4+5$
5	$T(5)=T(4)+6=2+3+4+5+6$
6	$T(6)=T(5)+7=2+3+4+5+6+7$
$\vdots$	$\vdots$

On peut utiliser la régularité dans le tableau pour déterminer une formule pour $T(n)$.
Par exemple, on considère la rangée $n=5$.
$T(5)$ est la somme des entiers de 2 à 6, et 6 est 1 de plus que 5.
Dans chaque rangée n du tableau, $T(n)$ est égal à la somme des entiers de 2 à $n+1$.
(On peut le vérifier.) On peut écrire $T(n-1)=2+3+4+\cdots+n$ pour tout entier n, $n \geq 3$.
Lorsqu'on ajoute un $n^{\text{ième}}$ segment, la valeur de $T(n-1)$ est augmentée de $n+1$ pour donner $T(n)$. Donc $T(n)=T(n-1)+n+1$, d'où $T(n)=(2+3+4+\cdots+n)+n+1$.
On peut récrire cette expression sous la forme suivante :

$$T(n)=1+2+3+4+\cdots+n+n.$$

Puisque la somme des entiers de 1 à n, soit $1+2+3+4+\cdots+n$, est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$, alors $T(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}+n$.

L'équation $T(n) = 2015$ devient :

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} + n &= 2015 \\ n(n+1) + 2n &= 4030 \\ n^2 + 3n &= 4030 \\ n^2 + 3n - 4030 &= 0 \\ (n-62)(n+65) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $n > 0$, alors $n = 62$. (Si on n'avait pas vu comment factoriser, on aurait pu utiliser la formule pour résoudre une équation du second degré.)
La seule valeur de n pour laquelle $T(n) = 2015$ est 62.

4. (a) Puisque $125 = 5^3$, les diviseurs positifs de 125 sont $5^0, 5^1, 5^2$ et 5^3, ou $1, 5, 25$ et 125.
Donc pour tout entier a de 1 à 125, les valeurs possibles de $PGCD(a, 125)$ sont $1, 5, 25$ et 125.
On a $PGCD(a, 125) = 125$ lorsque a est divisible par 125. Puisque $1 \leq a \leq 125$ et qu'il n'y a qu'un multiple de 125 dans cet intervalle, alors $PGCD(a, 125) = 125$ lorsque $a = 125$ seulement.
On a $PGCD(a, 125) = 25$ lorsque a est divisible par 25, mais pas par 125.
Les valeurs possibles de a dans l'intervalle $1 \leq a < 125$ sont 25, 50, 75 et 100.
On a $PGCD(a, 125) = 5$ lorsque a est divisible par 5, mais pas par 25.
Il y a 25 multiples de 5 parmi les entiers de 1 à 125. Cinq de ces multiples sont des multiples de 25.
Les 20 autres multiples sont des multiples de 5, mais pas de 25. Pour ces 20 multiples de 5, on aura $PGCD(a, 125) = 5$.
On a $PGCD(a, 125) = 1$ lorsque a n'est pas divisible par 5.
Puisqu'il y a 25 multiples de 5 parmi les entiers de 1 à 125, il y a 100 entiers, dans cet intervalle, qui ne sont pas multiples de 5.
Pour résumer, si on considère les entiers a dans l'intervalle $1 \leq a \leq 125$, il y a :

- 1 entier a pour lequel $PGCD(a, 125) = 125$
- 4 entiers a pour lesquels $PGCD(a, 125) = 25$
- 20 entiers a pour lesquels $PGCD(a, 125) = 5$
- 100 entiers a pour lesquels $PGCD(a, 125) = 1$

Donc :

$$\begin{aligned} P(125) &= PGCD(1, 125) + PGCD(2, 125) + \cdots + PGCD(124, 125) + PGCD(125, 125) \\ &= 1(125) + 4(25) + 20(5) + 100(1) \\ &= 425 \end{aligned}$$

(b) Puisque r est un nombre premier, les diviseurs positifs de r^2 sont $1, r$ et r^2.
Puisque s est un nombre premier, les diviseurs positifs de s sont 1 et s.
Puisque r et s sont des nombres premiers distincts, alors $PGCD(r^2, s) = 1$. (Le seul diviseur commun aux deux listes est 1.)
D'après la remarque dans l'énoncé, $P(r^2 s) = P(r^2)P(s)$.

On procède comme dans la partie (a) pour déterminer $P(s)$.
Étant donné un entier a dans l'intervalle $1 \leq a \leq s$, les valeurs possibles de $PGCD(a, s)$ sont 1 et s.

Le seul multiple de s dans cet intervalle est s. Il y a donc une seule valeur de a (soit $a = s$) pour laquelle $PGCD(a, s) = s$.
Il y a donc $s - 1$ entiers a pour lesquels $PGCD(a, s) = 1$.
Donc :

$$\begin{aligned} P(s) &= PGCD(1, s) + PGCD(2, s) + \cdots + PGCD(s - 1, s) + PGCD(s, s) \\ &= 1(s) + (s - 1)1 \\ &= 2s - 1 \end{aligned}$$

De même, il y a une seule valeur de a dans l'intervalle $1 \le a \le r^2$ pour laquelle $PGCD(a, r^2) = r^2$, $r-1$ valeurs de a pour lesquelles $PGCD(a, r^2) = r$ et $r^2 - r$ valeurs de a pour lesquelles $PGCD(a, r^2) = 1$.
Donc :

$$\begin{aligned} P(r^2) &= PGCD(1, r^2) + PGCD(2, r^2) + \cdots + PGCD(r^2 - 1, r^2) + PGCD(r^2, r^2) \\ &= 1(r^2) + (r - 1)r + (r^2 - r)1 \\ &= 3r^2 - 2r \\ &= r(3r - 2) \end{aligned}$$

Donc $P(r^2s) = P(r^2)P(s) = r(3r - 2)(2s - 1)$, ce qu'il fallait démontrer.

(c) On démontre que $P(r^2s)$ ne peut être égal à une puissance d'un nombre premier en supposant que $P(r^2s)$ est égal à t^n, t étant un nombre premier quelconque et n un entier strictement positif quelconque, et en obtenant une contradiction.
D'après la partie (b), on a $r(3r - 2)(2s - 1) = t^n$.
Puisque le membre de droite est une puissance d'un nombre premier, les seuls diviseurs du membre de droite sont des puissances de t.
Donc, chaque facteur du membre de gauche doit être une puissance de t.
Puisque r est un nombre premier et qu'il est un facteur, alors $r = t$.
Donc $3r - 2$, ou $3t - 2$, est aussi une puissance de t.
Si $3t - 2 = t$, alors $t = 1$, ce qui n'est pas un nombre premier.
Si $3t - 2 = t^2$ et t est un nombre premier, alors $t^2 - 3t + 2 = 0$, ou $(t - 2)(t - 1) = 0$, d'où $t = 2$ ou $t = 1$. Puisque t est un nombre premier, alors si $3t - 2 = t^2$, on doit avoir $t = 2$.
On peut aussi conclure que si $t = 2$, alors $3t - 2$ est seulement une puissance d'un nombre premier lorsque $3t - 2 = t^2$.
Est-il possible que $3t - 2 = t^u$, u étant un entier supérieur à 2 et t étant un nombre premier, $t > 2$?
Si $u > 2$, alors $t^u > t^2$, puisque $t > 1$.
Si $t > 2$, alors $t^2 - 3t + 2 = (t - 2)(t - 1) > 0$, d'où $t^2 > 3t - 2$.
Donc si $u > 2$, alors $t^u > t^2 > 3t - 2$, d'où $3t - 2 \neq t^u$.
Donc si $3t - 2$ est une puissance de t, alors $t = 2$.
Si $t = 2$, alors t et $3t - 2$ sont tous deux puissances de t, $t = 2$. De plus, $t = 2$ est le seul nombre premier pour lequel cela est vrai.
Or dans ce cas-ci, $2s - 1$ est impair et ne peut donc pas être une puissance de t, $t = 2$.
Cela contredit l'hypthèse du début.
Donc, $P(r^2s) = r(3r - 2)(2s - 1)$ ne peut être une puissance d'un nombre premier.

(d) On remarque que $243 = 3^5$. On considère diverses formes possibles de m.
Supposons que $m = rs$, r et s étant des nombres premiers quelconques.
Donc $P(m) = P(rs) = (2r - 1)(2s - 1)$.
On cherche des nombres premiers r et s pour lesquels $(2r - 1)(2s - 1) = 243$.

On remarque que si p est un nombre premier, alors $p \geq 2$, d'où $2p - 1 \geq 3$.
On pourrait donc avoir $2r - 1 = 3$ et $2s - 1 = 81$ (d'où $r = 2$ et $s = 41$, ces nombres étant premiers) ou $2r - 1 = 9$ et $2s - 1 = 27$ (d'où $r = 5$ (un nombre premier) et $s = 14$ (un nombre composé)).
Donc $P(82) = P(2 \cdot 41) = 3 \cdot 81 = 243$.

Puisque 243 est une puissance d'un nombre premier, alors d'après la partie (c), on a $P(r^2 s) \neq 243$ pour tous nombres premiers r et s.

$P(r^3 s)$ peut-il être égal à 243 ?
En utilisant un développement semblable à celui de la partie (a), on a :

$$P(r^3) = 1(r^3) + (r-1)r^2 + (r^2 - r)r + (r^3 - r^2)(1) = 4r^3 - 3r^2$$

Donc $P(r^3 s) = P(r^3)P(s) = (4r^3 - 3r^2)(2s - 1) = r^2(4r - 3)(2s - 1)$.
Si $r^2(4r - 3)(2s - 1) = 243$, alors puisque r est un facteur premier du membre de gauche, on doit avoir $r = 3$.
Donc $3^2(4(3) - 3)(2s - 1) = 243$, ou $81(2s - 1) = 243$, ou $2s - 1 = 3$, d'où $s = 2$.
Donc $P(54) = P(3^3 \cdot 2) = 243$.

Donc $m = 82$ et $m = 54$ vérifient chacun l'équation $P(m) = 243$.