Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Galois 2015

le jeudi 16 avril 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 17 avril 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) L'abscisse à l'origine d'une droite est l'abscisse du point de la droite qui a une ordonnée de 0. On reporte $y = 0$ dans l'équation de la droite 1. On obtient $0 = 2x+6$, d'où $2x = -6$, ou $x = -3$.
La droite 1 a une abscisse à l'origine de -3. (Le point P a pour coordonnées $(-3, 0)$.)

(b) *Solution 1*
Soit b l'ordonnée à l'origine de la droite 2. Puisque cette droite a une pente de -3, elle a pour équation $y = -3x + b$.
Puisque cette droite passe au point $Q(3, 12)$, les coordonnées de Q vérifient l'équation. On reporte $x = 3$ et $y = 12$ dans l'équation pour obtenir $12 = -3(3) + b$, ou $12 = -9 + b$, ou $b = 21$.
La droite 2 a pour équation $y = -3x + 21$.

Solution 2
La droite de pente m et qui passe au point (x_1, y_1) a pour équation $y - y_1 = m(x - x_1)$.
Puisque la droite 2 a pour pente $m = -3$ et qu'elle passe au point $Q(3, 12)$, elle a pour équation $y - 12 = -3(x - 3)$.

(c) Puisque le point R est sur l'axe des abscisses, il a une ordonnée égale à 0. Pour déterminer son abscisse, on reporte $y = 0$ dans l'équation de la droite 2.
On obtient $0 = -3x + 21$, d'où $3x = 21$, ou $x = 7$.
Le point R a pour coordonnées $(7, 0)$.
On considère la base PR du triangle PQR. La hauteur correspondante est la distance de Q à PR mesurée à la verticale.
Cette distance est égale à l'ordonnée du point Q, soit 12.
Le point P a une abscisse de -3 et le point R a une abscisse de 7. (Les deux points ont une ordonnée de 0.)
Donc, PR a une longueur de $7 - (-3)$, ou 10.
L'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2} \times 10 \times 12$, ou 60.

2. (a) À l'école A, 330 élèves ont reçu un tour et 420 élèves n'en ont pas reçu. Il y a donc $(330 + 420)$ élèves à cette école, ou 750 élèves.
Puisque $\frac{330}{750} = 0{,}44 = 44\,\%$, 44 % des élèves de l'école A ont reçu un tour.

(b) *Solution 1*
À l'école B, 30 % de 240 élèves ont reçu un tour, soit $\frac{30}{100} \times 240$ élèves, ou $\frac{7200}{100}$ élèves, ou 72 élèves.
Si 50 % des 240 élèves recevaient un tour, cela ferait $\frac{1}{2}$ des 240 élèves, soit 120 élèves.
Il y aurait donc $(120 - 72)$ élèves de plus, soit 48 élèves de plus qui recevraient un tour si 50 % des élèves recevaient un tour.

Solution 2
La différence entre 50 % des élèves qui reçoivent un tour et 30 % des élèves qui reçoivent un tour est équivalente à 20 % des élèves.
Donc, 20 % de 240 élèves correspond à $\frac{20}{100} \times 240$ élèves, ou $\frac{4800}{100}$ élèves, ou 48 élèves.
Donc, 48 élèves de plus auraient dû recevoir un tour pour que 50 % des élèves aient reçu un tour.

(c) *Solution 1*
À l'école C, 45 % des 200 élèves ont reçu un tour. Cela correspond à $\frac{45}{100} \times 200$ élèves, ou $\frac{9000}{100}$ élèves, ou 90 élèves.
À l'école D, x % de 300 élèves ont reçu un tour. Cela correspond à $\frac{x}{100} \times 300$ élèves, ou $\frac{300x}{100}$

élèves, ou $3x$ élèves.

Le nombre total d'élèves dans ces deux écoles est de $200 + 300$, ou 500.

En tout, $90 + 3x$ élèves dans ces deux écoles ont reçu un tour.

Puisque 57,6 % des élèves des deux écoles réunies ont reçu un tour, alors $\frac{90+3x}{500} = \frac{57{,}6}{100}$.

On multiplie chaque membre de l'équation par 500 pour obtenir $90 + 3x = 57{,}6 \times 5$, ou $90 + 3x = 288$, ou $3x = 198$, ou $x = 66$.

Solution 2

À l'école C, 45 % des 200 élèves ont reçu un tour. Cela correspond à $\frac{45}{100} \times 200$ élèves, ou $\frac{9000}{100}$ élèves, ou 90 élèves.

Le nombre total d'élèves dans ces deux écoles est de $200 + 300$, ou 500.

Or, 57,6 % des élèves des deux écoles réunies ont reçu un tour. Cela correspond à $\frac{57{,}6}{100} \times 500$ élèves, ou $\frac{28800}{100}$ élèves, ou 288 élèves.

Des 288 élèves qui ont reçu un tour, 90 provenaient de l'école C. Les 198 autres élèves provenaient donc de l'école D.

Donc, 198 des 300 élèves de école D ont reçu un tour. Puisque $\frac{198}{300} = 0{,}66 = 66\,\%$, alors 66 % des élèves de l'école D ont reçu un tour.

Donc, x a une valeur de 66.

(d) À l'école E, n % des 200 élèves ont reçu un tour. Cela correspond à $\frac{n}{100} \times 200$ élèves, ou $\frac{200n}{100}$ élèves, ou $2n$ élèves.

À l'école F, $2n$ % des 250 élèves ont reçu un tour. Cela correspond à $\frac{2n}{100} \times 250$ élèves, ou $\frac{500n}{100}$ élèves, ou $5n$ élèves.

Le nombre total d'élèves dans ces deux écoles est de $(200 + 250)$ élèves, ou 450 élèves.

Le nombre total d'élèves qui ont reçu un tour, dans ces deux écoles, est de $(2n+5n)$ élèves, ou $7n$ élèves.

Entre 55 % et 60 % des 450 élèves des deux écoles ont reçu un tour.

Puisque 55 % de 450 est égal à 247,5 et que 60 % de 450 est égal à 270, alors $7n > 247{,}5$ et $7n < 270$.

On résout $7n > 247{,}5$ et on arrondit au centième près pour obtenir $n > 35{,}35$. On résout $7n < 270$ et on arrondit au centième près pour obtenir $n < 38{,}57$.

Puisque n est un entier et que $n > 35{,}35$ et $n < 38{,}57$, les valeurs de n sont 36, 37 et 38.

3. (a) Puisque 5 est un entier impair, alors n doit être un entier impair pour que $n + 5$ soit un entier pair. (Si n était un entier pair, alors $n + 5$ serait la somme d'un entier pair et d'un entier impair, ce qui est un entier impair.)

(b) On sait que le produit d'un entier pair et de n'importe quels autres entiers, pairs ou impairs, est nécessairement pair.

Soit $N = cd(c + d)$.

Si c ou d est un entier pair (ou si c et d sont des entiers pairs tous les deux), alors N est le produit d'un entier pair et d'autres entiers. Le produit est donc un entier pair.

Si c et d sont des entiers impairs, alors la somme $c + d$ est un entier pair.

Dans ce cas, N est aussi le produit d'un entier pair et d'autres entiers. Ce produit est donc un entier pair.

Il n'y a aucun autre cas possible. Donc si c et d sont des entiers, $cd(c + d)$ est toujours un entier pair.

(c) Puisque e et f sont des entiers strictement positifs tels que $ef = 300$, on cherche d'abord les paires d'entiers positifs qui ont un produit de 300.

On les écrit sous forme de couples (x, y) de manière que $x < y$:

$$(1, 300), (2, 150), (3, 100), (4, 75), (5, 60), (6, 50), (10, 30), (12, 25), (15, 20)$$

Il faut aussi que $e + f$ soit impair, ce qui indique qu'un seul des entiers e et f doit être impair.
Il reste les couples :

$$(1, 300), (3, 100), (4, 75), (5, 60), (12, 25), (15,20)$$

Il existe donc 6 couples (e, f) qui satisfont aux trois conditions.

(d) Puisque m et n sont des entiers strictement positifs, alors $2n > 1$, d'où $2n + m > m + 1$.
Soit $a = m + 1$ et $b = 2n + m$, ou $a = 2n + m$ et $b = m + 1$. On veut donc résoudre l'équation $ab = 9000$.
On cherche d'abord tous les couples (a, b) d'entiers positifs qui ont un produit de 9000.
On considère d'abord la parité (selon que les facteurs sont pairs ou impairs) des facteurs a et b.

Puisque 2 est pair, alors $2n$ est pair pour tout entier strictement positif n.
Si m est pair, alors $2n + m$ est pair, puisque la somme de deux entiers pairs est paire.
Si m est pair, alors $m + 1$ est impair, puisque 1 de plus qu'un nombre pair est impair.
On peut donc conclure que si m est pair, alors a est impair et b est pair, ou a est pair et b est impair.
On dit que les facteurs a et b sont de *parité différente* puisque l'un est pair et l'autre est impair.

Si m est impair, alors $2n + m$ est impair (la somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire). De plus, si m est impair, alors $m + 1$ est pair.
On peut donc conclure que si m est impair, alors a est pair et b est impair, ou a est impair et b pair. On a ainsi démontré que a et b sont de parité différente pour tout entier strictement positif m.

On cherche donc tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs de parité différente qui ont un produit de 9000.
On écrit 9000 en factorisation première : $9000 = 2^3 \times 3^2 \times 5^3$. On a donc $ab = 2^3 \times 3^2 \times 5^3$.
Un des facteurs a et b est impair, ce qui indique qu'un des facteurs n'admet pas un diviseur 2 et que l'autre facteur doit nécessairement avoir 2^3 pour diviseur.
On a donc $a = 2^3 r = 8r$ et $b = s$, ou bien $a = r$ et $b = 8s$, r et s étant des entiers strictement positifs quelconques.
Dans les deux cas, on a $ab = 8rs = 9000$, d'où $rs = \frac{9000}{8}$, ou $rs = 1125$, ou $rs = 3^2 5^3$.
On détermine maintenant tous les couples (r, s) d'entiers strictement positifs qui ont un produit de 1125.
On obtient $(r, s) = (1, 1125)$,(3,375), $(5, 225), (9, 125), (15, 75), (25, 45)$.
On a donc $(a, b) = (8r, s) = (8, 1125), (24, 375), (40, 225), (72, 125), (120, 75), (200, 45)$, ou $(a, b) = (r, 8s) = (1, 9000), (3, 3000), (5, 1800), (9, 1000), (15, 600), (25, 360)$.
Puisque $2n + m > m + 1 > 1$, le couple $(1, 9000)$ est rejeté.
Il reste donc 11 couples (a, b) tels que $ab = 9000$, a et b étant des entiers strictement positifs de parité différente.
Chacun de ces 11 couples (a, b) donne un couple (m, n).
En effet, soit $m + 1$ le plus petit de a et b et soit $2n + m$ le plus grand des deux (puisque $2n + m > m + 1$).

Par exemple si $(a,b) = (8, 1125)$, alors $m + 1 = 8$, d'où $m = 7$. L'équation $2n + m = 1125$ devient ainsi $2n + 7 = 1125$, d'où $n = 559$.
Le couple $(a,b) = (8, 1125)$ correspond ainsi au couple $(m,n) = (7, 559)$ tel que $(m + 1)(2n + m) = 9000$.
Chacun des couples (a,b) donne un couple (m,n) tel que $(m + 1)(2n + m) = 9000$.
Le tableau suivant donne chaque couple (m,n) qui correspond à chaque couple (a,b).
(Ce travail n'est pas nécessaire, puisqu'on demandait le nombre de couples).

(a,b)	$m+1$	$2n+m$	(m,n)
$(8, 1125)$	8	1125	$(7, 559)$
$(24, 375)$	24	375	$(23, 176)$
$(40, 225)$	40	225	$(39, 93)$
$(72, 125)$	72	125	$(71, 27)$
$(120, 75)$	75	120	$(74, 23)$
$(200, 45)$	45	200	$(44, 78)$

(a,b)	$m+1$	$2n+m$	(m,n)
$(3, 3000)$	3	3000	$(2, 1499)$
$(5, 1800)$	5	1800	$(4, 898)$
$(9, 1000)$	9	1000	$(8, 496)$
$(15, 600)$	15	600	$(14, 293)$
$(25, 360)$	25	360	$(24, 168)$

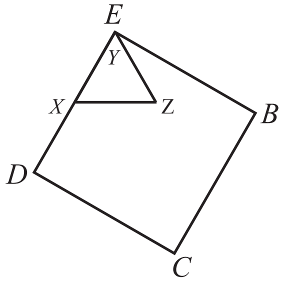
Il y a 11 couples (m,n) d'entiers strictement positifs pour lesquels $(m+1)(2n+m) = 9000$.

4. (a) Puisque EXD est un segment de droite, alors $\angle YXE + \angle YXZ = 180°$.
Puisque le triangle XYZ est équilatéral, alors $\angle YXZ = 60°$.
Donc $\angle YXE = 180° - 60°$, ou $\angle YXE = 120°$.

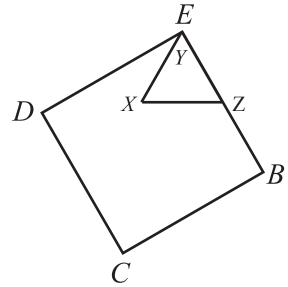
(b) On utilise un tableau pour suivre la position du carré à mesure qu'il tourne autour du triangle :

Après la manoeuvre	Sommets coïncidents	2[e] sommet du triangle XYZ sur le côté du carré	Centre de rotation de la manoeuvre suivante (X, Y ou Z)	Angle de rotation de la manoeuvre suivante
(Au départ)	D et Z	X sur DE	X	120°
1	E et Y	X sur DE	Y	30°
2	E et Y	Z sur EB	Z	120°
3	B et X	Z sur EB	X	30°
4	B et X	Y sur BC	Y	120°
5	C et Z	Y sur BC	Z	30°
6	C et Z	X sur CD	X	120°
7	D et Y	X sur CD	Y	30°
8	D et Y	Z sur DE	Z	120°

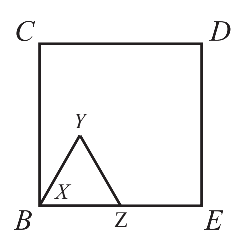
Le tableau a été rempli à partir des figures suivantes :



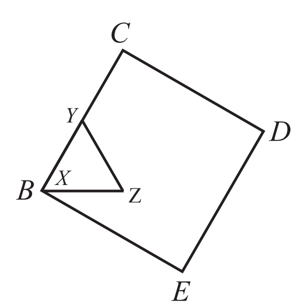
Fin de la première manoeuvre



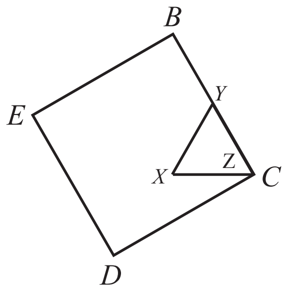
Fin de la deuxième manoeuvre



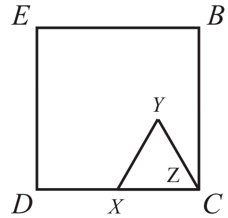
Fin de la troisième manoeuvre



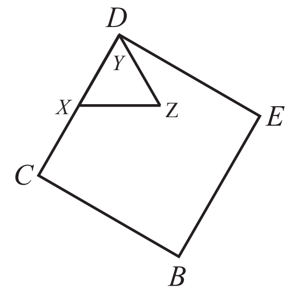
Fin de la quatrième manoeuvre



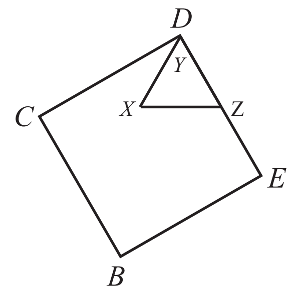
Fin de la cinquième manoeuvre



Fin de la sixième manoeuvre



Fin de la septième manoeuvre



Fin de la huitième manoeuvre

Chaque angle de rotation mesure $180^\circ - 60^\circ$ ou $90^\circ - 60^\circ$, c'est-à-dire 120° ou 30°.
Donc, le sommet D coïncide de nouveau avec un sommet du triangle après 7 manoeuvres. (On a continué le tableau jusqu'à la 8^e manoeuvre pour aider dans la résolution de la partie (c).)

(c) Après 0 manoeuvre, le sommet D du carré est au point Z, le point X est sur le côté DE et la rotation suivante est une rotation de 120° de centre X.
Après 8 manoeuvres, le sommet D du carré est au point Y, le point Z est sur le côté DE et la rotation suivante est une rotation de 120° de centre Z.
Après 8 manoeuvres, la position du carré est celle obtenue après une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre autour de deux côtés du triangle. Par rapport au triangle, cette position est semblable à la position initiale : D est sur un sommet du triangle et DE longe un côté du triangle. (D'après la partie (b), ce n'est qu'après 8 manoeuvres (après la position initiale) que le sommet D coïncide de nouveau avec un sommet du triangle et que DE longe un côté du triangle.)
Dans cette nouvelle position, le carré commence 8 autres manoeuvres qui le placeront, à la fin, dans une position semblable. Cette position est celle obtenue après une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre autour de deux côtés du triangle.
Après 16 manoeuvres, le sommet D du carré est situé au point X et le côté DE longe le côté XY du triangle. La rotation suivante sera une rotation de 120° de centre Y.
De même, après 24 manoeuvres, le sommet D du carré est situé au point Z et le point X est sur DE. Le carré est donc en position initiale, car la rotation suivante serait une rotation de 120° de centre X.
On cherche donc la longueur du chemin emprunté par le point E pendant ces 24 manoeuvres.
Cette distance est 3 fois la distance parcourue par E pendant les 8 premières manoeuvres. En effet, la position relative du carré par rapport au triangle (D est situé sur un sommet du triangle et DE longe un côté du triangle) est la même que celle au départ. Donc, cette position relative sera la même après 8 manoeuvres, après 16 manoeuvres et après 24 manoeuvres.

Puisque $EBCD$ a des côtés de longueur 2, alors $ED = EB = 2$.
Il y a une distance de 1 entre E et le milieu de ED et une distance de 1 entre E et le milieu de EB.
Puisque $EBCD$ a des côtés de longueur 2, alors $EC = 2\sqrt{2}$.
La distance entre E et le milieu de DC et entre E et le milieu de BC est égale à $\sqrt{2^2 + 1^2}$, ou $\sqrt{5}$, d'après le théorème de Pythagore.
On écrit dans un tableau les rotations subies par E pendant chacune des 8 premières

manoeuvres :

Numéro de la manoeuvre	Centre de la rotation	Distance entre E et le centre de la rotation	Angle de la rotation subie par le carré
1	X	1	120°
2	Y	0	30°
3	Z	1	120°
4	X	2	30°
5	Y	$\sqrt{5}$	120°
6	Z	$2\sqrt{2}$	30°
7	X	$\sqrt{5}$	120°
8	Y	2	30°

Durant chaque rotation, chaque point du carré (sauf le centre de la rotation) subit une rotation de même angle et de même centre que la rotation subie par le point E.
Pour chaque rotation, la distance parcourue par E est une fraction de la circonférence d'un cercle tracé par E s'il subissait une rotation de 360°. Cette fraction est égale à $\frac{120^\circ}{360^\circ}$ ou $\frac{30^\circ}{360^\circ}$, selon le cas.
La distance parcourue par E pendant les 8 premières manoeuvres est donc égale à

$$\frac{120^\circ}{360^\circ}2\pi(1)+\frac{30^\circ}{360^\circ}2\pi(0)+\frac{120^\circ}{360^\circ}2\pi(1)+\frac{30^\circ}{360^\circ}2\pi(2)+$$

$$\frac{120^\circ}{360^\circ}2\pi(\sqrt{5})+\frac{30^\circ}{360^\circ}2\pi(2\sqrt{2})+\frac{120^\circ}{360^\circ}2\pi(\sqrt{5})+\frac{30^\circ}{360^\circ}2\pi(2),$$

soit

$$\tfrac{2}{3}\pi+0+\tfrac{2}{3}\pi+\tfrac{1}{3}\pi+\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\pi+\tfrac{1}{3}\sqrt{2}\pi+\tfrac{2}{3}\sqrt{5}\pi+\tfrac{1}{3}\pi,$$

ou

$$2\pi+\tfrac{4}{3}\sqrt{5}\pi+\tfrac{1}{3}\sqrt{2}\pi.$$

Lorsque le carré retourne à sa position initiale pour la première fois, le point E a parcouru 3 fois cette distance, soit $6\pi+4\sqrt{5}\pi+\sqrt{2}\pi$.