Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fryer 2015

le jeudi 16 avril 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le vendredi 17 avril 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

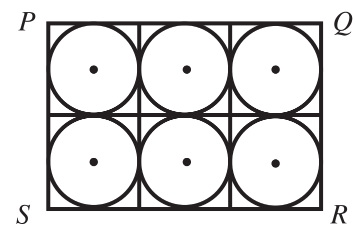
1. (a) Le cylindre modèle A a un rayon r de 10 cm et une hauteur h de 16 cm. Il a un volume V égal à $\pi(10)^2(16)$ cm^3. Donc $V = 1600\pi$ cm^3.

   OU La base du cylindre est un cercle de rayon 10 cm. Elle a donc une aire égale à πr^2 cm^2, ou $\pi 10^2$ cm^2, ou 100π cm^2. Le volume du cylindre est égal à (aire de la base) $\times$ hauteur. Il est donc égal à $100\pi \times 16$ cm^3. Donc $V = 1600\pi$ cm^3.

   (b) Le cylindre modèle B a un rayon r de 8 cm. Son volume V est égal à $\pi(8)^2(h)$ cm^3, ou $64\pi h$ cm^3. Puisque le modèle A et le modèle B ont le même volume, alors $64\pi h = 1600\pi$, d'où $h = \dfrac{1600\pi}{64\pi}$ cm, ou $h = 25$ cm.

   Le cylindre modèle B a une hauteur de 25 cm.

   (c) On considère la vue de haut de la boite A ci-contre.

   On nomme le rectangle $PQRS$.
   Puisque chaque cercle a un rayon de 10 cm, chacun a un diamètre de 20 cm. Chaque cercle peut donc être placé dans un carré de 20 cm sur 20 cm dont les côtés sont parallèles à ceux du rectangle $PQRS$.
   Chaque cercle touche les quatre côtés du carré qui l'entoure.
   Puisque chaque cercle touche un ou deux côtés du rectangle $PQRS$ et que chaque cercle touche deux ou trois autres cercles, les six carrés recouvrent complètement le rectangle $PQRS$ sans chevauchement. Puisque $PQRS$ a une largeur de trois carrés et une hauteur de 2 carrés, $PQ = SR = 3 \times 20$ cm $= 60$ cm et $PS = QR = 2 \times 20$ cm $= 40$ cm.
   Puisque chaque cylindre modèle A a une hauteur de 16 cm, la boite a une hauteur de 16 cm. La boite A a donc un volume de $60 \times 40 \times 16$ cm^3, ou 38 400 cm^3.

   (d) Le volume de la boite B est égal à celui de la boite A.
   Cela semble vrai de façon intuitive, puisque le cylindre modèle A et le cylindre modèle B ont le même volume et que chaque boite contient six cylindres disposés de la même manière.
   De façon plus formelle, on utilise la méthode de la partie (c) pour montrer que la boite B a aussi un volume de 38 400 cm^3.

   D'après la partie (b), le cylindre B a un rayon de 8 cm et une hauteur de 25 cm.
   La longueur de la boite B est égale à 6 fois le rayon du cylindre modèle B, soit 6×8 cm, ou 48 cm. La largeur de la boite B est égale à 4 fois le rayon du cylindre modèle B, soit, soit 4×8 cm, ou 32 cm.
   La hauteur de la boite B est égale à la hauteur du cylindre modèle B, soit 25 cm.
   La boite B a donc un volume de $48 \times 32 \times 25$ cm^3, ou 38 400 cm^3, soit le même volume que la boite A.

2. (a) Une pièce de 25 ¢ vaut 0,25 \$. Trois pièces de 25 ¢ valent donc $3 \times 0{,}25$ \$, ou 0,75 \$.
   Une pièce de 10 ¢ vaut 0,10 \$. Dix-huit pièces de 10 ¢ valent donc $18 \times 0{,}10$ \$, ou 1,80 \$.
   Une pièce de 5 ¢ vaut 0,05 \$. Vingt-cinq pièces de 5 ¢ valent donc $25 \times 0{,}05$ \$, ou 1,25 \$.
   Les pièces de Suzanne valent donc 0,75 \$ + 1,80 \$ + 1,25 \$, ou 3,80 \$.

   (b) *Solution 1*
   On apparie chaque pièce de 10 ¢ avec une pièce de 5 ¢.
   Puisqu'il y a un nombre égal de pièces de 10 ¢ et de 5 ¢ (et aucune autre pièce), chaque pièce de 10 ¢ est appariée avec une pièce de 5 ¢ et il ne reste aucune pièce.
   Chaque paire (une pièce de 10 ¢ et une pièce de 5 ¢) a une valeur de 0,05 \$ + 0,10 \$, ou 0,15 \$. Puisque les pièces de Luc ont une valeur totale de 1,50 \$, il a $\dfrac{1{,}50}{0{,}15}$ paires, ou 10 paires.

Puisqu'il y a une pièce de 5 ¢ dans chaque paire, Luc a 10 pièces de 5 ¢.

Solution 2
Soit y le nombre de pièces de 5 ¢ que Luc a en sa possession.
Luc a un nombre égal de pièces de 10 ¢ et de 5 ¢. Il a donc y pièces de 10 ¢.
Les y pièces de 5 ¢ ont une valeur de $0{,}05y$ \$.
Les y pièces de 10 ¢ ont une valeur de $0{,}10y$ \$.
Puisque les pièces de Luc ont une valeur totale de 1,50 \$, alors $0{,}05y + 0{,}10y = 1{,}50$, d'où $0{,}15y = 1{,}50$. Donc $y = \dfrac{1{,}50}{0{,}15}$, d'où $y = 10$.
Luc a 10 pièces de 5 ¢.

(c) Une pièce de 25 ¢ vaut 0,25 \$. Donc x pièces de 25 ¢ ont une valeur de $0{,}25x$ \$.
Une pièce de 10 ¢ vaut 0,10 \$. Donc $2x + 3$ pièces de 10 ¢ ont une valeur de $0{,}10(2x + 3)$ \$.
Puisque les pièces de 25 ¢ et de 10 ¢ ont une valeur totale de 10,65 \$, alors
$0{,}25x + 0{,}10(2x + 3) = 10{,}65$, d'où $0{,}25x + 0{,}20x + 0{,}30 = 10{,}65$, ou $0{,}45x = 10{,}35$.
Donc $x = \dfrac{10{,}35}{0{,}45}$, ou $x = 23$.

3. (a) On utilise la formule donnée pour calculer la somme des 200 premiers entiers strictement positifs :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 198 + 199 + 200 = \frac{200(200 + 1)}{2} = 100(201) = 20\,100$$

(b) La somme des 200 premiers entiers strictement positifs est égale à la somme des 150 premiers entiers strictement positifs plus la somme des 50 entiers suivants, soit $151 + 152 + 153 + \cdots + 198 + 199 + 200$. Donc :

$$1+2+\cdots+198+199+200 = (1+2+\cdots+148+149+150)+(151+152+\cdots+198+199+200).$$

La somme des 50 entiers consécutifs $151 + 152 + 153 + \cdots + 198 + 199 + 200$ est donc égale à la différence entre la somme des 200 premiers entiers strictement positifs et la somme des 150 premiers entiers strictement positifs.
Dans la partie (a), on a vu que la somme des 200 premiers entiers strictement positifs est égale à 20 100.
On utilise la formule pour calculer la somme des 150 premiers entiers strictement positifs :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 148 + 149 + 150 = \frac{150(150 + 1)}{2} = 75(151) = 11\,325.$$

La somme des 50 entiers consécutifs à partir de 151 est donc égale à :

$$\begin{aligned} 151 + 152 + \cdots + 199 + 200 &= (1 + 2 + \cdots + 199 + 200) - (1 + 2 + \cdots + 149 + 150) \\ &= 20\,100 - 11\,325 \\ &= 8775 \end{aligned}$$

(c) Soit S la somme de l'addition $1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 11 + \cdots + 998 + 1000$.
Soit T la somme des 333 premiers multiples de 3, c'est-à-dire la somme de $3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 996 + 999$.
La somme des 1000 premiers entiers strictement positifs est égale à $S+T$, c'est-à-dire que :

$$1+2+\cdots+998+999+1000 = (1+2+4+5+7+\cdots+998+1000)+(3+6+\cdots+996+999).$$

La somme S est égale à la différence entre la somme des 1000 premiers entiers strictement positifs et T.
On utilise la formule pour calculer la somme des 1000 premiers entiers strictement positifs :

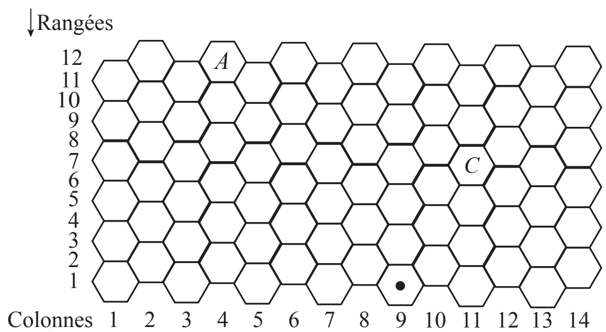
$$1+2+3+\cdots+998+999+1000=\frac{1000(1000+1)}{2}=500(1001)=500\,500.$$

On détermine la somme T en factorisant le diviseur 3 de chaque terme et en utilisant la formule :

$$\begin{aligned}3+6+9+\cdots+993+996+999 &= 3(1+2+3+\cdots+331+332+333)\\ &= 3\left(\frac{333(333+1)}{2}\right) \qquad \text{(d'après la formule)}\\ &= 3(333\times 167)\\ &= 166\,833.\end{aligned}$$

Donc, la somme S est égale à $500\,500-166\,833$, ou $333\,667$.

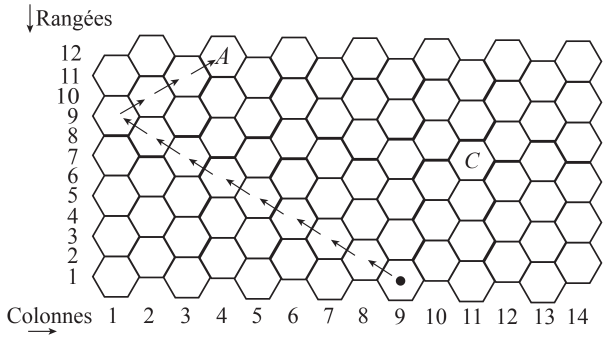
4. On numérote les rangées et les colonnes d'hexagones comme suit :



On remarque que la colonne 1 ne contient que des hexagones des rangées impaires, que la colonne 2 ne contient que des hexagones des rangées paires, et ainsi de suite.
Au départ, le jeton est dans l'hexagone de la rangée 1, colonne 9 (on écrit r1c9), l'hexagone A est dans la rangée 12, colonne 4 (r12c4), et l'hexagone C est dans la rangée 7, colonne 11 (r7c11).
Un déplacement $\uparrow$ augmente de 2 le numéro de la rangée et ne change pas celui de la colonne.
Un déplacement $\nwarrow$ augmente de 1 le numéro de la rangée et diminue de 1 celui de la colonne.
Un déplacement $\nearrow$ augmente de 1 le numéro de la rangée et augmente de 1 celui de la colonne.

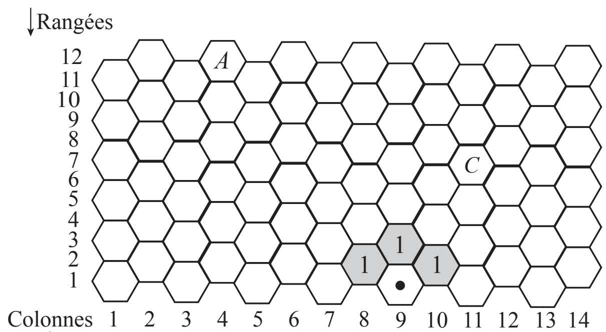
(a) On doit déplacer le jeton de r1c9 à r12c4 dans un nombre minimal d'étapes.
Il faut au moins 5 étapes $\nwarrow$ pour déplacer le jeton de 5 colonnes vers la gauche. (On peut utiliser plus d'étapes $\nwarrow$ si elles sont équilibrées par des étapes $\nearrow$.)
On peut déplacer le jeton de r1c9 à r12c4 en utilisant 5 étapes $\nwarrow$ (ce qui déplace le jeton jusqu'à r6c4, puisque chaque étape $\nwarrow$ déplace le jeton de 1 colonne vers la gauche et de 1 rangée vers le haut), puis de 3 étapes $\uparrow$.
On a pris 8 étapes.
Peut-on déplacer le jeton de r1c9 à r12c4 en moins de 8 étapes ?
On a vu qu'il faut au moins 5 étapes $\nwarrow$. Ces étapes déplacent le jeton de 5 des 11 rangées qu'il faut.
Pour déplacer le jeton des 6 rangées qui restent, il faut au moins 3 autres étapes, puisqu'une étape peut déplacer le jeton d'un maximum de 2 rangées.
Il faut donc au moins 8 étapes. Le nombre minimal d'étapes qu'il faut est 8.

(b) On veut déplacer le jeton de r1c9 à r12c4 en utilisant un nombre maximal d'étapes.
Chaque étape déplace le jeton d'au moins 1 rangée vers le haut. Puisque le jeton doit être déplacé de 11 rangées vers le haut, on peut utiliser au plus 11 étapes.
La figure suivante montre qu'on peut le faire en exactement 11 étapes :

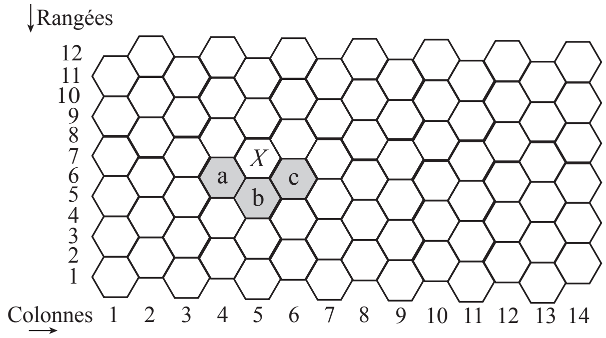


On remarque qu'aucune étape ↑ n'a été utilisée, puisqu'une telle étape déplace le jeton de 2 rangées vers le haut.
Le nombre maximal d'étapes est 11.
(Il y a beaucoup de chemins de 11 étapes qui mènent à A.)

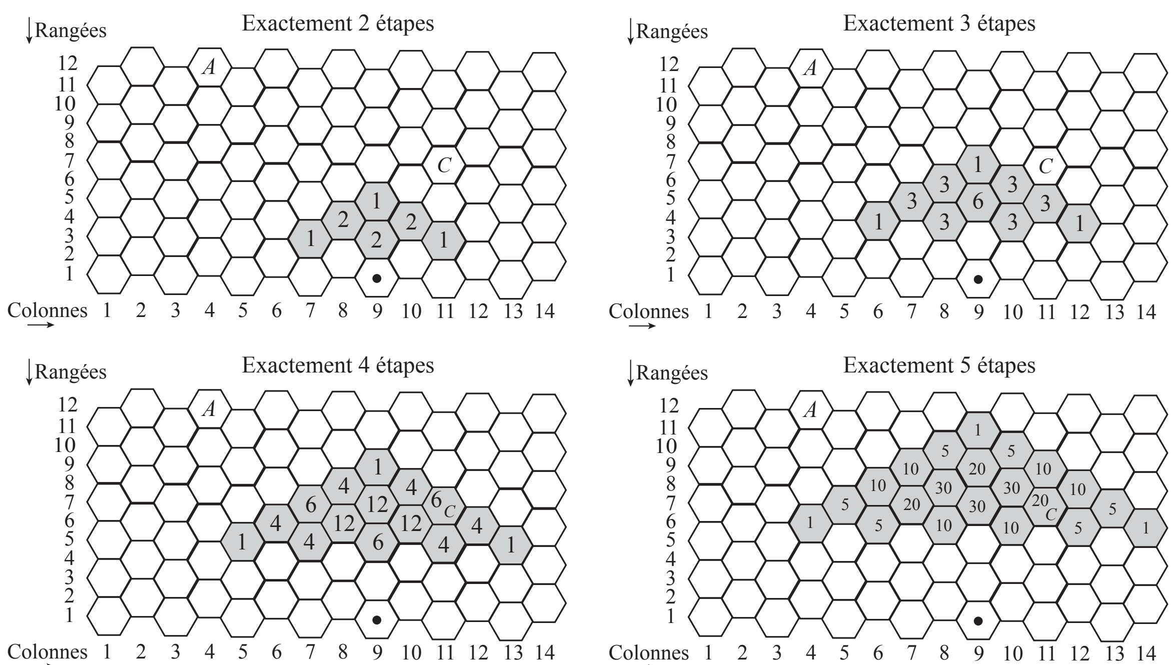
(c) *Solution 1*
En 1 étape, on peut atteindre trois hexagones différents d'une façon chacun. (Il s'agit des hexagones que l'on atteint en utilisant 1 étape $\nwarrow$, 1 étape ↑ ou 1 étape $\nearrow$.)



Étant donné un entier s ($s \geq 1$), on peut déterminer les hexagones qui peuvent être atteints en exactement $s+1$ étapes à partir des hexagones qui peuvent être atteints en exactement s étapes et en procédant de chacun de ces hexagones dans une des trois directions.
On peut aussi déterminer le nombre de façons d'atteindre chacun de ces nouveaux hexagones en exactement $s+1$ étapes.
Le nombre de façons d'atteindre un hexagone particulier en exactement $s+1$ étapes est la somme des nombres de façons d'atteindre chacun des trois hexagones adjacents au dessous en exactement s étapes.
En effet, tout chemin qui mène à un hexagone particulier en exactement $s+1$ étapes doit être formé d'un chemin de s étapes qui mène à un hexagone adjacent au dessous, suivi d'une étape $\nearrow$, d'une étape ↑ ou d'une étape $\nwarrow$.
Par exemple, dans la figure suivante, les hexagones ombrés peuvent être atteints en exactement s étapes de a, b et c façons, respectivement. Ainsi l'hexagone X peut être atteint en exactement $s+1$ étapes de $a+b+c$ façons.



Il existe exactement 3^s chemins de longueur s, puisqu'il y a 3 possibilités pour chacune des s étapes du chemin.
Ceci nous permet de vérifier, à chaque étape, que l'on a tenu compte de toutes les possibilités.
On utilise ces faits pour déterminer les hexagones qui peuvent être atteints en exactement 2, 3, 4 et 5 étapes, ainsi que le nombre de façons d'atteindre chacun de ces hexagones.
Les figures suivantes indiquent ces renseignements :



D'après la dernière figure, on voit qu'il y a exactement 6 hexagones qui peuvent être atteints en exactement 5 étapes d'au moints 20 façons différentes. Donc $n = 6$.

Solution 2
On remarque que si on change l'ordre des étapes d'un chemin particulier, on aboutit toujours au même hexagone.
En effet, chaque étape change le numéro de la rangée et le numéro de la colonne d'une façon particulière et le résultat cumulé des étapes est le même, peu importe l'ordre des étapes.
Ainsi les chemins $\nearrow\nwarrow\uparrow\uparrow\nearrow$ et $\uparrow\nearrow\nearrow\nwarrow\uparrow$ aboutissent au même hexagone.
Puisqu'il y a trois sortes d'étapes ($\nwarrow, \uparrow, \nearrow$), un chemin d'exactement 5 étapes peut être formé de :

(i) 5 fois la même étape, ou

(ii) 4 fois une étape et 1 fois une autre étape, ou

(iii) 3 fois une étape et 2 fois une autre étape, ou

(iv) 3 fois une étape, 1 fois une deuxième étape et 1 fois une troisième étape, ou

(v) 2 fois une étape, 2 fois une deuxième étape, et 1 fois une troisième étape.

Ce sont les seules combinaisons possibles des trois sortes d'étapes.
Pour chaque combinaison, on peut placer les étapes de diverses façons :

(i) 5 fois la même étape
On a 3 choix pour la sorte d'étape, soit $\nwarrow$, $\uparrow$ ou $\nearrow$.
Pour chaque choix, il y a 1 façon de placer les étapes en ordre.
À partir de r1c9, il y a un chemin jusqu'à r6c4 (5 étapes $\nwarrow$), un chemin jusqu'à r11c9 (5 étapes $\uparrow$) et un chemin jusqu'à r6c14 (5 étapes $\nearrow$).

(ii) 4 fois une étape et 1 fois une autre étape
Il y a 3 choix pour l'étape qui sera répétée 4 fois, soit $\nwarrow$, $\uparrow$ ou $\nearrow$ (on appelle cette étape x). Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix pour l'étape qui sera utilisée 1 fois (on appelle cette étape y).
Il y a donc 3×2 choix, ou 6 choix des deux types d'étapes et chaque choix permet d'atteindre un hexagone particulier. Chaque arrangement des deux types d'étapes choisies donne le même hexagone.
Étant donné un choix particulier de x et de y, il y a 5 façons de placer les étapes, soit $xxxxy$, $xxxyx$, $xxyxx$, $xyxxx$ et $yxxxx$ (il y a 5 positions où l'on peut placer le y, les autres positions étant automatiquement remplies par les x).
En commençant à r1c9, il y a donc 5 chemins vers chacune des positions r7c5 ($x =\nwarrow$, $y =\uparrow$), r6c6 ($x =\nwarrow$, $y =\nearrow$), r7c13 ($x =\nearrow$, $y =\uparrow$), r6c12 ($x =\nearrow$, $y =\nwarrow$), r10c8 ($x =\uparrow$, $y =\nwarrow$) et r10c10 ($x =\uparrow$, $y =\nearrow$).

(iii) 3 fois une étape et 2 fois une autre étape
Il y a 3 choix pour l'étape qui sera répétée 3 fois, soit $\nwarrow$, $\uparrow$ ou $\nearrow$ (on appelle cette étape x). Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix pour l'étape qui sera utilisée 2 fois (on appelle cette étape y).
Il y a donc 3×2 choix, ou 6 choix des deux étapes, et chaque choix permet d'atteindre un hexagone particulier. Chaque arrangement des deux types d'étapes choisies donne le même hexagone.
Étant donné un choix particulier de x et de y, il y a 10 façons de placer les étapes x et y en ordres différents, car il y a 10 choix pour les positions des deux y, les autres positions étant automatiquement remplies par les x :

Positions 1 et 2 ($yyxxx$), positions 1 et 3 ($yxyxx$), positions 1 et 4 ($yxxyx$), positions 1 et 5 ($yxxxy$),
Positions 2 et 3 ($xyyxx$), positions 2 et 4 ($xyxyx$), positions 2 et 5 ($xyxxy$),
Positions 3 et 4 ($xxyyx$), positions 3 et 5 ($xxyxy$),
Positions 4 et 5 ($xxxyy$)

En commençant à r1c9, il y a donc 10 chemins vers chacune des positions r8c6 ($x =\nwarrow$, $y =\uparrow$), r6c8 ($x =\nwarrow$, $y =\nearrow$), r8c12 ($x =\nearrow$, $y =\uparrow$), r6c10 ($x =\nearrow$, $y =\nwarrow$), r9c7 ($x =\uparrow$, $y =\nwarrow$) et r9c11 ($x =\uparrow$, $y =\nearrow$).

(iv) 3 fois une étape, 1 fois une deuxième étape et 1 fois une troisième étape
Il y a 3 choix pour l'étape qui sera répétée 3 fois, soit $\nwarrow$, $\uparrow$ ou $\nearrow$ (on appelle cette étape x). Les choix des deux autres types d'étapes qui seront utilisées 1 fois chacune sont fixés (on appelle ces étapes y et z dans un ordre quelconque).
Il y a donc 3 choix des trois types d'étapes et chaque choix permet d'atteindre un hexagone particulier. Chaque arrangement des étapes choisies donne le même hexagone.

Étant donné un choix particulier de x, y et z, il y a 20 façons de placer les étapes $xxxyz$ en ordres différents, car il y a 5 choix pour la position du y et pour chacun de ces choix, il y a 4 choix pour la position du z, les autres positions étant automatiquement remplies par les x.

En commençant à r1c9, il y a donc 20 chemins vers chacune des positions r7c7 ($x = \nwarrow$, $y = \uparrow$, $z = \nearrow$), r7c11 ($x = \nearrow$, $y = \nearrow$, $z = \uparrow$) et r9c9 ($x = \uparrow$, $y = \nwarrow$, $z = \nearrow$).

(v) <u>2 fois une étape, 2 fois une deuxième étape, et 1 fois une troisième étape</u>

Il y a 3 choix pour le type d'étape qui sera utilisé 1 fois, soit $\nwarrow$, $\uparrow$ ou $\nearrow$ (on appelle cette étape z). Une fois que l'on a choisi z, les choix des deux autres types d'étapes qui seront utilisées 2 fois chacune sont fixés (on appelle ces étapes x et y).

Il y a donc 3 façons de choisir les trois types d'étapes, chacune permettant d'atteindre un hexagone différent. Chaque arrangement des étapes choisies donne le même hexagone.

Étant donné un choix particulier de x, y et z, il y a 30 façons de placer les étapes $xxyyz$ en ordres différents, car il y a 10 choix pour les positions des x (positions 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 5, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 3 et 4, 3 et 5, 4 et 5) et pour chacun de ces choix, il y a 3 choix pour la position du z (il reste 3 positions), les autres positions étant automatiquement remplies par les y.

En commençant à r1c9, il y a donc 30 chemins vers chacune des positions r8c8 ($x = \nwarrow$, $y = \uparrow$, $z = \nearrow$), r7c9 ($x = \nearrow$, $y = \nwarrow$, $z = \uparrow$) et r8c10 ($x = \uparrow$, $y = \nearrow$, $z = \nwarrow$).

En utilisant exactement 5 étapes, le jeton peut aboutir sur 6 hexagones différents (soit r7c7, r7c11, r9c9, r8c8, r7c9, r8c10) d'au moins 20 façons différentes. Donc $n = 6$.