Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Fermat 2015

(11e année – Secondaire V)

le mardi 24 février 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 25 février 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. La moyenne des cinq nombres est égale à : $\dfrac{8+9+10+11+12}{5} = \dfrac{50}{5} = 10$

   OU Puisque les cinq nombres sont des entiers consécutifs, la moyenne est égale au nombre du milieu, soit 10.

   Réponse : (E)

2. On a : $\dfrac{2\times 3+4}{2+3} = \dfrac{6+4}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$

   Réponse : (A)

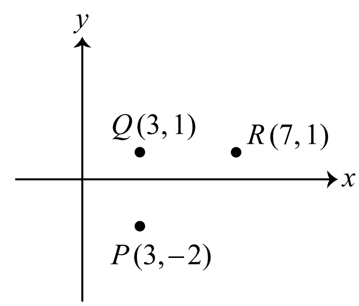
3. Soit d la distance entre deux points consécutifs sur la droite.
   En marchant de P à U, Eva parcourt une distance de $5d$.
   En revenant de U à P, elle parcourt encore une distance de $5d$. La distance totale est de $10d$.
   Puisque 70 % de 10 est 7, Eva a complété 70 % de son trajet lorsqu'elle a parcouru une distance de $7d$ (c.-à-d. après avoir parcouru 7 segments).
   Elle a complété une distance de $7d$ après avoir parcouru une distance de $2d$ à son retour du point U, c'est-à-dire au point S.

   Réponse : (D)

4. On a : $(x-3)^2 = (-3-3)^2 = (-6)^2 = 36$

   Réponse : (B)

5. D'après la figure ci-contre, l'ordre des sommets doit être $PQRS$. (Si l'ordre était différent, l'angle QRP ou l'angle QPR serait un angle du rectangle, ce qui est impossible, car ces angles ne sont pas droits.)

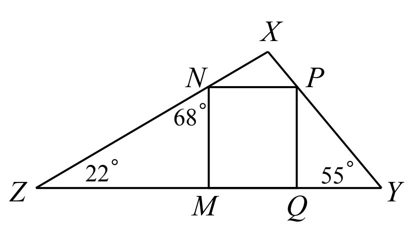
   

   Puisque P et Q ont la même abscisse, le côté PQ du rectangle est vertical.
   Donc, le côté SR doit être vertical. Le point S a donc la même abscisse que R, soit 7.
   Puisque Q et R ont la même ordonnée, le côté QR du rectangle est horizontal.
   Donc, le côté PS doit être horizontal. Le point S a donc la même ordonnée que P, soit -2.
   Les coordonnés de S sont donc $(7,\,-2)$.

   Réponse : (B)

6. Puisque $MNPQ$ est un rectangle, l'angle NMQ est droit, de même que l'angle NMZ.
   Les mesures des angles du triangle NMZ ont une somme de 180°. Donc :

$$\angle NZM = 180^\circ - \angle ZNM - \angle ZMN = 180^\circ - 68^\circ - 90^\circ = 22^\circ$$



   Puisque les mesures des angles du triangle ZXY ont aussi une somme de 180°, alors :

$$\angle YXZ = 180^\circ - \angle XZY - \angle XYZ = 180^\circ - 22^\circ - 55^\circ = 103^\circ$$

   Réponse : (E)

7. Au départ, Valérie a la moitié de l'argent qu'il faut pour acheter le collier.
Après que sa soeur lui a remis 30 \$, Valérie a les trois quarts de l'argent qu'il lui faut. Donc, sa soeur lui a remis un quart de la somme requise, car $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Il lui faut encore un quart de la somme requise, soit le même montant que sa soeur lui a donné, c'est-à-dire 30 \$.
Donc, son père lui donnera 30 \$.
Réponse : (D)

8. Puisque $15^2 = 225$ et $15 = 3 \cdot 5$, alors $225 = 15^2 = (3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$.
Donc $x = 2$ et $y = 2$, d'où $x + y = 4$.
Réponse : (B)

9. *Solution 1*
Les deux équipes ont un total de de $(25 + 19)$ joueurs, ou 44 joueurs.
Or, il y a exactement 36 élèves qui font partie d'une ou l'autre équipe.
Puisque $44 - 36 = 8$, 8 élèves ont été comptés deux fois.
Il y a donc 8 élèves qui font partie des deux équipes.

Solution 2
Soit x le nombre d'élèves qui font partie des deux équipes.
Puisque 25 élèves jouent au baseball, il y a $25 - x$ élèves qui jouent au baseball et qui ne jouent pas au hockey.
Puisque 19 élèves jouent au hockey, il y a $19 - x$ élèves qui jouent au hockey et qui ne jouent pas au baseball.
Puisque 36 élèves font partie de l'équipe de baseball, de l'équipe de hockey ou des deux, alors :

$$(25 - x) + (19 - x) + x = 36$$

(Les trois expressions du membre de gauche représentent respectivement le nombre d'élèves qui jouent au baseball mais pas au hockey, le nombre d'élèves qui jouent au hockey mais pas au baseball et le nombre d'élèves qui jouent au baseball et au hockey.)
Donc $44 - x = 36$, d'où $x = 8$.
Donc 8 élèves font partie des deux équipes.
Réponse : (B)

10. Puisque Boris a parcouru 200 km à une vitesse de 50 km/h, il a mis 4 heures pour le faire, car $\frac{200}{50} = 4$. Anca a parcouru les mêmes 200 km à une vitesse de 60 km/h, avec un arrêt en chemin.
Puisqu'Anca a parcouru 200 km à une vitesse de 60 km/h, le temps qu'elle a mis pour conduire sur la route est de $3\frac{1}{3}$ heures, car $\frac{200}{60} = 3\frac{1}{3}$.
Le temps d'arrêt d'Anca est égal à la différence entre les deux temps sur la route. Il est donc égal à $4\,\text{h} - 3\frac{1}{3}\,\text{h}$, ou $\frac{2}{3}\,\text{h}$.
Puisque $\frac{2}{3}$ d'une heure vaut 40 minutes, Anca s'est arrêtée 40 minutes pour se reposer.
Réponse : (A)

11. Pour chaque valeur positionnelle (unité, dizaine, centaine) d'un tel nombre, il y a 3 chiffres possibles (7, 8 ou 9). Le nombre d'entiers positifs de trois chiffres qui n'utilisent aucun autre chiffre que 7, 8 et 9 est donc égal à $3 \cdot 3 \cdot 3$, ou 27.
(On remarque qu'il y a 9 tels entiers qui commencent par un 7, 9 qui commencent par un 8 et 9 qui commencent par un 9. Les 9 entiers qui commencent par un 7 sont 777, 778, 779, 787, 788, 789, 797, 798 et 799.)
Réponse : (E)

12. Puisque $\cos 60° = \frac{1}{2}$ et $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors l'équation donnée, $\cos 60° = \cos 45° \cos\theta$, devient $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta$. Donc $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Puisque $0° \leq \theta \leq 90°$, alors $\theta = 45°$.

Réponse : (D)

13. On remplit un tableau qui indique l'argent que Steve et Wilfrid ont à la fin de chaque année. Après l'année 2000, la donnée dans la colonne de Steve est le double de celle de l'année précédente, tandis que la donnée dans la colonne de de Wilfrid est la moitié de celle de l'année précédente. On s'arrête lorsque la donnée dans la colonne de Steve est plus grande que celle dans la colonne de Wilfrid :

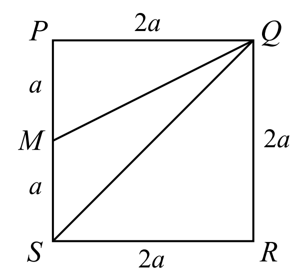
Année	Steve	Wilfrid
2000	100 \$	10 000 \$
2001	200 \$	5000 \$
2002	400 \$	2500 \$
2003	800 \$	1250 \$
2004	1600 \$	625 \$

Donc à la fin de 2004, Steve a plus d'argent que Wilfrid pour la première fois.

Réponse : (C)

14. *Solution 1*
Puisque $PQRS$ est un carré, sa diagonale SQ coupe le carré en deux régions de même aire.
Le rapport de l'aire du triangle PQS à l'aire du carré $PQRS$ est donc de 1 : 2.
On considère la base PS et la hauteur correspondante PQ du triangle PQS.
De même, on considère la base MS et la hauteur correspondante PQ du triangle MQS. (PQ est perpendiculaire à la droite qui contient MS.)
Puisque $MS = \frac{1}{2}PS$, l'aire du triangle MQS est la moitié de l'aire du triangle PQS.
Puisque le rapport de l'aire du triangle PQS à l'aire du carré $PQRS$ est de 1 : 2, alors le rapport de l'aire du triangle QMS à l'aire du carré $PQRS$ est de 1 : 4.

Solution 2
Soit $2a$ la longueur d'un côté du carré $PQRS$.
L'aire du carré $PQRS$ est donc égale à $(2a)^2$, ou $4a^2$.
Puisque M est le milieu du côté PS, alors $PM = MS = a$.
On considère la base MS et la hauteur correspondante PQ du triangle QMS. (PQ est perpendiculaire à la droite qui contient MS.)
Puisque $MS = a$ et $PQ = 2a$, l'aire du triangle QMS est égale à $\frac{1}{2}(MS)(PQ)$, ou $\frac{1}{2}a(2a)$, ou a^2.
Donc, le rapport de l'aire du triangle QMS à l'aire du carré $PQRS$ est de $a^2 : 4a^2$, ce qui est égal à 1 : 4.



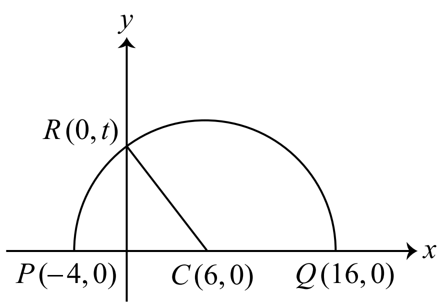
Réponse : (B)

15. *Solution 1*
Zoltan a répondu à 45 questions. Si toutes ses réponses avaient été bonnes, il aurait reçu 45(4) points, ou 180 points. Or, il a reçu 135 points. Il a donc perdu 45 points $(180 - 135 = 45)$.
Pour chaque réponse erronée, Zoltan perd 5 points par rapport à une bonne réponse, car une bonne réponse lui aurait rapporté 4 points et il perd 1 autre point pour la réponse erronée.
Puisque $45 \div 5 = 9$, Zoltan a donc 9 réponses erronées. (On peut vérifier qu'avec 36 bonnes réponses, 9 réponses erronées et 5 questions sans réponse, Zoltan obtient $36(4) - 9(1) + 5(0)$ points, ou 135 points.)

Solution 2
Soit x le nombre de réponses erronées.
Puisque Zoltan a répondu à 45 questions en tout, il a $45 - x$ bonnes réponses.
Puisque l'examen est composé de 50 questions et que Zoltan a répondu à 45 questions, 5 questions sont restées sans réponse.
D'après le barême de correction, Zoltan obtient $4(45 - x) - 1(x) + 0(5)$ points.
Or, on sait qu'il a obtenu un total de 135 points.
Donc $4(45 - x) - 1(x) + 0(5) = 135$, d'où $180 - 4x - x = 135$, ou $5x = 45$, ou $x = 9$.
Zoltan a donc 9 réponses erronées.
(On peut vérifier qu'avec 36 bonnes réponses, 9 réponses erronées et 5 questions sans réponse, Zoltan obtient $36(4) - 9(1) + 5(0)$ points, ou 135 points.)

Réponse : (A)

16. Puisque $P(-4,0)$ et $Q(16,0)$ sont les extrémités du diamètre du demi-cercle, le diamètre a une longueur de $16-(-4)$, ou 20.
Puisque le demi-cercle a un diamètre de 20, il a un rayon de $\frac{1}{2}(20)$, ou 10.
Puisque le centre C est le milieu du diamètre PQ, il a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(-4+16), \frac{1}{2}(0+0)\right)$, ou $(6,0)$.



Puisque CR est un rayon, il y a une distance de 10 entre les points $C(6,0)$ et $R(0,t)$. Donc :

$$\begin{aligned}\sqrt{(6-0)^2+(0-t)^2} &= 10\\ 36+t^2 &= 100\\ t^2 &= 64\end{aligned}$$

(On aurait pu indiquer que le triangle ROC est rectangle, puisque les axes sont perpendiculaires, puis utiliser le théorème de Pythagore, avec $RO = t$, $RC = 10$ et $OC = 6$, pour obtenir $t^2 + 6^2 = 10^2$, d'où $t^2 = 64$.)
Puisque $t > 0$, alors $t = 8$.

Réponse : (C)

17. Puisque $\dfrac{a+b}{a-b} = 3$, alors $a+b = 3(a-b)$, ou $a+b = 3a-3b$.
Donc $4b = 2a$, ou $2b = a$, d'où $2 = \dfrac{a}{b}$.
(On remarque que $b \neq 0$, autrement l'équation initiale serait $\dfrac{a}{a} = 3$, ce qui est faux.)

Réponse : (D)

18. L'équation $x^2+2kx+7k-10=0$ admet deux racines réelles égales lorsque son discriminant est égal à 0. Le discriminant, Δ, est égal à :

$$\Delta=(2k)^2-4(1)(7k-10)=4k^2-28k+40$$

Le discriminant est égal à 0 lorsque $4k^2-28k+40=0$, ou $k^2-7k+10=0$, ou $(k-2)(k-5)=0$, c'est-à-dire lorsque $k=2$ ou $k=5$. On vérifie :
Lorsque $k=2$, l'équation initiale devient $x^2+4x+4=0$, ou $(x+2)^2=0$. Cette équation admet une seule solution réelle, soit -2.
Lorsque $k=5$, l'équation initiale devient $x^2+10x+25=0$, ou $(x+5)^2=0$. Cette équation admet une seule solution réelle, soit -5.
La somme des deux valeurs de k est $2+5$, ou 7.

Réponse : (E)

19. Soit m la pente des trois droites parallèles.
La droite de pente m et d'ordonnée à l'origine 2 a pour équation $y=mx+2$.
Pour déterminer l'abscisse à l'origine de cette droite en fonction de m, on pose $y=0$ pour obtenir $mx+2=0$, ou $x=-\dfrac{2}{m}$. La droite a donc pour abscisse à l'origine $-\dfrac{2}{m}$.
De même, la droite de pente m et d'ordonnée à l'origine 3 a pour abscisse à l'origine $-\dfrac{3}{m}$.
Aussi, la droite de pente m et d'ordonnée à l'origine 4 a pour abscisse à l'origine $-\dfrac{4}{m}$.
Les trois abscisses à l'origine ont une somme de 36. Donc $\left(-\dfrac{2}{m}\right)+\left(-\dfrac{3}{m}\right)+\left(-\dfrac{4}{m}\right)=36$.
On multiplie chaque membre par m pour obtenir $-2-3-4=36m$, ou $36m=-9$, ou $m=-\dfrac{1}{4}$.

Réponse : (E)

20. On factorise l'expression $a^{2014}+a^{2015}$ pour obtenir $a^{2014}(1+a)$.
Si $a=5$ ou $a=10$, le facteur a^{2014} est un multiple de 5 et l'expression initiale est donc divisible par 5.
Si $a=4$ ou $a=9$, le facteur $(1+a)$ est un multiple de 5 et l'expression initiale est donc divisible par 5.
Si $a=1,2,3,6,7,8$, alors ni a^{2014} ni $(1+a)$ n'est un multiple de 5. Puisqu'aucun facteur n'est un multiple du nombre premier 5, alors le produit $a^{2014}(1+a)$ n'est pas divisible par 5.
Donc dans l'intervalle $1\le a\le 10$, il y a 4 entiers a pour lesquels $a^{2014}+a^{2015}$ est divisible par 5.

Réponse : (C)

21. Amina peut gagner à son premier tour, à son deuxième tour ou à son troisième tour.
Elle gagne à son premier tour si elle obtient pile. La probabilité pour que cela se produise est de $\frac{1}{2}$.
Amina gagne à son deuxième tour si elle obtient face à son premier tour, si Ben obtient face à son premier tour et si elle obtient pile à son deuxième tour, c'est-à-dire si les joueurs obtiennent la suite FFP. La probabilité pour que cela se produise est de $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{8}$. (On remarque qu'il n'y a qu'une seule suite de lettres F et/ou P qui permette à Amina de gagner à son second tour et et que chacun des trois résultats de cette suite a une probabilité de $\frac{1}{2}$.)
De même, Amina gagne à son troisième tour si les deux joueurs obtiennent la suite FFFFP. La probabilité pour que cela se produise est de $\left(\frac{1}{2}\right)^5$, ou $\frac{1}{32}$.
La probabilité pour qu'Amina gagne est donc égale à $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}$, ou $\frac{16+4+1}{32}$, ou $\frac{21}{32}$.

Réponse : (A)

22. Puisque a, b et c, dans cet ordre, forment une suite arithmétique alors il existe un nombre réel d pour lequel $a = b - d$ et $c = b + d$.
On doit avoir $d \neq 0$, autrement on aurait $a = b = c$ et avec $abc = 17\,955$, on aurait $b^3 = 17\,955$, d'où $b = \sqrt[3]{17\,955}$, qui n'est pas un entier.
On écrit les les termes de la suite géométrique en fonction de b et de d.

$$3a+b = 3(b-d)+b = 4b-3d \qquad 3b+c = 3b+(b+d) = 4b+d \qquad 3c+a = 3(b+d)+(b-d) = 4b+2d$$

Puisque $3a + b$, $3b + c$ et $3c + a$, dans cet ordre, forment une suite géométrique, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{3b+c}{3a+b} &= \frac{3c+a}{3b+c} \\
(3b+c)^2 &= (3a+b)(3c+a) \\
(4b+d)^2 &= (4b-3d)(4b+2d) \\
16b^2 + 8bd + d^2 &= 16b^2 - 4bd - 6d^2 \\
12bd &= -7d^2 \\
12b &= -7d \qquad \text{(puisque } d \neq 0\text{)} \\
d &= -\tfrac{12}{7}b
\end{aligned}$$

Donc $a = b - d = b - (-\frac{12}{7}b) = \frac{19}{7}b$ et $c = b + d = b + (-\frac{12}{7}b) = -\frac{5}{7}b$.
Puisque $abc = 17\,955$, alors $(\frac{19}{7}b)(b)(-\frac{5}{7}b) = 17\,955$, ou $-\frac{95}{49}b^3 = 17\,955$, ou $b^3 = -9261$, d'où $b = -21$.
Donc $a = \frac{19}{7}b = \frac{19}{7}(-21) = -57$ et $c = -\frac{5}{7}b = -\frac{5}{7}(-21) = 15$.
On peut vérifier que $a = -57$, $b = -21$ et $c = 15$ ont un produit de $17\,955$, que $-57, -21, 15$ est une suite arithmétique (avec une raison de 36), et que $3a + b$, $3b + c$ et $3c + a$ (c.-à-d. -192, -48 et -12) forment une suite géométrique (avec une raison de $\frac{1}{4}$).
Donc $a + b + c = (-57) + (-21) + 15 = -63$.

Réponse : (A)

23. On transforme l'équation donnée en équations équivalentes :

$$\begin{aligned}
5x^2 - 4xy + 2x + y^2 &= 624 \\
5x^2 - 4xy + 2x + y^2 + 1 &= 625 \\
4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + 2x + 1 &= 625 \\
(2x-y)^2 + (x+1)^2 &= 625
\end{aligned}$$

On sait que $625 = 25^2$.
Puisque x et y sont des entiers, alors le membre de gauche est la somme de deux carrés parfaits.
Puisqu'un carré parfait est non négatif, alors chacun de ces carrés parfaits est au plus égal à 625, ou 25^2.
Les carrés parfaits de 0^2 à 25^2 sont :

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144,$$

$$169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625$$

Les paires de carrés parfaits dans cette liste qui ont une somme de 625 sont :

$$625 + 0 = 576 + 49 = 400 + 225$$

(On peut le vérifier assez rapidement en calculant la différence entre 625 et chacun des carrés parfaits pour voir si cette différence est un carré parfait. De plus, il n'est pas nécessaire de vérifier les nombres inférieurs à 324, puisque 625 est impair et un des deux carrés parfaits qui ont une somme de 625 doit être plus grand que l'autre. Il doit donc être plus grand que la moitié de 625.)
Donc $(2x-y)^2$ et $(x+1)^2$ doivent égaler 25^2 et 0^2 dans un certain ordre, ou ils doivent égaler 24^2 et 7^2 dans un certain ordre, ou ils doivent 20^2 et 15^2 dans un certain ordre.
Donc $2x-y$ et $x+1$ égalent ± 25 et 0 dans un certain ordre, ou ± 24 et ± 7 dans un certain ordre ou ± 20 et ± 15 dans un certain ordre.
Puisque $x \geq 0$, alors $x+1 \geq 1$. Il suffit donc de considérer les cas où $x+1 = 25, 24, 7, 20, 15$:

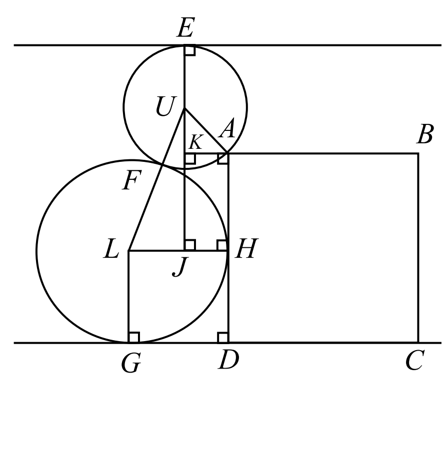
- Si $x+1=25$, alors $x=24$. Si $2x-y=0$ et $x=24$, alors $y=48$.
- Si $x+1=24$, alors $x=23$. Si $2x-y=7$ et $x=23$, alors $y=39$; si $2x-y=-7$ et $x=23$, alors $y=53$.
- Si $x+1=7$, alors $x=6$. Si $2x-y=24$ et $x=6$, alors $y=-12$; si $2x-y=-24$ et $x=6$, alors $y=36$.
- Si $x+1=20$, alors $x=19$. Si $2x-y=15$ et $x=19$, alors $y=23$; si $2x-y=-15$ et $x=19$, alors $y=53$.
- Si $x+1=15$, alors $x=14$. Si $2x-y=20$ et $x=14$, alors $y=8$; si $2x-y=-20$ et $x=14$, alors $y=48$.

D'après cette liste, les couples (x,y) d'entiers non négatifs, tels que $0 \leq x \leq y$, qui vérifient l'équation donnée sont $(x,y) = (24,48), (23,39), (23,53), (6,36), (19,23), (19,53), (14,48)$.
Il y a 7 couples. (On peut vérifier que chaque couple vérifie l'équation donnée.)

Réponse : (E)

24. Soit r le rayon du cercle inférieur.
On nomme le carré $ABCD$, le centre du cercle supérieur U et le centre du cercle inférieur L. De plus, soit E le point de contact du cercle supérieur avec la droite supérieure, G le point de contact du cercle inférieur avec la droite inférieure, F le point de contact des deux cercles et H le point de contact du cercle inférieur et du carré.
On trace les segments EU, UF, FL, LG, LH et UA.
On utilisera deux propriétés de des cercles :

- Lorsqu'on joint le centre d'un cercle et le point de contact d'une tangente au cercle, le segment de droite obtenu est perpendiculaire à la tangente. Donc UE est perpendiculaire à la droite supérieure, LG est perpendiculaire à la droite inférieure et LH est perpendiculaire à AD.
- Lorsque deux cercles sont tangents l'un à l'autre, le segment de droite qui joint leurs centres passe par le point de contact des cercles. Donc, UFL est un segment de droite.



On prolonge EU vers le bas pour qu'il rejoigne LH en J.
Puisque EU et AD sont perpendiculaires aux deux droites parallèles et que LH est perpendiculaire à AD, alors EJ est perpendiculaire à LH.
On prolonge BA pour qu'il rejoigne EJ en K. Comme dans l'argument précédent, AK est perpendiculaire à EJ.
On considère le triangle UJL qui est rectangle en J.
Puisque le cercle supérieur a un rayon de 65, alors $EU = UA = UF = 65$.
Puisque le cercle inférieur a un rayon de r, alors $FL = LH = LG = r$.
Donc $UL = UF + FL = 65 + r = r + 65$.

Puisque les deux droites sont parallèles, que EJ et LG sont perpendiculaires à ces droites et que LJ est parallèle à ces droites, $EU + UJ + LG$ est égal à la distance entre ces droites.
Donc $65 + UJ + r = 400$, d'où $UJ = 335 - r$.
Puisque $AKJH$ est un rectangle, alors $LJ = LH - JH = r - JH = r - AK$.
Or, le triangle UKA est rectangle et $UA = 65$.
De plus, $UK = EK - EU = EK - 65$.
EK est égal à la distance entre les droites parallèles moins la longueur des côtés du carré, soit $400 - 279$, ou 121.
Donc $UK = 121 - 65$, ou $UK = 56$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle UKA, on a $AK^2 = UA^2 - UK^2$, d'où $AK^2 = 65^2 - 56^2$, ou $AK^2 = 1089$, ou $AK^2 = 33^2$.
Puisque $AK > 0$, alors $AK = 33$.
Donc $LJ = r - 33$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle UJL, On a :

$$\begin{aligned}
UJ^2 + LJ^2 &= UL^2 \\
(335 - r)^2 + (r - 33)^2 &= (r + 65)^2 \\
r^2 - 670r + 335^2 + r^2 - 66r + 33^2 &= r^2 + 130r + 65^2 \\
r^2 - 866r + 109089 &= 0
\end{aligned}$$

Donc $r = \dfrac{866 \pm \sqrt{866^2 - 4(1)(109089)}}{2}$, ou $r = \dfrac{866 \pm 560}{2}$. Donc $r = 153$ ou $r = 713$.
Puisque r doit être inférieur à la distance entre les deux droites, c'est-à-dire à 400, alors $r = 153$.
Le choix de réponse le plus près est 153.

Réponse : (C)

25. Cette solution se veut aussi complète que possible. Dans un concours de questions à choix multiple, ceux qui tentent de résoudre un tel problème ne se préoccuperaient probablement pas de tous les détails.

1re étape : On récrit les fractions en utilisant les renseignements donnés
On considère un nombre réel x dont l'écriture décimale est de la forme $0{,}g_1g_2\dots g_p\overline{r_1r_2\dots r_q}$, p et q étant des entiers tels que $p \geq 0$ et $q > 0$ et $g_1, g_2, \dots, g_p, r_1, r_2, \dots, r_q$ étant des chiffres. (On remarque que si $p = 0$, alors $0{,}g_1g_2\dots g_p\overline{r_1r_2\dots r_q} = 0{,}\overline{r_1r_2\dots r_q}$.)
Donc $x = \dfrac{c}{10^p(10^q - 1)}$, c étant un entier strictement positif quelconque.
On le démontre avec un cas particulier, la démonstration générale étant donnée à la fin de la solution. Si $x = 0{,}12\overline{745}$, alors :

$$\begin{aligned}
x &= 0{,}12\overline{745} \\
100x &= 12{,}\overline{745} \\
10^2x - 12 &= 0{,}\overline{745} \\
1000(10^2x - 12) &= 745{,}\overline{745} \\
10^3(10^2x - 12) - 745 &= 0{,}\overline{745} \\
10^3(10^2x - 12) - 745 &= 10^2x - 12 \\
10^3(10^2x - 12) - (10^2x - 12) &= 745 \\
(10^3 - 1)(10^2x - 12) &= 745
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10^2x - 12 &= \frac{745}{10^3-1} \\
10^2x &= 12 + \frac{745}{10^3-1} \\
x &= \frac{12}{10^2} + \frac{745}{10^2(10^3-1)} \\
x &= \frac{(10^3-1)12 + 745}{10^2(10^3-1)}
\end{aligned}$$

On considère une fraction $\frac{m}{n}$, m et n étant des entiers strictement positifs et $m < n$. Alors $0 < \frac{m}{n} < 1$.

On considère maintenant une fraction $\frac{m}{n}$, m et n étant des entiers strictement positifs et $0 < \frac{m}{n} < 1$, dont l'écriture décimale comporte une séquence de 6 chiffres qui se répète indéfiniment.

C'est-à-dire on suppose que $\frac{m}{n} = 0{,}g_1g_2\ldots g_p\overline{r_1r_2\ldots r_6}$, p étant un entier supérieur ou égal à 0 et $g_1, g_2, \ldots, g_p, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ étant des chiffres.

D'après ce qui précède on a, $\frac{m}{n} = \frac{c}{10^p \cdot 999999}$, c étant un entier quelconque strictement positif.

(On remarque que $10^6 - 1 = 999999$.)

2^e^ étape : On analyse n par rapport aux conditions données

D'après la 1^re^ étape, on a $cn = 10^p \cdot 999999m$.

Puisque $\frac{m}{n}$ est irréductible, alors m et n n'admettent aucun diviseur commun supérieur à 1.

Donc, n doit être un diviseur de $10^p \cdot 999999$.

Or, $10^p \cdot 999999 = 2^p \cdot 5^p \cdot 999 \cdot 1001 = 2^p \cdot 5^p \cdot (3^3 \cdot 37) \cdot (11 \cdot 91) = 2^p \cdot 5^p \cdot 3^3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13$.

Puisque n est un diviseur de $2^p \cdot 5^p \cdot 3^3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13$, alors n ne peut admettre de diviseurs premiers autres que $2, 3, 5, 7, 11, 13, 37$.

Puisque n n'est pas divisible par le carré de n'importe quel entier strictement positif supérieur à 1, alors il ne peut être divisible par le carré de n'importe quel nombre premier.

Donc, n doit être un diviseur de $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13$, ou $1\,111\,110$.

3^e^ étape : On consolide ce qu'on a

On sait que toute fraction $\frac{m}{n}$ qui satisfait aux propriétés

- m et n sont des entiers strictement positifs tels que $m < n$,
- $\frac{m}{n}$ est une fraction irréductible,
- n n'est pas divisible par le carré de n'importe quel entier strictement positif supérieur à 1, et
- l'écriture décimale de $\frac{m}{n}$ comporte une séquence de 6 chiffres qui se répète indéfiniment

peut être écrite sous la forme $\frac{m}{n} = \frac{s}{1111110}$, s étant un entier positif tel que $1 \leq s \leq 1111109$.

(On n'a pas encore déterminé si la séquence *la plus courte* d'entiers qui se répète indéfiniment a une longueur de 6.)

4e étape : Chaque fraction $\frac{s}{1111110}$, $1 \leq s \leq 1111109$, peut être écrite sous la forme d'une fraction qui satisfait aux quatre propriétés précédentes

Chaque fraction $\frac{s}{1111110}$ est entre 0 et 1, elle peut être écrite sous forme irréductible et son dénominateur n'est pas divisible par le carré de n'importe quel entier positif supérieur à 1. Donc, n'importe quelle forme réduite (ou irréductible) de cette fraction satisfait aussi à cette propriété, puisque les diviseurs du dénominateur seront éliminés et non pas ajoutés.

De plus,

$$\frac{s}{1111110} = \frac{1}{10} \cdot \frac{9s}{999999} = \frac{1}{10}\left(y + \frac{z}{999999}\right)$$

y et z étant des entiers non négatifs tels que $0 \leq y < 10$ et $0 \leq z < 999998$. (y et z sont respectivement le quotient et le reste lorsque $9s$ est divisé par 999999.)

Soit $z = r_1r_2r_3r_4r_5r_6$, $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ étant des chiffres, (certains de ces chiffres, ou tous, sont possiblement 0), alors :

$$\frac{s}{1111110} = \frac{1}{10}\left(y + \frac{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}{999999}\right) = \frac{1}{10}\left(y{,}\overline{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}\right) = 0{,}y\overline{r_1r_2r_3r_4r_5r_6}$$

Chaque $\frac{s}{1111110}$ peut être écrit sous forme décimale comportant une séquence de 6 chiffres qui se répète indéfiniment.

De plus, chaque $\frac{s}{1111110}$ est différent des autres et produira une fraction $\frac{m}{n}$ différente.

Donc, le nombre de telles fractions $\frac{s}{1111110}$ (qui est égal à 1111109) est égal au nombre de fractions $\frac{m}{n}$ qui satisfont aux quatre propriétés ci-haut.

On n'a pas encore vérifié si la séquence de 6 chiffres est la *plus courte*.

5e étape : On considère des longueurs plus courtes possibls

Si la plus courte séquence de chiffres qui se répète est de longueur 6, il ne peut pas y en avoir de longueur 1, 2, 3, 4 ou 5.

En utilisant une démarche semblable à la première utilisée précédemment, on voit que $\frac{m}{n}$ ne peut être écrit sous une des formes $\frac{c}{10^p \cdot 9}$ ou $\frac{c}{10^p \cdot 99}$ ou $\frac{c}{10^p \cdot 999}$ ou $\frac{c}{10^p \cdot 9999}$ ou $\frac{c}{10^p \cdot 99999}$.

En utilisant une démarche semblable à l'analyse des diviseurs premiers utilisée précédemment, on voit que $\frac{m}{n}$ ne peut être écrit sous une des formes $\frac{t}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{t}{30}$ ou $\frac{t}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{t}{330}$ ou $\frac{t}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 37} = \frac{t}{1110}$ ou $\frac{t}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101} = \frac{t}{33330}$ ou $\frac{t}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 41 \cdot 271} = \frac{t}{333330}$.

Il est possible qu'une fraction $\frac{m}{n}$ qui vérifie les propriétés précédentes, y compris une séquence de 6 chiffres qui se répète indéfiniment, puisse aussi être écrite avec une séquence de 1, 2 ou 3 chiffres qui se répète indéfiniment.

Par exemple,

$$0{,}\overline{r_1} = 0{,}\overline{r_1r_1r_1r_1r_1r_1} \qquad 0{,}\overline{r_1r_2} = 0{,}\overline{r_1r_2r_1r_2r_1r_2} \qquad 0{,}\overline{r_1r_2r_3} = 0{,}\overline{r_1r_2r_3r_1r_2r_3}$$

ont toutes une séquence de 6 chiffres qui se répète indéfiniment.

Il est impossible pour une fraction $\frac{m}{n}$ donc l'écriture décimale comprend une séquence de 6 chiffres qui se répète indéfiniment d'avoir aussi une séquence de 4 ou 5 chiffres qui se répète

indéfiniment, sans avoir une séquence de 1 ou 2 chiffres qui se répète indéfiniment.
En effet, s'il existe une séquence de 4 chiffres qui se répète indéfiniment, alors

$$\frac{s}{1111110} = \frac{s}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{t}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101}$$

t étant entier strictement positif quelconque. Donc $2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101 \cdot s = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13 \cdot t$, d'où $101 \cdot s = 37 \cdot 7 \cdot 13 \cdot t$. Donc 101 est un diviseur de t et on a donc $\frac{s}{1111110} = \frac{t'}{2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 11} = \frac{t'}{330}$, t' étant un entier strictement positif quelconque.

Donc, l'écriture décimale de $\frac{s}{1111110} = \frac{t'}{330}$ comprend une séquence de 2 chiffres qui se répète indéfiniment. Donc, toute fraction dont l'écriture décimale a une séquence de 4 chiffres qui se répète indéfiniment sera traitée avec celles dont l'écriture décimale comprend des séquences de longueur 1, 2 ou 3.
De la même manière, on peut éliminer les fractions dont l'écriture décimale a une séquence de 5 chiffres qui se répète indéfiniment.
On doit donc éliminer les fractions dont l'écriture décimale a une séquence de 1, 2 ou 3 chiffres qui se répète indéfiniment.

6e étape : On considère les chevauchements
On doit considérer 1111109 fractions $\frac{m}{n}$ qui satisfont aux quatre propriétés.
Puisque l'écriture décimale de $\frac{m}{n}$ ne peut avoir une séquence de 1, 2 ou 3 chiffres qui se répète indéfiniment, $\frac{m}{n}$ ne peut être écrite sous l'une des formes $\frac{u}{1110}$ ou $\frac{v}{330}$ ou $\frac{w}{30}$, u, v et w étant des entiers strictement positifs tels que $u < 1110$, $v < 330$ et $w < 30$.
Soit U l'ensemble des 1009 fractions de la forme $\frac{u}{1110}$, V l'ensemble des 329 fractions de la forme $\frac{v}{330}$, et W l'ensemble des 29 fractions de la forme $\frac{w}{30}$.
N'importe quelle fraction de la forme $\frac{w}{30}$ est aussi de la forme $\frac{u}{1110}$ (puisque $\frac{w}{30} = \frac{37w}{1110}$) et de la forme $\frac{v}{330}$ (puisque $\frac{w}{30} = \frac{11w}{330}$).
Donc, toute fraction dans W est aussi dans U et dans V. Dans la notation d'ensembles, on écrit $W \subseteq U$ et $W \subseteq V$.
De plus, toute fraction qui est dans U et dans V est aussi dans W :

> On considère une fraction qui peut être écrite de la forme $\frac{u}{1110}$ et de la forme $\frac{v}{330}$.
> On a donc $\frac{u}{1110} = \frac{v}{330}$, ou $\frac{u}{37} = \frac{v}{11}$. Donc $11u = 37v$.
> Puisque $37v$ est un multiple de 11 et que 37 n'est pas divisible par le nombre premier 11, alors v est un multiple de 11.
> Donc $\frac{v}{330} = \frac{11f}{330} = \frac{f}{30}$, f étant un entier strictement positif quelconque et cette fraction est donc dans W.

Dans la notation d'ensembles, on écrit $U \cap V \subseteq W$.
Puisque $W \subseteq U$ et $W \subseteq V$ et $U \cap V \subseteq W$, alors $U \cap V = W$; en d'autres mots, l'ensemble des fractions qui sont dans U et dans V est précisément l'ensemble W.

7ᵉ étape : Compte final
On commence par les 1111109 fractions mentionnées précédemment et on veut omettre les fractions dans U, V et W.
Puisque chaque fraction dans W est aussi dans U et dans V, il suffit d'omettre les fractions dans U et V.
Le nombre total de fractions qui sont dans U ou dans V (c.-à-d. dans $U \cup V$) est égal au nombre de fractions dans U plus le nombre de fractions dans V moins le nombre de fractions qui chevauchent (c.-à-d. dans $U \cap V = W$). En effet, les fractions qui chevauchent sont comptées deux fois lorsqu'on compte les fractions dans U et les fractions dans V.
On doit donc omettre $1009 + 329 - 29$ fractions des 1111109 fractions initiales.
Donc F, le nombre de fractions qui satisfont aux propriétés, est égal à :

$$F = 1111109 - (1009 + 329 - 29) = 1109700$$

Puisque F a 7 chiffres, alors $G = F + 7 = 1109707$. La somme des carrés des chiffres de G est égale à $1^2 + 1^2 + 0^2 + 9^2 + 7^2 + 0^2 + 7^2$, ou $1 + 1 + 81 + 49 + 49$, ou 181.

8ᵉ étape : Démonstration générale de la 1ʳᵉ étape
On considère un nombre rationnel x ayant l'écriture décimale $0{,}g_1g_2\dots g_p\overline{r_1r_2\dots r_q}$, p et q étant des entiers tels que $p \geq 0$ et $q > 0$ et $g_1, g_2, \dots, g_p, r_1, r_2, \dots, r_q$ étant des chiffres. Donc :

$$\begin{aligned}
x &= 0{,}g_1g_2\dots g_p\overline{r_1r_2\dots r_q} \\
10^p x &= g_1g_2\dots g_p{,}\overline{r_1r_2\dots r_q} \\
10^p x - g_1g_2\dots g_p &= 0{,}\overline{r_1r_2\dots r_q} \\
10^q(10^p x - g_1g_2\dots g_p) &= r_1r_2\dots r_q{,}\overline{r_1r_2\dots r_q} \\
10^q(10^p x - g_1g_2\dots g_p) - r_1r_2\dots r_q &= 0{,}\overline{r_1r_2\dots r_q} \\
10^q(10^p x - g_1g_2\dots g_p) - r_1r_2\dots r_q &= 10^p x - g_1g_2\dots g_p \\
10^q(10^p x - g_1g_2\dots g_p) - (10^p x - g_1g_2\dots g_p) &= r_1r_2\dots r_q \\
(10^q - 1)(10^p x - g_1g_2\dots g_p) &= r_1r_2\dots r_q \\
10^p x - g_1g_2\dots g_p &= \frac{r_1r_2\dots r_q}{10^q - 1} \\
10^p x &= g_1g_2\dots g_p + \frac{r_1r_2\dots r_q}{10^q - 1} \\
x &= \frac{g_1g_2\dots g_p}{10^p} + \frac{r_1r_2\dots r_q}{10^p(10^q - 1)} \\
x &= \frac{(10^q - 1)g_1g_2\dots g_p + r_1r_2\dots r_q}{10^p(10^q - 1)}
\end{aligned}$$

Réponse : (E)