



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

# Concours Fermat

(11<sup>e</sup> année – Sec. V)

le mardi 24 février 2015

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 25 février 2015

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

Durée : 60 minutes

©2014 University of Waterloo

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

## Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.  
Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.  
Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

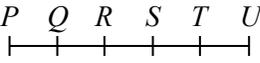
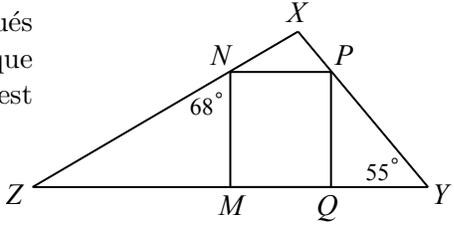
*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca), Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*

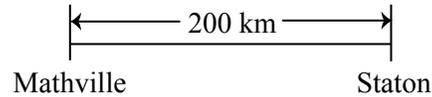
Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

### Partie A (5 points par bonne réponse)

- Quelle est la moyenne des cinq nombres 8, 9, 10, 11, 12 ?  
(A) 12,5      (B) 8      (C) 9,6      (D) 9      (E) 10
- Quelle est la valeur de  $\frac{2 \times 3 + 4}{2 + 3}$  ?  
(A) 2      (B) 5      (C) 8      (D) 4      (E) 11
- Six points,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$  et  $U$ , sont placés à égales distances sur une droite. Eva marche de  $P$  à  $U$  et revient à  $P$ . À quel point a-t-elle complété 70 % de son trajet ?  
(A)  $T$       (B)  $Q$       (C)  $R$   
(D)  $S$       (E)  $U$   

- Si  $x = -3$ , quelle est la valeur de  $(x - 3)^2$  ?  
(A) 12      (B) 36      (C) -12      (D) 0      (E) -36
- Les points  $P(3, -2)$ ,  $Q(3, 1)$ ,  $R(7, 1)$  et  $S$  forment un rectangle. Quelles sont les coordonnées de  $S$  ?  
(A)  $(-1, -2)$       (B)  $(7, -2)$       (C)  $(7, 4)$       (D)  $(3, 7)$       (E)  $(1, -2)$
- Dans la figure ci-contre,  $MNPQ$  est un rectangle et les points  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$  sont situés sur les côtés du triangle  $XYZ$ . Sachant que  $\angle ZNM = 68^\circ$  et que  $\angle XYZ = 55^\circ$ , quelle est la mesure de l'angle  $YXZ$  ?  
(A)  $77^\circ$       (B)  $113^\circ$       (C)  $93^\circ$   
(D)  $97^\circ$       (E)  $103^\circ$   

- Valérie a la moitié de l'argent qu'il faut pour acheter un collier à sa mère. Sa soeur lui remet 30 \$. Valérie a maintenant les trois quarts de l'argent qu'il lui faut. Son père accepte de lui remettre le reste de ce qu'il lui faut. Combien son père lui donnera-t-il ?  
(A) 7,50 \$      (B) 15 \$      (C) 22,50 \$      (D) 30 \$      (E) 120 \$
- Sachant que  $x$  et  $y$  sont des entiers strictement positifs tels que  $3^x 5^y = 225$ , quelle est la valeur de  $x + y$  ?  
(A) 7      (B) 4      (C) 5      (D) 3      (E) 8
- À l'école secondaire Paquin, 36 élèves font partie de l'équipe de baseball, de l'équipe de hockey ou des deux. Sachant que l'équipe de baseball compte 25 élèves et que l'équipe de hockey compte 19 élèves, combien d'élèves font partie des deux équipes ?  
(A) 7      (B) 8      (C) 9      (D) 10      (E) 11

10. Anca et Boris quittent Mathville en même temps et voyagent sur une route droite en direction de Staton. Boris conduit à une vitesse de 50 km/h. Anca conduit à une vitesse de 60 km/h, mais elle s'arrête en chemin pour se reposer. Les deux arrivent à Staton en même temps. Combien de temps Anca s'est-elle arrêtée pour se reposer ?



- (A) 40 minutes (B) 10 minutes (C) 67 minutes  
(D) 33 minutes (E) 27 minutes

**Partie B (6 points par bonne réponse)**

11. Les entiers positifs de trois chiffres, 789 et 998, n'utilisent aucun autre chiffre que 7, 8 et 9. En tout, combien y a-t-il d'entiers positifs de trois chiffres qui n'utilisent aucun autre chiffre que 7, 8 et 9 ?

- (A) 36 (B) 6 (C) 9 (D) 18 (E) 27

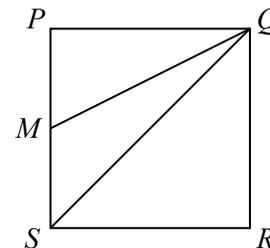
12. Sachant que  $\cos 60^\circ = \cos 45^\circ \cos \theta$  et  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , quelle est la valeur de  $\theta$  ?

- (A)  $0^\circ$  (B)  $15^\circ$  (C)  $30^\circ$  (D)  $45^\circ$  (E)  $60^\circ$

13. À la fin de l'an 2000, Steve avait 100 \$ et Wilfrid avait 10 000 \$. À la fin de chaque année suivante, Steve avait le double de l'argent qu'il avait à la fin de l'année précédente et Wilfrid avait la moitié de l'argent qu'il avait à la fin de l'année précédente. À la fin de quelle année Steve avait-il plus d'argent que Wilfrid pour la première fois ?

- (A) 2002 (B) 2003 (C) 2004 (D) 2005 (E) 2006

14. Dans la figure ci-contre,  $PQRS$  est un carré et  $M$  est le milieu de  $PS$ . Quel est le rapport de l'aire du triangle  $QMS$  à l'aire du carré  $PQRS$  ?



- (A) 1 : 6 (B) 1 : 4 (C) 1 : 3  
(D) 1 : 8 (E) 1 : 2

15. Un examen de musique est composé de 50 questions à choix multiple. Le résultat de Zoltan est calculé :

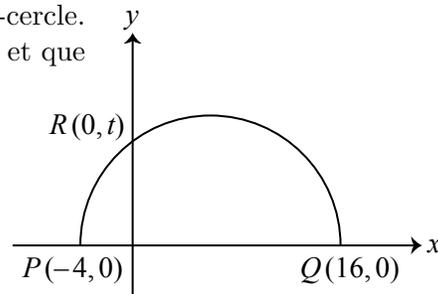
- en ajoutant 4 points pour chaque bonne réponse,
- en soustrayant 1 point pour chaque réponse erronée et
- en accordant 0 point pour chaque question laissée sans réponse.

Zoltan répond à 45 des 50 questions et il obtient un total de 135 points. Combien de ses réponses sont *erronées* ?

- (A) 9 (B) 15 (C) 41 (D) 40 (E) 5

16. Dans la figure ci-contre, le segment ayant pour extrémités  $P(-4,0)$  et  $Q(16,0)$  est le diamètre d'un demi-cercle. Sachant que le point  $R(0,t)$  est situé sur le cercle et que  $t > 0$ , quelle est la valeur de  $t$  ?

- (A) 6                      (B) 10                      (C) 8  
(D) 9                      (E) 7



17. Si  $a$  et  $b$  sont deux nombres distincts tels que  $\frac{a+b}{a-b} = 3$ , quelle est la valeur de  $\frac{a}{b}$  ?  
(A)  $-1$                       (B)  $3$                       (C)  $1$                       (D)  $2$                       (E)  $5$
18. Il existe deux valeurs de  $k$  pour lesquelles l'équation  $x^2 + 2kx + 7k - 10 = 0$  admet deux racines réelles égales (c.-à-d. qu'il existe une seule valeur de  $x$  comme solution). La somme de ces valeurs de  $k$  est égale à :  
(A)  $0$                       (B)  $-3$                       (C)  $3$                       (D)  $-7$                       (E)  $7$
19. Trois droites parallèles ont pour ordonnées à l'origine 2, 3 et 4. Les abscisses à l'origine de ces droites ont une somme de 36. Quelle est la pente de ces droites parallèles ?  
(A)  $-\frac{1}{3}$                       (B)  $-\frac{2}{9}$                       (C)  $-\frac{1}{6}$                       (D)  $-4$                       (E)  $-\frac{1}{4}$
20. Combien y a-t-il d'entiers  $a$  ( $1 \leq a \leq 10$ ) pour lesquels  $a^{2014} + a^{2015}$  est divisible par 5 ?  
(A)  $2$                       (B)  $3$                       (C)  $4$                       (D)  $5$                       (E)  $6$

**Partie C (8 points par bonne réponse)**

21. Amina et Ben lancent à tour de rôle une pièce de monnaie juste, Amina lançant en premier. Le jeu s'arrête lorsque chaque joueur a lancé trois fois. Le premier joueur à obtenir *pile* gagne. Si personne n'obtient *pile*, personne ne gagne. Quelle est la probabilité pour qu'Amina gagne ?  
(A)  $\frac{21}{32}$                       (B)  $\frac{5}{8}$                       (C)  $\frac{3}{7}$                       (D)  $\frac{11}{16}$                       (E)  $\frac{9}{16}$
22. Trois entiers distincts,  $a$ ,  $b$  et  $c$ , satisfont aux trois conditions suivantes :
- $abc = 17\,955$ ,
  - $a$ ,  $b$  et  $c$ , dans cet ordre, forment une suite arithmétique et
  - $(3a + b)$ ,  $(3b + c)$  et  $(3c + a)$ , dans cet ordre, forment une suite géométrique.

Quelle est la valeur de  $a + b + c$  ?

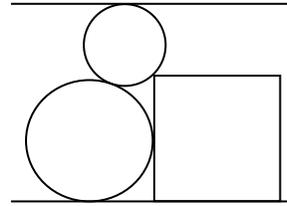
(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7 est une suite arithmétique de trois termes.)

Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle. Par exemple, 3, 6, 12 est une suite géométrique de trois termes.)

- (A)  $-63$                       (B)  $-42$                       (C)  $-68\,229$                       (D)  $-48$                       (E)  $81$

23. Combien y a-t-il de couples  $(x, y)$  d'entiers non négatifs, tels que  $0 \leq x \leq y$ , qui vérifient l'équation  $5x^2 - 4xy + 2x + y^2 = 624$  ?
- (A) 3            (B) 4            (C) 5            (D) 6            (E) 7

24. Dans la figure ci-contre, deux cercles et un carré sont situés entre deux droites parallèles ayant une distance de 400 entre elles. Le carré a des côtés de longueur 279 et un de ses côtés est situé sur la droite inférieure. Les deux cercles sont tangents l'un à l'autre et chaque cercle est tangent à une des droites. De plus, chaque cercle touche le carré en exactement un point — le cercle inférieur touche un côté du carré et le cercle supérieur touche un sommet du carré. Le cercle supérieur a un rayon de 65. Le rayon du cercle inférieur est plus près de :



- (A) 151            (B) 152            (C) 153  
 (D) 154            (E) 155
25. Il existe  $F$  fractions  $\frac{m}{n}$  satisfaisant aux propriétés suivantes :
- $m$  et  $n$  sont des entiers strictement positifs tels que  $m < n$ ,
  - $\frac{m}{n}$  est une fraction irréductible,
  - $n$  n'est pas divisible par le carré de n'importe quel entier supérieur à 1 et
  - dans l'écriture décimale de  $\frac{m}{n}$ , la séquence la plus courte de chiffres qui se répète consécutivement et indéfiniment a une longueur de 6 chiffres.
- (Remarque : Dans l'écriture décimale  $0,12\overline{745} = 0,12745745745\dots$ , la séquence la plus courte de chiffres qui se répète consécutivement et indéfiniment a une longueur de 3 chiffres et dans l'écriture décimale  $0,\overline{5}$ , la séquence la plus courte de chiffres qui se répète consécutivement et indéfiniment a une longueur de 1 chiffre.)

Soit  $G = F + p$ , l'entier  $F$  étant composé de  $p$  chiffres. Quelle est la somme des carrés des chiffres de  $G$  ?

- (A) 170            (B) 168            (C) 217            (D) 195            (E) 181



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

**Pour les élèves...**

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2015! Chaque année, plus de 200 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- plus d'information à propos du concours Hypatie
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

**Pour les enseignants...**

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11<sup>e</sup> et 12<sup>e</sup> année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours