Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide 2015

le mercredi 15 avril 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. (a) On a : $\dfrac{10^2-9^2}{10+9} = \dfrac{100-81}{19} = \dfrac{19}{19} = 1$

OU On factorise $10^2 - 9^2$ comme différence de carrés et on obtient :

$$\frac{10^2-9^2}{10+9} = \frac{(10+9)(10-9)}{10+9} = 10-9 = 1$$

On remarque que l'expression $10+9$, qui est annulée au numérateur et au dénominateur, n'est pas égale à 0.

(b) Puisque $\dfrac{x+1}{x+4} = 4$, alors $x+1 = 4(x+4)$, d'où $x+1 = 4x+16$, ou $3x = -15$.
Donc $3x+8 = -15+8 = -7$.

OU Puisque $3x = -15$, alors $x = -5$.
Donc $3x+8 = 3(-5)+8 = -15+8 = -7$.

(c) Puisque $f(x) = 2x-1$, alors $f(3) = 2(3)-1 = 5$.
Donc $(f(3))^2 + 2(f(3)) + 1 = 5^2 + 2(5) + 1 = 25+10+1 = 36$.

OU Puisque $f(x) = 2x-1$, alors :

$$(f(x))^2 + 2(f(x)) + 1 = (f(x)+1)^2 = (2x-1+1)^2 = 4x^2$$

Donc $(f(3))^2 + 2(f(3)) + 1 = 4(3^2) = 36$.

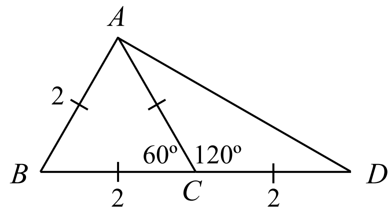
2. (a) Puisque $\sqrt{a} + \sqrt{a} = 20$, alors $2\sqrt{a} = 20$, d'où $\sqrt{a} = 10$. Donc $a = 10^2$, ou $a = 100$.

(b) Soit r le rayon du grand cercle.
Puisque le petit cercle a un rayon de 1, il a une aire de $\pi \cdot 1^2$, ou π.
Puisque la région entre les cercles a une aire égale à l'aire du petit cercle, alors le grand cercle a une aire de $\pi + \pi$, ou 2π.
Donc $\pi r^2 = 2\pi$, ou $r^2 = 2$. Puisque $r > 0$, alors $r = \sqrt{2}$.

(c) Puisque 30 élèves avaient une note moyenne de 80, alors la note totale de ces 30 élèves est égale à $30 \cdot 80$, ou 2400.
Lorsque 2 élèves quittent la classe, il reste 28 élèves et ils ont une note moyenne de 82.
Donc, la note totale de ces 28 élèves est égale à $28 \cdot 82$, ou 2296.
Donc, la note totale des 2 élèves qui ont quitté la classe est égale à $2400 - 2296$, ou 104.
La note moyenne de ces deux élèves est égale à $\dfrac{104}{2}$, ou 52.

3. (a) *Solution 1*

On trace AD.
Puisque $BC = CD$ et $BD = 4$, alors $BC = CD = 2$. De plus, $AB = BC = 2$.
Puisque le triangle ABC est équilatéral, $\angle ABC = \angle ACB = 60°$.
Puisque $\angle ACB = 60°$, alors $\angle ACD = 180° - \angle ACB$, d'où $\angle ACD = 180° - 60°$, ou $\angle ACD = 120°$.



Puisque $AC = CD$, le triangle ACD est isocèle et $\angle CDA = \angle CAD$.
Chacun de ces angles a une mesure égale à $\frac{1}{2}(180° - \angle ACD)$, ou $\frac{1}{2}(180° - 120°)$, ou 30°.
Puisque $\angle ABD = 60°$ et $\angle ADB = 30°$, alors $\angle BAD = 90°$. Le triangle DBA est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Donc $AD = \sqrt{3}AB$, d'où $AD = 2\sqrt{3}$.

Solution 2

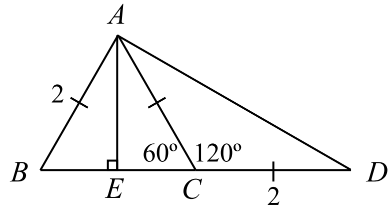
On trace AD.
Puisque $BC = CD$ et $BD = 4$, alors $BC = CD = 2$. De plus, $AB = BC = 2$.
Puisque $\angle ACB = 60°$, alors $\angle ACD = 180° - \angle ACB$, d'où $\angle ACD = 180° - 60°$, ou $\angle ACD = 120°$. D'après la loi du cosinus dans le triangle ACD, on a :

$$\begin{aligned} AD^2 &= AC^2 + CD^2 - 2(AC)(CD)\cos(\angle ACD) \\ &= 2^2 + 2^2 - 2(2)(2)\cos 120° \\ &= 4 + 4 - 8(-\tfrac{1}{2}) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Puisque $AD^2 = 12$ et $AD > 0$, alors $AD = \sqrt{12}$, ou $AD = 2\sqrt{3}$.

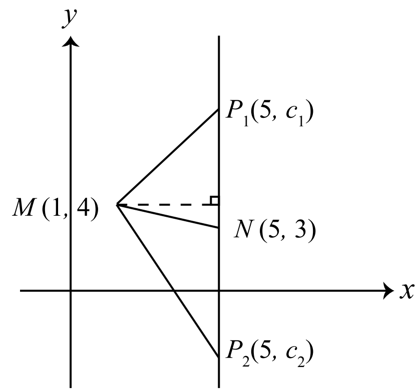
Solution 3

On trace AD et on abaisse une perpendiculaire du point A jusqu'au point E sur BC.
Puisque $BC = CD$ et $BD = 4$, alors $BC = CD = 2$. De plus, $AB = BC = 2$.
Puisque le triangle ABC est équilatéral, $\angle ABC = \angle ACB = 60°$.
Puisque $\angle ABC = 60°$ et $\angle AEB = 90°$, le triangle ABE est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Donc $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, d'où $AE = \sqrt{3}$.
Puisque $\angle ACB = 60°$, alors $\angle ACD = 180° - \angle ACB$, d'où $\angle ACD = 180° - 60°$, ou $\angle ACD = 120°$.



Puisque $AC = CD$, le triangle ACD est isocèle et $\angle CDA = \angle CAD$.
Chacun de ces angles a une mesure égale à $\frac{1}{2}(180° - \angle ACD)$, ou $\frac{1}{2}(180° - 120°)$, ou 30°.
DAE est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $AD = 2AE$, d'où $AD = 2\sqrt{3}$.

(b) Les points $N(5,3)$ et $P(5,c)$ sont situés sur la même droite verticale. On considère la base NP du triangle MNP. Soit b la longueur de cette base.
La hauteur correspondante du triangle MNP est la distance du point $M(1,4)$ jusqu'à la droite qui passe aux points N et P. Puisque M est situé sur la droite d'équation $x=1$ et que N et P sont situés sur la droite d'équation $x=5$, alors le triangle a une hauteur de 4.



Puisque le triangle MNP a une aire de 14, on a $\frac{1}{2}bh = 14$.
Puisque $h=4$, alors $\frac{1}{2}b(4) = 14$, d'où $2b = 14$, ou $b = 7$.
Donc, le point $P(5,c)$ est à une distance de 7 unités du point $N(5,3)$.
Puisque NP est un segment de droite vertical, alors $c = 3+7$ ou $c = 3-7$, d'où $c = 10$ ou $c = -4$.
Ces deux valeurs ont une somme de $10 + (-4)$, ou 6.
(On aurait pu remarquer que les deux positions du point P doivent être symétriques par rapport au point N et que les deux valeurs de c auront donc une moyenne de 3. Elles auront donc une somme de $2 \cdot 3$, ou 6.)

4. (a) Pour déterminer l'ordonnée à l'origine, on pose $x=0$. On obtient :

$$y = (-1)(-2)(-3) - (-2)(-3)(-4) = (-6) - (-24) = 18$$

Avant de déterminer les abscisses à l'origine, on transforme l'équation pour la présenter sous forme factorisée :

$$y = (x-1)(x-2)(x-3)-(x-2)(x-3)(x-4) = (x-2)(x-3)\left((x-1)-(x-4)\right) = 3(x-2)(x-3)$$

L'équation est donc $y = 3(x-2)(x-3)$. Pour déterminer les abscisses à l'origine, on pose $y=0$. On obtient $3(x-2)(x-3) = 0$, d'où $x=2$ ou $x=3$.
La courbe a pour abscisses à l'origine 2 et 3 et pour ordonnée à l'origine 18.

(b) Les courbes ont pour équation respective $y = x^3 - x^2 + 3x - 4$ et $y = ax^2 - x - 4$. Les coordonnées d'un point d'intersection vérifient chacune des équations. Pour déterminer les points d'intersection, on pose l'égalité entre les y des équations (les membres de gauche) et on détermine les valeurs de x de l'équation qui en résulte, soit $x^3-x^2+3x-4 = ax^2-x-4$.
Dans ce problème, on cherche toutes les valeurs de a pour lesquelles l'équation $x^3 - x^2 + 3x - 4 = ax^2 - x - 4$ admet exactement deux solutions.
On résout l'équation :

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 3x - 4 &= ax^2 - x - 4 \\ x^3 - x^2 - ax^2 + 4x &= 0 \\ x^3 - (a+1)x^2 + 4x &= 0 \\ x(x^2 - (a+1)x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = 0$ ou $x^2 - (a+1)x + 4 = 0$.
On remarque que $x = 0$ n'est pas une solution de l'équation $x^2 - (a+1)x + 4 = 0$, puisque si on reporte $x = 0$ dans le membre de gauche, on obtient 4 et non pas 0.
Donc, pour que les deux courbes admettent exactement deux points d'intersection, l'équation du second degré $x^2 - (a+1)x + 4 = 0$ doit admettre exactement une solution. Son discriminant doit donc égaler 0.
On doit donc avoir $(a+1)^2 - 4(1)(4) = 0$, ou $(a+1)^2 = 16$, d'où $a + 1 = \pm 4$.
Si $a + 1 = 4$, alors $a = 3$; si $a + 1 = -4$, alors $a = -5$.
Les courbes d'équations $y = x^3 - x^2 + 3x - 4$ et $y = ax^2 - x - 4$ se coupent donc en exactement deux points lorsque $a = 3$ ou $a = -5$. Les valeurs de a sont donc 3 et -5.
(On peut vérifier que les courbes d'équations $y = x^3 - x^2 + 3x - 4$ et $y = 3x^2 - x - 4$ se coupent aux points $(0, -4)$ et $(2, 6)$ et que les courbes d'équations $y = x^3 - x^2 + 3x - 4$ et $y = -5x^2 - x - 4$ se coupent aux points $(0, -4)$ et $(-2, -22)$.)

5. (a) Soit $AB = AC = DE = x$.
Puisque $DB = 9$ et $EC = 8$, alors $AD = x - 9$ et $AE = x - 8$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADE, on a :

$$\begin{aligned} AD^2 + AE^2 &= DE^2 \\ (x-9)^2 + (x-8)^2 &= x^2 \\ x^2 - 18x + 81 + x^2 - 16x + 64 &= x^2 \\ x^2 - 34x + 145 &= 0 \\ (x-5)(x-29) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = 5$ ou $x = 29$.
Or $AB \geq DB = 9$. On rejette donc $x = 5$.
Donc $DE = 29$.

(b) Puisque chaque liste est composée de 6 entiers consécutifs strictement positifs et que le plus petit entier des listes respectives est a ou b, la première liste est composée des entiers $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$ et la deuxième liste est composée des entiers $b, b+1, b+2, b+3, b+4, b+5$. On a aussi $1 \leq a < b$.
On détermine d'abord les couples (a, b) pour lesquels le nombre 49 parait dans la troisième liste, puis on déterminera, parmi ces couples, ceux pour lesquels la troisième liste ne contient aucun multiple de 64. Ensuite, on gardera seulement les couples pour lesquels il y a un nombre supérieur à 75 dans la troisième liste.

D'après la 1re condition donnée, 49 est le produit d'un entier de la première liste et d'un entier de la deuxième liste.
Puisque $49 = 7^2$ et que 7 est un nombre premier, ces entiers sont 1 et 49 ou 7 et 7.
Si 1 est dans une liste, on doit avoir $a = 1$ ou $b = 1$. Puisque $1 \leq a < b$, alors $a = 1$.
Si 49 est dans la deuxième liste, alors un des nombres $b, b+1, b+2, b+3, b+4, b+5$ est égal à 49 et on a alors $44 \leq b \leq 49$.
Donc si 1 et 49 paraissent chacun dans une des deux premières listes, (a, b) doit être un des couples suivants :

$$(1, 49), (1, 48), (1, 47), (1, 46), (1, 45), (1, 44)$$

Si 7 parait dans la première liste, alors un des nombres $a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5$ est égal à 7 et on a alors $2 \leq a \leq 7$. De même, si 7 parait dans la deuxième liste, on a $2 \leq b \leq 7$.

Donc si 7 parait dans chacune des deux premières listes et sachant que $a < b$, alors (a, b) doit être un des couples suivants :

$$(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(4,5),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7),(6,7)$$

D'après la deuxième condition donnée, aucun nombre de la première liste ne peut être multiplié par un nombre de la deuxième liste pour obtenir un produit qui est un multiple de 64.
Puisque les valeurs possibles de a et b sont $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 44, 45, 46, 47, 48, 49$, alors les entiers qui pourraient faire partie des deux premières listes sont les entiers de 1 à 12 et les entiers de 44 à 54. (Par exemple, si le premier nombre d'une liste est 7, les cinq nombres suivants de cette liste sont 8, 9, 10, 11, 12.)
Il n'y a aucun multiple de 32 ou de 64 dans ces listes.
Pour qu'une paire de nombres, un de chaque liste, ait un produit qui est un multiple de 64, un nombre doit être un multiple de 4 et l'autre un multiple de 16, ou les deux doivent être multiples de 8.
Si (a, b) est égal à $(1, 48), (1, 47), (1, 46), (1, 45)$ ou $(1, 44)$, alors 4 parait dans la première liste et 48 parait dans la deuxième liste ; ces nombres ont un produit de 192, soit $3 \cdot 64$.
Si (a, b) est égal à $(1, 49)$, la première liste et la deuxième liste contiennent chacune un multiple de 4 et ne contiennent aucun multiple de 8. La troisième liste ne contient donc aucun multiple de 64.
Si (a, b) est égal à $(3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (5, 6), (5, 7)$ ou $(6, 7)$, 8 parait dans chaque liste et 64 parait donc dans la troisième liste.
Si (a, b) est égal à $(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$ ou $(2, 7)$, la première liste ne contient aucun multiple de 8 ou de 16 et la deuxième liste ne contient aucun multiple de 16. La troisième liste ne contient donc aucun multiple de 64.
En tenant compte des deux premières conditions, les couples possibles (a, b) sont $(1, 49)$, $(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$ et $(2, 7)$.

D'après la troisième condition, la troisième liste contient au moins un nombre supérieur à 75.
Les couples (a, b) possibles, soit $(1, 49), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$ et $(2, 7)$, génèrent chacun 6 autre couples, les plus grands étant respectivement $(6, 54), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (7, 11)$ et $(7, 12)$.
Les plus grands nombres correspondants, dans la troisième liste, sont les produits des deux nombres de chaque couple. Ces produits respectifs sont $324, 56, 63, 70, 77$ et 84.
Les produits supérieurs à 75 sont 324, 77 et 84, qui proviennent des couples $(6, 54)$, $(7, 11)$ et $(7, 12)$.
Les couples (a, b) qui restent sont donc $(1, 49), (2, 6)$ et $(2, 7)$

Les couples (a, b) qui satisfont aux trois conditions données sont $(1, 49), (2, 6)$ et $(2, 7)$.

6. (a) On sait que lorsque les nombres a, b et c sont écrits dans cet ordre dans trois secteurs consécutifs, alors $b = ac$.
Donc lorsque a et b sont écrits dans deux secteurs consécutifs, le secteur suivant aura le nombre $c = \dfrac{b}{a}$. (Ainsi chaque nombre est égal au nombre précédent divisé par le nombre qui le précède.)
En commençant par les nombres 2 et 3 et en procédant dans le sens des aiguilles d'une

montre, on obtient :

$$2,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3/2}{3}=\frac{1}{2},\ \frac{1/2}{3/2}=\frac{1}{3},\ \frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3},\ \frac{2/3}{1/3}=2,\ \frac{2}{2/3}=3,\ \frac{3}{2},\ \ldots$$

Après les 6 premiers termes, les deux premiers termes (2 et 3) reviennent et les 6 premiers termes seront répétés. (En effet, puisque chaque terme provient des deux termes précédents, lorsque deux termes consécutifs reviennent, ils produisent le même terme qu'à leur tour précédent.)

Puisqu'il y a 36 termes, les 6 termes paraissent exactement $\frac{36}{6}$ fois, ou 6 fois.

La somme des 36 termes est donc égale à $6\left(2+3+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)$, ou $6(2+3+2+1)$, ou 48.

(b) On considère deux cas : $x > -1$ (c.-à-d. $x+1>0$) et $x<-1$ (c.-à-d. $x+1<0$). On doit avoir $x \neq -1$.

1[er] cas : $x > -1$

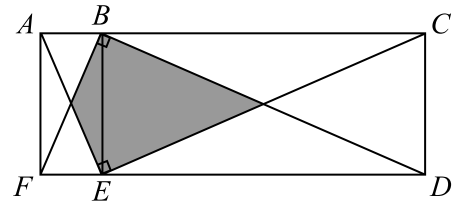
On multiplie chaque membre de l'inéquation $0 < \frac{x^2-11}{x+1} < 7$ par l'expression $x+1$ qui est positive. On obtient $0 < x^2 - 11 < 7x+7$.
On a donc $x^2-11>0$ et $x^2-11<7x+7$.
D'après la première inéquation, on a $x^2>11$, d'où $x>\sqrt{11}$ ou $x<-\sqrt{11}$.
Puisque $x>-1$, alors $x>\sqrt{11}$. (On remarque que $-\sqrt{11}<-1$.)
D'après la deuxième inéquation, on a $x^2-7x-18<0$, ou $(x-9)(x+2)<0$. Donc $-2<x<9$. (Puisque l'équation $y=x^2-7x-18$ représente une parabole ouverte vers le haut, les valeurs de y sont négatives lorsque les valeurs de x sont entre les abscisses à l'origine de la parabole.)
Sachant que $x>-1$ et $-2<x<9$, alors $-1<x<9$.
Sachant en plus que $x>\sqrt{11}$, l'intervalle est réduit à $\sqrt{11}<x<9$.

2[e] cas : $x < -1$

On multiplie chaque membre de l'inéquation $0 < \frac{x^2-11}{x+1} < 7$ par l'expression $x+1$, qui est négative. On obtient $0 > x^2-11 > 7x+7$.
On a donc $x^2-11<0$ et $x^2-11>7x+7$.
D'après la première inéquation, on a $x^2<11$, d'où $-\sqrt{11}<x<\sqrt{11}$.
Puisque $x<-1$ et $-\sqrt{11}<x<\sqrt{11}$, alors $-\sqrt{11}<x<-1$.
D'après la deuxième inéquation, on a $x^2-7x-18>0$, d'où $(x-9)(x+2)>0$. Donc $x<-2$ ou $x>9$. (Puisque l'équation $y=x^2-7x-18$ représente une parabole ouverte vers le haut, les valeurs de y sont positives lorsque les valeurs de x sont à l'extérieur des abscisses à l'origine de la parabole.)
Puisque $x<-1$, on omet $x>9$ pour ne garder que $x<-2$.
Sachant que $-\sqrt{11}<x<-1$ et $x<-2$, les valeurs de x, dans ce cas, sont celles de l'intervalle $-\sqrt{11}<x<-2$.

Donc, les valeurs de x pour lesquelles $0<\frac{x^2-11}{x+1}<7$ sont les valeurs dans les intervalles $-\sqrt{11}<x<-2$ et $\sqrt{11}<x<9$.

7. (a) On trace le segment BE.



Puisque les triangles FBD et AEC sont isométriques, alors $FB = AE$.
Puisque les triangles FAB et AFE sont rectangles, qu'ils partagent un côté commun AF et que leur hypoténuse est égale ($FB = AE$), ils sont donc isométriques, d'où $AB = FE$.
Le quadrilatère $BAFE$ a des angles droits en A et F (AB et FE sont donc parallèles) et ses côtés opposés AB et FE sont égaux. Il s'agit donc d'un rectangle.
Donc, le quadrilatère $BCDE$ est aussi un rectangle.
Or, les deux diagonales d'un rectangle partagent le rectangle en 4 triangles de même aire. (La diagonale AE coupe le rectangle $ABEF$ en deux triangles isométriques qui ont donc la même aire. Les deux diagonales se coupent en leur milieu. Les quatre petits triangles ont donc la même aire.)
Puisque $\frac{1}{4}$ du rectangle $ABEF$ est ombré et que $\frac{1}{4}$ du rectangle $BCDE$ est ombré, alors $\frac{1}{4}$ du rectangle $ACDF$ est ombré. (Soit x l'aire de $ABEF$ et y l'aire de $BCDE$. L'aire de la partie ombrée est égale à $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$, ce qui est égal à $\frac{1}{4}$ de l'aire totale $x + y$.)
Puisque $AC = 200$ et $CD = 50$, l'aire du rectangle $ACDF$ est égale à 200(50), ou 10 000.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $\frac{1}{4}(10\,000)$, ou 2500.

(b) Soit a le premier terme de la suite arithmétique $a_1, a_2, a_3, \ldots$ est a et d la raison arithmétique (la constante qu'on additionne entre les termes).
Pour chaque entier strictement positif n, on a $a_n = a + (n-1)d$.
Puisque $a_1 = a$, $a_2 = a + d$ et $a_1 \neq a_2$, alors $d \neq 0$.
Puisque a_1, a_2, a_6, dans cet ordre, forment une suite géométrique, alors $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_6}{a_2}$, d'où $(a_2)^2 = a_1a_6$.
On reporte $a_1 = a$, $a_2 = a + d$ et $a_6 = a + 5d$ dans cette dernière équation :

$$\begin{aligned} (a+d)^2 &= a(a+5d) \\ a^2 + 2ad + d^2 &= a^2 + 5ad \\ d^2 &= 3ad \\ d &= 3a \qquad \text{(puisque } d \neq 0\text{)} \end{aligned}$$

Donc pour chaque valeur de n ($n \geq 1$), on a : $a_n = a+(n-1)d = a+(n-1)(3a) = (3n-2)a$
Donc $a_4 = (3(4)-2)a$, ou $a_4 = 10a$ et $a_k = (3k-2)a$. (On remarque que selon cette dernière équation, $a_1 = (3(1) - 2)a$, c'est-à-dire que $a_1 = a$.)
Pour que a_1, a_4 et a_k forment une suite géométrique, on doit aussi avoir $(a_4)^2 = a_1a_k$. Donc :

$$\begin{aligned} (10a)^2 &= (a)((3k-2)a) \\ 100a^2 &= (3k-2)a^2 \end{aligned}$$

Puisque $d \neq 0$ et $d = 3a$, alors $a \neq 0$.
Puisque $100a^2 = (3k-2)a^2$ et $a \neq 0$, alors $100 = 3k - 2$, d'où $3k = 102$, ou $k = 34$.
Pour vérifier, on remarque que $a_1 = a$, $a_4 = 10a$ et $a_{34} = 100a$ et que ces trois termes forment une suite géométrique avec une raison géométrique égale à 10.
Donc, la seule valeur possible de k est 34.

8. (a) Puisque k est un entier strictement positif, alors $k \geq 1$.
Le point $(0, -5)$ est situé sur la parabole et sur le cercle. (Les coordonnées $(0, -5)$ vérifient l'équation de la parabole ($-5 = \frac{0^2}{k} - 5$) ainsi que l'équation du cercle ($0^2 + 5^2 = 25$).)
Donc pour tout entier strictement positif k, les deux courbes se coupent en au moins un point.
Or si $y = -5$, alors $x^2 + (-5)^2 = 25$, d'où $x^2 = 0$, ou $x = 0$. Donc, il n'y a qu'un seul point sur le cercle et la parabole ayant une ordonnée de -5, soit le point $(0, -5)$.
Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ (ou $x^2 + y^2 = 5^2$) a pour centre $(0, 0)$ et pour rayon 5.
Les ordonnées des points sur le cercle vérifient donc l'inéquation $-5 \leq y \leq 5$.
Pour déterminer les autres points d'intersection, on récrit l'équation $y = \frac{x^2}{k} - 5$ sous la forme $ky = x^2 - 5k$, ou $x^2 = ky + 5k$. On reporte ensuite $x^2 = ky + 5k$ dans l'équation $x^2 + y^2 = 25$ pour obtenir :

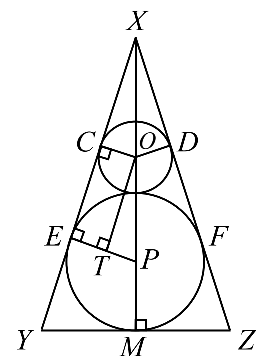
$$\begin{aligned} (ky + 5k) + y^2 &= 25 \\ y^2 + ky + (5k - 25) &= 0 \\ (y + 5)(y + (k - 5)) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $y = -5$ ou $y = 5 - k$.
(Dans la factorisation précédente, on savait que puisque les courbes se coupent à un point où $y = -5$, alors $(y + 5)$ était un facteur du membre de gauche de l'équation $y^2 + ky + (5k - 25) = 0$. On aurait pu résoudre l'équation du second degré en utilisant son discriminant et la formule.)
Pour que $y = 5 - k$ donne des points sur le cercle, il faut que $-5 \leq 5 - k$ et $5 - k \leq 5$, c'est-à-dire $k \leq 10$ et $k \geq 0$.
Puisque k est un entier strictement positif, les valeurs possibles de k sont $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, 7, 8, 9, 10.
Si $k = 1$, alors $y = 5 - 1$, ou $y = 4$. On reporte $y = 4$ dans l'équation du cercle pour obtenir $x^2 + 4^2 = 25$, ou $x^2 = 9$, d'où $x = \pm 3$.
Donc, les points $(3, 4)$ et $(-3, 4)$ sont situés sur la parabole et sur le cercle.
On considère les trois points $A(3, 4)$, $B(-3, 4)$ et $C(0, -5)$.
Le segment AB est horizontal et sa longueur est égale à $3 - (-3)$, ou 6. (Il s'agit de la différence des abscisses des extrémités.)
La distance entre le segment AB et le point C est égale à $4 - (-5)$, ou 9. (Il s'agit de la différence des ordonnées.)
L'aire du triangle ABC est donc égale à $\frac{1}{2}(6)(9)$, ou 27, ce qui est un entier.
On répète ces calculs pour chacune des autres valeurs de k en remplissant le tableau suivant :

k	y	$x = \pm\sqrt{25 - y^2}$	Base	Hauteur	Aire du triangle
1	4	± 3	$3 - (-3) = 6$	$4 - (-5) = 9$	27
2	3	± 4	$4 - (-4) = 8$	$3 - (-5) = 8$	32
3	2	$\pm\sqrt{21}$	$2\sqrt{21}$	7	$7\sqrt{21}$
4	1	$\pm\sqrt{24}$	$2\sqrt{24}$	6	$6\sqrt{24}$
5	0	± 5	10	5	25
6	-1	$\pm\sqrt{24}$	$2\sqrt{24}$	4	$4\sqrt{24}$
7	-2	$\pm\sqrt{21}$	$2\sqrt{21}$	3	$3\sqrt{21}$
8	-3	± 4	8	2	8
9	-4	± 3	6	1	3
10	-5	0			

Lorsque $k = 10$, on a $y = 5 - k$, ou $y = -5$ et $x = 0$ seulement. Il n'y a donc qu'un seul point d'intersection.
Les entiers strictement positifs k pour lesquels la parabole et le cercle exactement trois points d'intersection A, B et C et pour lesquels l'aire du triangle ABC est un entier sont 1, 2, 5, 8 et 9.

(b) Soit M le milieu de YZ.
Soit O et P les centres respectifs du petit cercle et du grand cercle.
Soit C et D les points de contact respectifs du petit cercle et des côtés XY et XZ. Soit E et F les points de contact respectifs du grand cercle et des côtés XY et XZ.
On trace les segments OC, OD et PE.



Puisque OC et PE sont des rayons aux points de contact de la tangente XY, OC et PE sont perpendiculaires à XY.
On trace XM. Puisque le triangle XYZ est isocèle, alors XM (qui est une médiane selon sa construction) est aussi une hauteur (c.-à-d. que XM est aussi perpendiculaire à YZ), de même qu'une bissectrice (c.-à-d. que $\angle MXY = \angle MXZ$).
XM passe aux points O et P. (Puisque XC et XD sont des tangentes au petit cercle issues du même point X, alors $XC = XD$. Les triangles XCO et XDO sont donc isométriques (trois côtés égaux deux à deux). Donc $\angle OXC = \angle OXD$, ce qui indique que O est situé sur la bissectrice de l'angle CXD. O est donc situé sur XM. De la même manière, P est situé sur XM.)
On abaisse une perpendiculaire du point O jusqu'au point T sur PE. OT est parallèle à XY (chacun est perpendiculaire à PE) et $OCET$ est un rectangle (puisque trois de ses angles sont droits).
On considère les triangles XMY et OTP. Chacun est rectangle (en M et en T respectivement).
Donc $\angle YXM = \angle POT$ (car OT et XY sont parallèles, chacun étant perpendiculaire à PE). Les triangles XMY et OTP sont donc semblables.
Donc $\dfrac{XY}{YM} = \dfrac{OP}{PT}$.
Or $XY = a$ et $YM = \frac{1}{2}b$.
Puisque le segment OP joint les centres de deux cercles tangents, $OP = r + R$.
Puisque $PE = R$, $ET = OC = r$ et que $OCET$ est un rectangle, alors $PT = PE - ET$, ou $PT = R - r$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b/2} &= \frac{R+r}{R-r} \\
\frac{2a}{b} &= \frac{R+r}{R-r} \\
2a(R-r) &= b(R+r) \\
2aR - bR &= 2ar + br \\
R(2a-b) &= r(2a+b) \\
\frac{R}{r} &= \frac{2a+b}{2a-b} \qquad \text{(puisque } 2a > b\text{, alors } 2a-b \neq 0 \text{ et } r > 0\text{)}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{R}{r} = \dfrac{2a+b}{2a-b}$.

9. On fait appel aux lois des logarithmes $\log(uv) = \log u + \log v$ et $\log(s^t) = t \log s$ $(u, v, s > 0)$.
La première équation devient :

$$\begin{aligned}(\log x)(\log y) - 3\log 5 - 3\log y - \log 8 - \log x &= a\\ (\log x)(\log y) - \log x - 3\log y - \log 8 - \log 5^3 &= a\\ (\log x)(\log y) - \log x - 3\log y - \log(8 \cdot 125) &= a\\ (\log x)(\log y) - \log x - 3\log y - \log(1000) &= a\\ (\log x)(\log y) - \log x - 3\log y - 3 &= a\end{aligned}$$

La deuxième équation devient :

$$\begin{aligned}(\log y)(\log z) - 4\log 5 - 4\log y - \log 16 - \log z &= b\\ (\log y)(\log z) - 4\log y - \log z - 4\log 5 - \log 16 &= b\\ (\log y)(\log z) - 4\log y - \log z - \log(5^4 \cdot 16) &= b\\ (\log y)(\log z) - 4\log y - \log z - \log(10\,000) &= b\\ (\log y)(\log z) - 4\log y - \log z - 4 &= b\end{aligned}$$

La troisième équation devient :

$$\begin{aligned}(\log z)(\log x) - 4\log 8 - 4\log x - 3\log 625 - 3\log z &= c\\ (\log z)(\log x) - 4\log x - 3\log z - 4\log 8 - 3\log 625 &= c\\ (\log z)(\log x) - 4\log x - 3\log z - \log(8^4 \cdot 625^3) &= c\\ (\log z)(\log x) - 4\log x - 3\log z - \log(2^{12} \cdot 5^{12}) &= c\\ (\log z)(\log x) - 4\log x - 3\log z - 12 &= c\end{aligned}$$

Puisque toutes les étapes sont réversibles, le système initial d'équations est équivalent au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}(\log x)(\log y) - \log x - 3\log y - 3 &= a\\ (\log y)(\log z) - 4\log y - \log z - 4 &= b\\ (\log z)(\log x) - 4\log x - 3\log z - 12 &= c\end{aligned}$$

On reporte $X = \log x$, $Y = \log y$ et $Z = \log z$ dans ces équations. (Cela équivaut à énoncer que $x = 10^X$, $y = 10^Y$ et $z = 10^Z$.)
On obtient le système d'équations équivalent suivant :

$$\begin{aligned}XY - X - 3Y - 3 &= a\\ YZ - 4Y - Z - 4 &= b\\ XZ - 4X - 3Z - 12 &= c\end{aligned}$$

On écrit la première de ces trois équations sous la forme $X(Y-1) - 3Y - 3 = a$, puis $X(Y-1) - 3(Y-1) - 6 = a$, puis $(X-3)(Y-1) = a+6$.
On fait de même avec les deux autres équations pour obtenir le système d'équations équivalent suivant :

$$\begin{aligned}(X-3)(Y-1) &= a+6\\ (Y-1)(Z-4) &= b+8\\ (X-3)(Z-4) &= c+24\end{aligned}$$

On reporte $p = X - 3$, $q = Y - 1$ et $r = Z - 4$ dans ces équations. (Cela équivaut à énoncer que $X = p + 3$, $Y = q + 1$ et $Z = r + 4$, ou $x = 10^{p+3}$, $y = 10^{q+1}$ et $z = 10^{r+4}$.)
On obtient le système d'équations équivalent suivant :

$$\begin{aligned} pq &= a + 6 \\ qr &= b + 8 \\ pr &= c + 24 \end{aligned}$$

On rappelle que ce système d'équations est équivalent au système d'équations initial et que chaque solution de ce système correspond à une solution du système initial.

(a) Sachant que $a = -4$, $b = 4$ et $c = -18$, le dernier système d'équations devient :

$$\begin{aligned} pq &= 2 \\ qr &= 12 \\ pr &= 6 \end{aligned}$$

On multiplie les trois équations, membre par membre, pour obtenir $p^2q^2r^2 = 2 \cdot 12 \cdot 6$, ou $p^2q^2r^2 = 144$, d'où $pqr = \pm 12$.
Donc $r = \dfrac{pqr}{pq} = \dfrac{\pm 12}{2} = \pm 6$, $p = \dfrac{pqr}{qr} = \dfrac{\pm 12}{12} = \pm 1$ et $q = \dfrac{pqr}{pr} = \dfrac{\pm 12}{6} = \pm 2$.
Le dernier système d'équations a donc pour solutions $(p, q, r) = (1, 2, 6)$ et $(p, q, r) = (-1, -2, -6)$.
On procède par substitution pour obtenir les valeurs correspondantes du système d'équations initial. Lorsque $(a, b, c) = (-4, 4, -18)$, les solutions sont $(x, y, z) = (10^4, 10^3, 10^{10})$ et $(x, y, z) = (10^2, 10^{-1}, 10^{-2})$.

(b) On considère le produit $(a + 6)(b + 8)(c + 24)$ des membres de droite des trois équations du dernier système d'équations selon qu'il est négatif, positif ou nul.

<u>1^er cas : $(a + 6)(b + 8)(c + 24) < 0$</u>
On multiplie les trois équations, membre par membre, pour obtenir

$$(pqr)^2 = (a + 6)(b + 8)(c + 24)$$

Puisque le membre de gauche est positif ou nul et que le membre de droite est négatif, le système n'admet aucune solution.

<u>2^e cas : $(a + 6)(b + 8)(c + 24) > 0$</u>
On multiplie les trois équations, membre par membre, pour obtenir

$$(pqr)^2 = (a + 6)(b + 8)(c + 24)$$

Puisque $(pqr)^2 = (a + 6)(b + 8)(c + 24)$ et $(a + 6)(b + 8)(c + 24) > 0$, alors $pqr = \pm\sqrt{(a + 6)(b + 8)(c + 24)}$.
Puisque $(a + 6)(b + 8)(c + 24) > 0$, alors $\sqrt{(a + 6)(b + 8)(c + 24)}$ est bien défini.
Puisque $(a + 6)(b + 8)(c + 24) > 0$, chacun des facteurs $a + 6$, $b + 8$ et $c + 24$ est non nul et on peut donc diviser par n'importe quel des facteurs.

On procède comme dans la partie (a) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
p &= \frac{pqr}{qr} = \frac{\pm\sqrt{(a+6)(b+8)(c+24)}}{b+8} \\
q &= \frac{pqr}{pr} = \frac{\pm\sqrt{(a+6)(b+8)(c+24)}}{c+24} \\
r &= \frac{pqr}{pq} = \frac{\pm\sqrt{(a+6)(b+8)(c+24)}}{a+6}
\end{aligned}$$

Puisque $(a+6)(b+8)(c+24) > 0$, chacune de ces fractions est bien définie. Le système admet donc deux solutions (p, q, r). Le système initial admet donc deux solutions (x, y, z).

3[e] cas : $(a+6)(b+8)(c+24) = 0$

On suppose qu'exactement un des facteurs $a+6$, $b+8$ ou $c+24$ est égal à 0.
Par exemple, on peut supposer que $a+6 = 0$, $b+8 \neq 0$ et $c+24 \neq 0$.
Puisque $pq = a+6 = 0$, alors $p = 0$ ou $q = 0$.
Donc $pq = 0$ ou $pr = 0$, d'où $b+8 = 0$ ou $c+24 = 0$ (car $qr = b+8$ et $pr = c+24$), ce qui contredit la supposition ci-dessus.
La supposition est donc fausse. Il est donc impossible qu'exactement un des facteurs $a+6$, $b+8$ ou $c+24$ soit égal à 0.

On suppose qu'exactement deux des facteurs $a+6$, $b+8$ ou $c+24$ est égal à 0.
Par exemple, on peut supposer que $a+6 = b+8 = 0$ et $c+24 \neq 0$.
Puisque $pr = c+24 \neq 0$, alors $p \neq 0$ et $r \neq 0$.
Puisque $pq = a+6 = 0$, $qr = b+8 = 0$, $p \neq 0$ et $r \neq 0$, alors $q = 0$.
Donc, tout triplet (p, q, r), où $q = 0$ et $pr = c+24 \neq 0$, est une solution du système d'équations.
Donc lorsque $a+6 = b+8 = 0$ et $c+24 \neq 0$ (c'est-à-dire si $(a, b, c) = (-6, -8, c)$ où $c \neq 24$), chaque triplet $(p, q, r) = \left(p, 0, \dfrac{c+24}{p}\right)$, où $p \neq 0$, est une solution du système d'équations.
Chacune de ces solutions correspond à une solution (x, y, z) du système initial. Donc si $(a, b, c) = (-6, -8, c)$ où $c \neq 0$, le système d'équations admet un nombre infini de solutions.
De même, si $(a, b, c) = (-6, b, -24)$ où $b \neq -8$ (c'est-à-dire si $p = a+6 = 0$, $r = c+24 = 0$ et $q = b+8 \neq 0$) ou si $(a, b, c) = (a, -8, -24)$ et $a \neq -6$, le système initial d'équations admet un nombre infini de solutions (x, y, z).
On considère enfin le cas où $a+6 = b+8 = c+24 = 0$.
Dans ce cas, on doit résoudre le système d'équations suivant :

$$pq = qr = pr = 0$$

Chaque triplet $(p, q, r) = (0, 0, r)$ est une solution et il y a un nombre infini de telles solutions. (Il ne s'agit pas de toutes les solutions, mais on sait qu'il y aura un nombre infini de solutions.)
Donc lorsque $(a, b, c) = (-6, -8, -24)$, le système initial d'équations admet un nombre infini de solutions.

Donc, le système initial d'équations admet un nombre infini de solutions (x, y, z) lorsque $(a, b, c) = (-6, -8, c)$, c étant un nombre réel quelconque, lorsque $(a, b, c) = (-6, b, -24)$, b étant un nombre réel quelconque, lorsque $(a, b, c) = (a, -8, -24)$, a étant un nombre réel quelconque ou lorsque $(a, b, c) = (-6, -8, -24)$. (Ce triplet est inclus dans chacune des trois familles de triplets.)

10. (a) Les sous-ensembles de C_4 sont :

$$\{\} \quad \{1\} \quad \{2\} \quad \{3\} \quad \{4\}$$

$$\{1,2\} \quad \{1,3\} \quad \{1,4\} \quad \{2,3\} \quad \{2,4\} \quad \{3,4\}$$

$$\{1,2,3\} \quad \{1,2,4\} \quad \{1,3,4\} \quad \{2,3,4\} \quad \{1,2,3,4\}$$

(Il y a 16 sous-ensembles, y compris l'ensemble vide $\{\}$ et l'ensemble au complet, $C_4 = \{1,2,3,4\}$.)
On considère la famille Furoni $A = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}\}$.
Chacun des sous-ensembles suivants de C_4 est un élément de A : $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}$.
Chacun des sous-ensembles suivants de C_4 est un sous-ensemble d'au moins un élément de A : $\{\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$.
On considère les sous-ensembles suivants de C_4 : $\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}$. Pour chacun, au moins un élément de A est un sous-ensemble de ce sous-ensemble.
Puisqu'une famille Furoni de C_4 ne peut contenir deux sous-ensembles de C_4 dont un est un sous-ensemble de l'autre, on ne peut pas ajouter aucun élément de l'une ou l'autre de ces listes à A pour former une plus grande famille Furoni.
Il reste à considérer les sous-ensembles suivants de C_4 comme éléments possibles que l'on pourrait ajouter à A : $\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{2,3,4\}$.
Si on ajoute $\{2,3,4\}$ à A pour former $A' = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3,4\}\}$, alors A' est aussi une famille Furoni de C_4 et aucun des sous-ensembles $\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ ne peut être ajouté, puisque chacun est un sous-ensemble de $\{2,3,4\}$. Donc A' est une famille Furoni de C_4 à laquelle aucun autre sous-ensemble ne peut être ajouté.
Si on ajoutait un des ensembles $\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ à A, on ne pourrait pas ajouter l'ensemble $\{2,3,4\}$ (puisque chacun de ces trois ensembles est un sous-ensemble de $\{2,3,4\}$), mais on pourrait ajouter chacun des deux autres ensembles tout en conservant la condition d'un ensemble Furoni.
Donc $A'' = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ est une famille Furoni de C_4 à laquelle on ne peut ajouter un autre sous-ensemble.
Donc, les deux familles Furoni de C_4 qui contiennent tous les éléments de A et auxquels aucun autre sous-ensemble de C_4 ne peut être ajouté pour former une nouvelle famille Furoni sont :

$$A' = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3,4\}\} \qquad A'' = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

(b) *Solution 1*
Soit n un entier strictement positif et F une famille Furoni de C_n qui contient a_k éléments, chaque élément contenant k entiers, pour chaque entier k de 0 à n.
On considère chaque élément E de F.
Chaque E est un sous-ensemble de C_n. Supposons qu'un E en particulier contient exactement k éléments.
On utilise E pour générer $k!(n-k)!$ permutations σ des entiers de l'ensemble $C_n = \{1,2,3,\ldots,n\}$ en commençant par une permutation α des éléments de E et en y aboutant une permutation β des éléments de C_n qui ne sont pas dans E.
Puisqu'il y a k éléments dans E, il y a $k!$ permutations possibles α.
Puisqu'il y a $n-k$ éléments dans C_n qui ne sont pas dans E, il y a $(n-k)!$ permutations possibles β.
À chaque permutation α, on peut abouter n'importe quelle permutation β. Il y a donc $k!(n-k)!$ permutations possibles $\sigma = \alpha|\beta$. (La notation « $\alpha|\beta$ » représente la permutation

de C_n formée en écrivant la permutation α (des éléments de E) à laquelle on aboute la permutation β (des éléments de C_n qui ne sont pas dans E).)
Ces $k!(n-k)!$ permutations générées par E sont distinctes. En effet, si deux permutations, $\sigma = \alpha|\beta$ et $\sigma' = \alpha'|\beta'$ sont égales, alors α et α' étant des permutations des éléments de E, ont la même longueur et $\alpha|\beta = \alpha'|\beta'$ signifie donc $\alpha = \alpha'$, d'où $\beta = \beta'$. Les deux permutations sont donc égales.
On répète ce processus pour chacun des éléments E de F.
Puisque pour chaque k, il y a a_k sous-ensembles de F qui contiennent k éléments, alors le nombre total de permutations générées de cette façon est égal à :

$$a_0 0!(n-0)! + a_1 1!(n-1)! + \cdots + a_{n-1}(n-1)!(n-(n-1))1! + a_n n!(n-n)!$$

Si chacune de ces permutations est distinctes, alors ce total est inférieur ou égal à $n!$, puisqu'il y a $n!$ permutations des éléments de C_n.
Est-il possible que deux éléments E et G de F génèrent des permutations identiques des éléments de C_n de cette façon ?
On considère deux permutations identiques, $\sigma = \alpha|\beta$ (générée par E) et $\sigma' = \alpha'|\beta'$ (générée par G).
On suppose que E contient k éléments et que G contient k' éléments.
On doit avoir $k \leq k'$ ou $k' \leq k$ (ou les deux si $k = k'$).
On peut supposer que $k \leq k'$.
La longueur α (qui est égale à k) est donc inférieure ou égale à α' (qui est égale à k').
Or $\alpha|\beta = \alpha'|\beta'$, ce qui indique que les k premières entrées de α' sont égales aux k premières entrées de α.
Puisque les entrées de α sont les éléments de E et que les entrées de α' sont les éléments de G, alors E est un sous-ensemble de G, ce qui ne peut être vrai, E et G étant des éléments d'une famille Furoni. On a donc une contradiction.
Donc, toutes les permutations générées par chacun des sous-ensembles de C_n contenus dans F sont distinctes. Donc :

$$a_0 0!(n-0)! + a_1 1!(n-1)! + \cdots + a_{n-1}(n-1)!(n-(n-1))1! + a_n n!(n-n)! \leq n!$$

On divise chaque membre par $n!$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
a_0 0!(n-0)! + a_1 1!(n-1)! + \cdots + a_{n-1}(n-1)!(n-(n-1))1! + a_n n!(n-n)! &\leq n! \\
a_0\frac{0!(n-0)!}{n!} + a_1\frac{1!(n-1)!}{n!} + \cdots + a_{n-1}\frac{(n-1)!(n-(n-1))1!}{n!} + a_n\frac{n!(n-n)!}{n!} &\leq 1 \\
a_0\frac{1}{\binom{n}{0}} + a_1\frac{1}{\binom{n}{1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{1}{\binom{n}{n-1}} + a_n\frac{1}{\binom{n}{n}} &\leq 1 \\
\frac{a_0}{\binom{n}{0}} + \frac{a_1}{\binom{n}{1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} + \frac{a_n}{\binom{n}{n}} &\leq 1,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Solution 2
Soit n un entier strictement positif et F une famille Furoni de C_n choisie au hasard.
On considère $L = \{\{\}, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3, \ldots, n\}\}$.
La probabilité pour que l'intersection de L et de F soit non vide est inférieure ou égale à 1.
On remarque que puisque chaque élément de L est un sous-ensemble de tous les éléments à sa droite dans la définition de L, alors au plus un élément de L peut être un élément de F.
Soit k un entier, $k \geq 0$. La probabilité pour que $\{1,2,3, \ldots, k\}$ soit un élément de F est égale à $\dfrac{a_k}{\binom{n}{k}}$, a_k étant le nombre d'éléments de F qui contiennent exactement k entiers :

Il existe $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de C_n qui contiennent exactement k entiers.

La probabilité pour qu'un de ces sous-ensembles soit $\{1,2,3, \ldots, k\}$ est égale à $\dfrac{1}{\binom{n}{k}}$.

Puisque a_k de ces sous-ensembles sont dans F, alors la probabilité pour qu'un de ces a_k sous-ensembles soit $\{1,2,3, \ldots, k\}$ est égale à $\dfrac{a_k}{\binom{n}{k}}$.

(On prend pour acquis que si $k = 0$, alors $\{1,2,3, \ldots, k\} = \{\}$.)

Il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de C_n qui contiennent exactement k entiers.
La probabilité pour qu'un de ces sous-ensembles soit $\{1,2,3, \ldots, k\}$ est égale à $\dfrac{1}{\binom{n}{k}}$. En effet, tout sous-ensemble de F contenant k éléments a la même probabilité d'être l'ensemble $\{1,2,3, \ldots, k\}$ puisque tous les éléments de C_n jouent un même rôle.
Donc

$$\frac{a_0}{\binom{n}{0}} + \frac{a_1}{\binom{n}{1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} + \frac{a_n}{\binom{n}{n}} \leq 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(c) Soit $M = \binom{n}{k}$, où $k = \frac{1}{2}n$ si n est pair et $k = \frac{1}{2}(n-1)$ si n est impair.

Pour chaque entier r $(0 \leq r \leq n)$, on a $\binom{n}{r} \leq M$. (Cela équivaut à dire que dans chaque rangée du triangle de Pascal, le plus grand terme est celui du milieu (ou les deux plus grands termes sont les deux du milieu). Une preuve algébrique sera donnée à la fin.)
D'après (b), on a :

$$\frac{a_0}{\binom{n}{0}} + \frac{a_1}{\binom{n}{1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} + \frac{a_n}{\binom{n}{n}} \leq 1$$

On multiplie chaque membre de l'inéquation par M pour obtenir :

$$a_0\frac{M}{\binom{n}{0}} + a_1\frac{M}{\binom{n}{1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{M}{\binom{n}{n-1}} + a_n\frac{M}{\binom{n}{n}} \leq M$$

Puisque M est supérieur ou égal à chaque dénominateur, alors chaque fraction dans le membre de gauche est supérieure ou égale à 1. Donc :

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n \le a_0 \frac{M}{\binom{n}{0}} + a_1 \frac{M}{\binom{n}{1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{M}{\binom{n}{n-1}} + a_n \frac{M}{\binom{n}{n}} \le M$$

Le nombre total d'éléments dans la famille Furoni F, soit $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, est inférieur ou égal à M.

Est-il possible de trouver une famille Furoni de grandeur M ?

Oui. Les M ($M = \binom{n}{k}$) sous-ensembles de C_n contenant k éléments chacun forment une famille Furoni, puisque deux ensembles de la même grandeur ne peuvent être un sous-ensemble l'un de l'autre sans être égaux. Donc la plus grande famille Furoni de l'ensemble C_n a une grandeur égale à $\binom{n}{k}$ lorsque $n = 2k$ ou $n = 2k+1$, k étant un entier non négatif quelconque.

On démontre maintenant de façon algébrique l'inégalité utilisée ci-haut.

On remarque que $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$.

Donc si $\binom{n}{r} \le \binom{n}{k}$ pour tout $r \le k$, alors $\binom{n}{r} \le \binom{n}{k}$ pour tout k, puisque si $s > k$, alors $s = n - r$ pour une valeur quelconque r, $r \le k$, et on a donc $\binom{n}{s} = \binom{n}{r} \le \binom{n}{k}$.

Supposons d'abord que $n = 2k$, k étant un entier strictement positif.

On démontrera que $\binom{n}{r} \le \binom{n}{k}$ pour tout entier r, $0 \le r \le k$:

Puisque $n = 2k$, alors :

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{k}} = \frac{\dfrac{(2k)!}{r!(2k-r)!}}{\dfrac{(2k)!}{k!k!}} = \frac{k!}{r!}\frac{k!}{(2k-r)!}$$

Si $r = k - d$, d étant un entier non négatif quelconque, alors :

$$\frac{k!}{r!}\frac{k!}{(2k-r)!} = \frac{k!k!}{(k-d)!(k+d)!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-d+1)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+d)} = \frac{k}{k+1}\frac{k-1}{k+2}\cdots\frac{k-d+1}{k+d}$$

Puisque le membre de droite est le produit de d fractions non négatives, chacune inférieure à 1, leur produit est inférieur à 1.

Donc $\binom{n}{r} \le \binom{n}{k}$ lorsque $0 \le r \le k$.

Supposons ensuite que $n = 2k + 1$, k étant un entier non négatif quelconque.

On démontrera que $\binom{n}{r} \le \binom{n}{k}$ pour tout entier r, $0 \le r \le k$:

Puisque $n = 2k + 1$, alors :

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{k}} = \frac{\dfrac{(2k+1)!}{r!(2k+1-r)!}}{\dfrac{(2k+1)!}{k!(k+1)!}} = \frac{k!}{r!}\frac{(k+1)!}{(2k+1-r)!}$$

Si $r = k - d$, d étant un entier non négatif quelconque, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{k!}{r!}\frac{(k+1)!}{(2k+1-r)!} &= \frac{k!(k+1)!}{(k-d)!(k+1+d)!} \\
&= \frac{k(k-1)\cdots(k-d+1)}{(k+2)(k+3)\cdots(k+1+d)} \\
&= \frac{k}{k+2}\frac{k-1}{k+3}\cdots\frac{k-d+1}{k+1+d}
\end{aligned}$$

Puisque le membre de droite est le produit de d fractions non négatives, chacune inférieure à 1, leur produit est inférieur à 1.

Donc $\binom{n}{r} \le \binom{n}{k}$ lorsque $0 \le r \le k$.

Ceci termine la démonstration.