Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mercredi 15 avril 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 16 avril 2015
(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

Durée : 2 heures et demie

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.

Nombre de questions : 10 **Chaque question vaut 10 points.**

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

Les parties d'une question peuvent être de deux sortes :

1. **À RÉPONSE COURTE** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut 3 points.
   - Une bonne réponse placée dans la case appropriée reçoit le maximum de points.
   - **Du travail pertinent** placé dans l'espace approprié reçoit **une partie des points**.
2. **À DÉVELOPPEMENT** indiquées comme ceci :
   - Chacune vaut le reste des 10 points attribués à la question.
   - La solution **doit être placée à l'endroit approprié** dans le cahier-réponse.
   - Des points sont attribués pour le style, la clarté et l'état complet de la solution.
   - Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

ÉCRIRE TOUTES LES RÉPONSES DANS LE CAHIER-RÉPONSE FOURNI.

- La surveillante ou le surveillant fournira du papier supplémentaire au besoin. Insérer ce papier dans le cahier-réponse. Écrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille.
- Exprimer les calculs et les réponses sous forme de valeurs exactes, comme $\pi + 1$ et $\sqrt{2}$, et ainsi de suite, plutôt que 4,14 . . . ou 1,41 . . ., sauf indication contraire.

Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.

Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au cemc.uwaterloo.ca, Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.

NOTE :

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de , placer la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse et **montrer son travail**.
4. Pour une question accompagnée de , fournir une solution bien rédigée dans le cahier-réponse. Utiliser des énoncés mathématiques et des mots pour expliquer toutes les étapes de sa solution. Utiliser une feuille de papier à part comme brouillon avant de rédiger la solution au propre.
5. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui à l'énoncé.
6. Bien qu'une calculatrice puisse être utilisée pour des calculs numériques, les autres étapes d'une solution doivent êtres présentées et justifiées. Des points peuvent être attribués pour ces aspects. Par exemple, certaines calculatrices peuvent obtenir les abscisses à l'origine de la courbe définie par $y = x^3 - x$, mais il faut montrer les étapes algébriques utilisées pour obtenir ces nombres. Il ne suffit pas d'écrire les nombres sans explications.

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance, son année scolaire et son sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

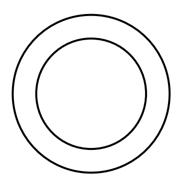
1. (a) Quelle est la valeur de $\dfrac{10^2 - 9^2}{10 + 9}$?

   (b) Sachant que $\dfrac{x+1}{x+4} = 4$, quelle est la valeur de $3x + 8$?

   (c) Soit $f(x) = 2x - 1$. Déterminer la valeur de $(f(3))^2 + 2(f(3)) + 1$.

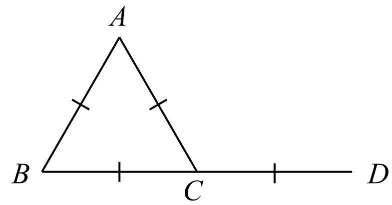
2. (a) Sachant que $\sqrt{a} + \sqrt{a} = 20$, quelle est la valeur de a ?

   (b) Deux cercles ont le même centre. Le petit cercle a un rayon de 1. La région entre les cercles a une aire égale à l'aire du petit cercle. Quel est le rayon du grand cercle ?



   (c) Il y avait 30 élèves dans la classe de monsieur Brunet. Ces élèves avaient une note moyenne de 80. Deux élèves quittent la classe. Les élèves qui restent ont une note moyenne de 82. Déterminer la note moyenne des deux élèves qui ont quitté la classe.

3. (a) Dans la figure ci-contre, $BD = 4$ et le point C est le milieu de BD. Si le point A est placé de manière que le triangle ABC soit équilatéral, quelle est la longueur de AD ?

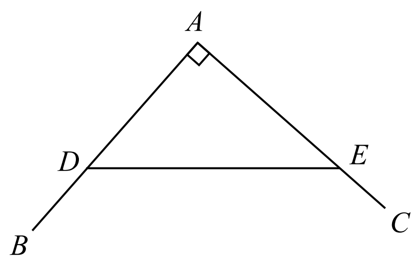


(b) Le triangle MNP a pour sommets $M(1, 4)$, $N(5, 3)$ et $P(5, c)$. Déterminer la somme des deux valeurs de c pour lesquelles le triangle MNP a une aire de 14.

4. (a) Quelles sont les abscisses à l'origine et l'ordonnée à l'origine de la courbe définie par l'équation $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3) - (x - 2)(x - 3)(x - 4)$?

(b) Les courbes définies par les équations $y = x^3 - x^2 + 3x - 4$ et $y = ax^2 - x - 4$ se coupent en exactement deux points. Déterminer toutes les valeurs possibles de a.

5. (a) Dans la figure ci-contre, $\angle CAB = 90°$. Le point D est situé sur AB et le point E est situé sur AC de manière que $AB = AC = DE$, $DB = 9$ et $EC = 8$. Déterminer la longueur de DE.

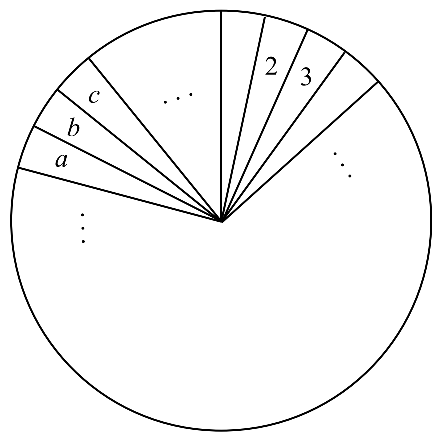


(b) Éliane a deux listes, chacune étant composée de 6 entiers consécutifs strictement positifs. Le plus petit entier de la première liste est a, le plus petit entier de la deuxième liste est b et $a < b$. Éliane forme une troisième liste composée des 36 nombres obtenus en multipliant chaque nombre de la première liste par chaque nombre de la deuxième liste. (Cette troisième liste peut contenir des nombres répétés.) Sachant que

- le nombre 49 parait dans la troisième liste,
- aucun nombre de la troisième liste n'est un multiple de 64 et
- il existe au moins un nombre supérieur à 75 dans la troisième liste,

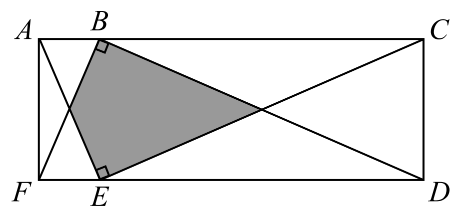
déterminer tous les couples (a, b) possibles.

6. (a) Un disque circulaire est divisé en 36 secteurs. Un nombre est inscrit dans chaque secteur. Lorsque trois secteurs consécutifs contiennent les nombres respectifs a, b et c, dans cet ordre, alors $b = ac$. Sachant que le nombre 2 est placé dans un secteur et que le nombre 3 est placé dans un des secteurs adjacents, comme dans la figure ci-contre, quelle est la somme des 36 nombres écrits sur le disque ?



(b) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $0 < \dfrac{x^2 - 11}{x + 1} < 7$.

7. (a) Dans la figure ci-contre, $ACDF$ est un rectangle, $AC = 200$ et $CD = 50$. De plus, les triangles FBD et AEC sont isométriques et sont respectivement rectangles en B et en E. Quelle est l'aire de la région ombrée ?

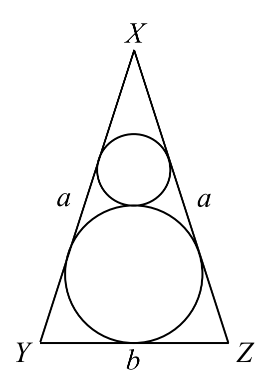


(b) Les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ forment une suite arithmétique et $a_1 \neq a_2$. De plus, les trois nombres a_1, a_2, a_6, dans l'ordre, forment une suite géométrique. Déterminer tous les entiers strictement positifs k pour lesquels a_1, a_4, a_k, dans l'ordre, forment aussi une suite géométrique.

(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en additionnant une constante au terme précédent. Par exemple, $3, 5, 7, 9$ sont les quatre premiers termes d'une suite arithmétique.
Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante non nulle. Par exemple, 3, 6, 12 est une suite géométrique de trois termes.)

8. (a) Pour certains entiers strictement positifs k, la parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{k} - 5$ coupe le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ en trois points distincts, A, B et C. Déterminer tous ces entiers strictement positifs k pour lesquels l'aire du triangle ABC est un entier.

(b) Dans la figure ci-contre, le triangle XYZ est isocèle, $XY = XZ = a$, $YZ = b$ et $b < 2a$. Un grand cercle de rayon R est inscrit dans le triangle (c.-à-d. que le cercle touche les trois côtés du triangle). Un petit cercle de rayon r est tracé de manière qu'il touche les côtés XY et XZ et le grand cercle. Déterminer une expression pour $\dfrac{R}{r}$ en fonction de a et b.



9. On considère le système d'équations suivant dans lequel les logarithmes sont de base 10 :

$$
\begin{aligned}
(\log x)(\log y) - 3\log 5y - \log 8x &= a \\
(\log y)(\log z) - 4\log 5y - \log 16z &= b \\
(\log z)(\log x) - 4\log 8x - 3\log 625z &= c
\end{aligned}
$$

(a) Sachant que $a = -4$, $b = 4$ et $c = -18$, résoudre le système d'équations.

(b) Déterminer tous les triplets (a, b, c) de nombres réels pour lesquels le système admet un nombre infini de solutions (x, y, z).

10. Pour tout entier positif n, $n \geq 1$, soit C_n l'ensemble des n plus petits entiers strictement positifs, c'est-à-dire que $C_n = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$. Par exemple, $C_4 = \{1, 2, 3, 4\}$. Un ensemble F de sous-ensembles de C_n est appelé une *famille Furoni de* C_n si aucun élément de F n'est un sous-ensemble d'un autre élément de F.

(a) Soit $A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$. On remarque que A est une famille Furoni de C_4. Déterminer les deux familles Furoni de C_4 qui contiennent tous les éléments de A et auxquels aucun autre sous-ensemble de C_4 ne peut être ajouté pour former une nouvelle famille Furoni (plus grande).

(b) Soit n un entier strictement positif et F une famille Furoni de C_n. Pour tout entier non négatif k, soit a_k le nombre d'éléments de F qui contiennent exactement k entiers. Démontrer que :

$$\frac{a_0}{\binom{n}{0}} + \frac{a_1}{\binom{n}{1}} + \frac{a_2}{\binom{n}{2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{\binom{n}{n-1}} + \frac{a_n}{\binom{n}{n}} \leq 1$$

(Le membre de gauche contient $n+1$ termes.)

(Remarque : Étant donné un entier strictement positif n et un entier k, $0 \leq k \leq n$, alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de sous-ensembles de C_n qui contiennent exactement k entiers. De plus, $0! = 1$ et si m est un entier strictement positif, $m!$ représente le produit des entiers de 1 à m.)

(c) Pour tout entier strictement positif n, déterminer le nombre d'éléments dans la plus grande famille Furoni de C_n (c'est-à-dire le nombre d'éléments de la famille Furoni qui contient le nombre maximum possible de sous-ensembles de C_n). Expliquer son raisonnement.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

cemc.uwaterloo.ca

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2015! Chaque année, plus de 200 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu en novembre 2015.

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au cemc.uwaterloo.ca pour :

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2015/2016
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les coucours