Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours Cayley 2015

(10e année – Secondaire IV)

le mardi 24 février 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 25 février 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

1. On a : $2 \times 2015 - 2015 = 4030 - 2015 = 2015$

   OU On peut procéder comme suit : $2 \times 2015 - 2015 = 2 \times 2015 - 1 \times 2015 = 1 \times 2015 = 2015$

   Réponse : (A)

2. On a : $\sqrt{1} + \sqrt{9} = 1 + 3 = 4$

   Réponse : (D)

3. Le volume d'une boite de forme rectangulaire est égal au produit de l'aire de la base et de la hauteur.
   Donc, la hauteur de la boite est égale au volume divisé par l'aire de la base.
   L'aire de la base est égale à $2 \cdot 5$ cm^2, ou 10 cm^2.
   Donc, la hauteur de la boite est égale à $(30 \div 10)$ cm, ou 3 cm.

   Réponse : (C)

4. *Solution 1*
   L'angle SRQ est un angle extérieur du triangle PQR.
   Donc $\angle SRQ = \angle RPQ + \angle PQR$, d'où $\angle SRQ = 50^\circ + 90^\circ$, ou $\angle SRQ = 140^\circ$.
   Donc $x^\circ = 140^\circ$, ou $x = 140$.

   Solution 2
   Les mesures des angles du triangle PQR ont une somme de 180°. Donc :

   $$\angle PRQ = 180^\circ - \angle RPQ - \angle PQR = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$$

   Puisque les angles PRQ et SRQ sont supplémentaires, alors $x^\circ + 40^\circ = 180^\circ$. Donc $x = 180 - 40$, ou $x = 140$.

   Réponse : (D)

5. D'après le diagramme, 3 provinces et territoires se sont joints à la Confédération de 1890 à 1929, et 1 de 1930 à 1969.
   Donc de 1890 à 1969, un total de 4 provinces et territoires se sont joints à la Confédération.
   Si on choisit une des provinces ou un des territoires au hasard (il y en a 13 en tout), la probabilité pour qu'elle ou il se soit joint à la Confédération de 1890 à 1969 est de $\frac{4}{13}$.

   Réponse : (B)

6. Puisque $a^2 = 9$, alors $a^4 = (a^2)^2$, d'où $a^4 = 9^2$, ou $a^4 = 81$.

   OU Puisque $a^2 = 9$, alors $a = \pm 3$. Si $a = 3$, alors $a^4 = 3^4$, ou $a^4 = 81$; si $a = -3$, alors $a^4 = (-3)^4$, ou $a^4 = 81$.

   Réponse : (B)

7. On sait que $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} = 3 + \frac{10}{100} + \frac{4}{100} = 3 + \frac{14}{100} = 3\frac{14}{100}$.
   Puisque $\frac{14}{100} = 0{,}14$, l'expression donnée est aussi égale à 3,14.
   Puisque $\frac{14}{100} = \frac{7}{50}$, l'expression donnée est aussi égale à $3\frac{7}{50}$.
   De plus, $3\frac{7}{50} = 3 + \frac{7}{50} = \frac{150}{50} + \frac{7}{50} = \frac{157}{50}$.
   Le seul choix de réponse qui reste est $3\frac{5}{110}$.
   Or $3\frac{5}{110} = 3{,}0\overline{45}$, ce qui n'est pas égal à 3,14.

   Réponse : (C)

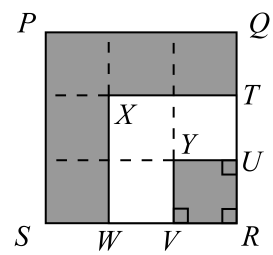
8. Au départ, Valérie a la moitié de l'argent qu'il faut pour acheter le collier.
Après que sa soeur lui a remis 30 \$, Valérie a les trois quarts de l'argent qu'il lui faut. Donc, sa soeur lui a remis un quart de la somme requise, car $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Il lui faut encore un quart de la somme requise, soit le même montant que sa soeur lui a donné, c'est-à-dire 30 \$.
Donc, son père lui donnera 30 \$.

Réponse : (D)

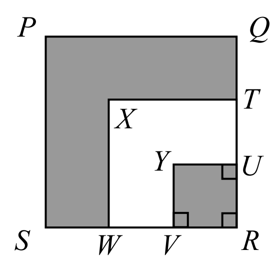
9. Puisque le 5 janvier est un lundi et que les lundis viennent tous les 7 jours, les lundis suivants sont le 12 janvier, le 19 janvier et le 26 janvier.
Puisque Jean court tous les trois jours, il courra le 5, le 8, le 11, le 14, le 17, le 20, le 23, le 26 et le 29 janvier.
Le lundi suivant où il courra est le 26 janvier.

Réponse : (C)

10. *Solution 1*
Puisque $PQRS$ est un carré et que TX et UY sont perpendiculaires à QR, alors TX et UY sont parallèles à PQ et à SR.
De même, VY et WX sont parallèles à PS et à QR.
Si on prolonge WX et VY jusqu'à PQ et qu'on prolonge TX et UY jusqu'à PS, le carré $PQRS$ est divisé en 9 rectangles.
Puisque $QT = TU = UR = 1$ et $RV = VW = WS = 1$, alors le carré $PQRS$ est vraiment divisé en 9 carrés de dimensions 1 sur 1.
Or, 6 des 9 carrés sont ombrés et les 3 autres ne le sont pas.
Le rapport de l'aire de la partie ombrée à l'aire de la partie non ombrée est donc de 6 : 3, ou 2 : 1.



Solution 2
On considère le quadrilatère $YURV$.
$YURV$ a trois angles droits. En effet, les angles U et V sont droits puisque UY et VY sont perpendiculaires à QR et à RS, respectivement. L'angle R est droit puisque $PQRS$ est un carré. Puisque $YURV$ a trois angles droits, son quatrième angle doit aussi être droit. Il s'agit donc d'un rectangle.
Puisque $RV = UR = 1$, alors $YURV$ est un carré dont les côtés sont de longueur 1. Il a donc une aire de 1^2, ou 1.
De même, $XTRW$ est un carré dont les côtés sont de longueur 2. Il a donc une aire de 2^2, ou 4.
Puisque le carré $PQRS$ mesure 3×3, il a une aire de 3^2, ou 9.
L'aire de la partie non ombrée est égale à la différence de l'aire du carré $XTRW$ et de celle du carré $YURV$, soit $4 - 1$, ou 3.
Puisque le carré $PQRS$ a une aire de 9 et que la partie non ombrée a une aire de 3, alors la partie ombrée a une aire de $9 - 3$, ou 6.
Le rapport de l'aire de la partie ombrée à l'aire de la partie non ombrée est donc de 6 : 3, ou 2 : 1.



Réponse : (A)

11. D'après la définition, on a :

$$4 \otimes 8 = \frac{4}{8} + \frac{8}{4} = \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Réponse : (E)

12. La droite d'équation $y = \frac{3}{2}x + 1$ a une pente de $\frac{3}{2}$.
Puisque le segment qui joint les points $(-1, q)$ et $(-3, r)$ est parallèle à la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x + 1$, le segment a aussi une pente de $\frac{3}{2}$.
Donc $\dfrac{r - q}{(-3) - (-1)} = \dfrac{3}{2}$, ou $\dfrac{r - q}{-2} = \dfrac{3}{2}$.
Donc $r - q = (-2) \cdot \dfrac{3}{2}$, ou $r - q = -3$.

Réponse : (E)

13. *Solution 1*
Les deux équipes ont un total de de $(25 + 19)$ joueurs, ou 44 joueurs.
Or, il y a exactement 36 élèves qui font partie d'une ou l'autre équipe.
Puisque $44 - 36 = 8$, 8 élèves ont été comptés deux fois.
Il y a donc 8 élèves qui font partie des deux équipes.

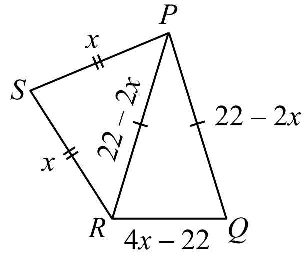
Solution 2
Soit x le nombre d'élèves qui font partie des deux équipes.
Puisque 25 élèves jouent au baseball, il y a $25 - x$ élèves qui jouent au baseball et qui ne jouent pas au hockey.
Puisque 19 élèves jouent au hockey, il y a $19 - x$ élèves qui jouent au hockey et qui ne jouent pas au baseball.
Puisque 36 élèves font partie de l'équipe de baseball, de l'équipe de hockey ou des deux, alors :

$$(25 - x) + (19 - x) + x = 36$$

(Les trois expressions du membre de gauche représentent respectivement le nombre d'élèves qui jouent au baseball mais pas au hockey, le nombre d'élèves qui jouent au hockey mais pas au baseball et le nombre d'élèves qui jouent au baseball et au hockey.)
Donc $44 - x = 36$, d'où $x = 8$.
Donc 8 élèves font partie des deux équipes.

Réponse : (B)

14. Puisque $PS = SR = x$ et que le triangle PRS a un périmètre de 22, alors $PR = 22 - PS - SR$, ou $PR = 22 - 2x$.
Puisque $PQ = PR$ et $PR = 22 - 2x$, alors $PQ = 22 - 2x$.
Puisque le triangle PQR a un périmètre de 22, alors $RQ = 22 - PR - PQ$, d'où $RQ = 22 - (22 - 2x) - (22 - 2x)$, ou $RQ = 4x - 22$.



Puisque $PQRS$ a un périmètre de 24, alors :

$$\begin{aligned} PQ + RQ + SR + PS &= 24 \\ (22 - 2x) + (4x - 22) + x + x &= 24 \\ 4x &= 24 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Réponse : (D)

15. On a :

$$1! = 1 \qquad 2! = (1)(2) = 2 \qquad 3! = (1)(2)(3) = 6$$

$$4! = (1)(2)(3)(4) = 24 \qquad 5! = (1)(2)(3)(4)(5) = 120$$

Donc $1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 = 153$.
Pour chaque entier n supérieur à 5, le chiffre des unités de $n!$ est 0 :

> On peut le constater en remarquant qu'on peut obtenir la valeur de chaque factorielle en multipliant la valeur de la factorielle précédente par l'entier suivant. (Par exemple, $6! = 6(5!)$.)
> Ainsi lorsque le chiffre des unités d'une factorielle est 0, alors toutes les factorielles suivantes auront un chiffre des unités égal à 0.
> Puisque le chiffre des unités de 5! est 0, alors le chiffre des unités de $n!$ ($n > 5$) est aussi 0.
> On peut aussi remarquer que puisque $n!$ est le produit des entiers de 1 à n, alors lorsque $n \geq 5$, $n!$ aura des facteurs qui sont des multiples de 2 et de 5. Donc, $n!$ sera un multiple de 10 et il aura un chiffre des unités égal à 0.

Chacune des expressions 6!, 7!, 8!, 9! et 10! a un chiffre des unités égal à 0. Donc, l'expression $6! + 7! + 8! + 9! + 10!$ a un chiffre des unités égal à 0.
Puisque l'expression $1! + 2! + 3! + 4! + 5!$ a un chiffre des unités égal à 3 et que l'expression $6! + 7! + 8! + 9! + 10!$ a un chiffre des unités égal à 0, alors l'expression

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9! + 10!$$

a un chiffre des unités égal à $3 + 0$, ou 3.
(On peut vérifier avec une calculatrice que $1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!+9!+10! = 4\,037\,913$.)

Réponse : (B)

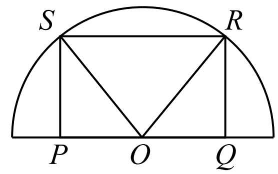
16. Dans un carré magique, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont la même somme.
Puisque les nombres de la première rangée ont la même somme que ceux de la première colonne, alors $a + 13 + b = a + 19 + 12$, d'où $b = 19 + 12 - 13$, ou $b = 18$.
Donc, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont une somme de $18 + 11 + 16$, ou 45.
Dans la première colonne, on a $a + 19 + 12 = 45$, d'où $a = 14$.
Dans la deuxième rangée, on a $19 + c + 11 = 45$, d'où $c = 15$.
Donc $a + b + c = 14 + 18 + 15$, ou $a + b + c = 47$.

Réponse : (C)

17. Soit v km/h la vitesse de Diane pendant les 30 premières minutes.
Puisque 30 minutes correspondent à une demi-heure, alors pendant ces 30 minutes, elle a parcouru une distance de $\frac{1}{2}v$ km.
Pendant les 30 minutes suivantes, elle a conduit sa voiture à une vitesse de $(v + 20)$ km/h.
Donc pendant ces 30 minutes, elle a parcouru une distance de $\frac{1}{2}(v + 20)$ km.
Or, on sait qu'elle a parcouru 100 km en tout. Donc $\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}(v+20) = 100$, ou $\frac{1}{2}v + \frac{1}{2}v + 10 = 100$.
Donc $v + 10 = 100$, ou $v = 90$.
Pendant les 30 premières minutes, la vitesse était de 90 km/h.

Réponse : (B)

18. Soit O le centre du cercle. On trace OS et OR.



Puisque le demi-cercle a un diamètre de 20, il a un rayon de 10 (la moitié de 20).
Puisque OS et OR sont des rayons, alors $OS = OR = 10$.
On considère les triangles OPS et OQR.
Puisque $PQRS$ est un rectangle, les triangles sont rectangles (en P et en Q).
De plus, $PS = QR$ (côtés opposés du rectangle) et $OS = OR$ (rayons du cercle).
Les triangles OPS et OQR sont donc isométriques (triangles rectangles ayant des hypoténuses de même longueur et deux autres côtés de même longueur).
Puisque ces triangles sont sont isométriques, alors $OP = OQ$.
Puisque $PQ = 16$, alors $OP = \frac{1}{2}PQ$, d'où $OP = 8$.
Puisque le triangle OPS est rectangle en P, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $PS = \sqrt{OS^2 - OP^2}$, d'où $PS = \sqrt{10^2 - 8^2}$, ou $PS = \sqrt{36} = 6$.

Réponse : (A)

19. On considère une pile de x billets de 20 \$ et y billets de 50 \$ ayant une valeur de 1000 \$.
Les x billets de 20 \$ ont une valeur de $20x$ \$ et les y billets de 50 \$ ont une valeur de $50y$ \$.
Donc $20x + 50y = 1000$, d'où $2x + 5y = 100$.
Déterminer le nombre maximum de piles que le caissier peut avoir est équivalent à déterminer le nombre de couples (x, y) d'entiers tels que $x \geq 1$, $y \geq 1$ et $2x + 5y = 100$.
(On doit avoir $x \geq 1$ et $y \geq 1$, puisque chaque pile contient au moins un billet de 20 \$ et au moins un billet de 50 \$.)
Puisque $x \geq 1$, alors $2x \geq 2$, d'où $5y = 100 - 2x \leq 98$.
Donc $y \leq \frac{98}{5} = 19{,}6$.
Puisque y est un entier, alors $y \leq 19$.
De plus, puisque $5y = 100 - 2x$, alors le membre de droite est la différence de deux nombres pairs, ce qui indique que $5y$ est pair. Donc, y doit être pair.
Les valeurs possibles de y sont donc $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$.
Chacune de ces valeurs donne un couple (x, y) qui vérifie l'équation $2x + 5y = 100$:

$$(x, y) = (45, 2), (40, 4), (35, 6), (30, 8), (25, 10), (20, 12), (15, 14), (10, 16), (5, 18)$$

Donc, le caissier peut avoir un maximum de 9 piles devant lui.

Réponse : (A)

20. On calcule la valeur de $72\left(\frac{3}{2}\right)^n$ pour chaque entier n de $n = -3$ à $n = 4$:

$$72\left(\tfrac{3}{2}\right)^{-3} = 72 \cdot \tfrac{2^3}{3^3} = 72 \cdot \tfrac{8}{27} = \tfrac{64}{3} \qquad 72\left(\tfrac{3}{2}\right)^{-2} = 72 \cdot \tfrac{2^2}{3^2} = 72 \cdot \tfrac{4}{9} = 32$$
$$72\left(\tfrac{3}{2}\right)^{-1} = 72 \cdot \tfrac{2^1}{3^1} = 72 \cdot \tfrac{2}{3} = 48 \qquad 72\left(\tfrac{3}{2}\right)^{0} = 72 \cdot 1 = 72$$
$$72\left(\tfrac{3}{2}\right)^{1} = 72 \cdot \tfrac{3^1}{2^1} = 72 \cdot \tfrac{3}{2} = 108 \qquad 72\left(\tfrac{3}{2}\right)^{2} = 72 \cdot \tfrac{3^2}{2^2} = 72 \cdot \tfrac{9}{4} = 162$$
$$72\left(\tfrac{3}{2}\right)^{3} = 72 \cdot \tfrac{3^3}{2^3} = 72 \cdot \tfrac{27}{8} = 243 \qquad 72\left(\tfrac{3}{2}\right)^{4} = 72 \cdot \tfrac{3^4}{2^4} = 72 \cdot \tfrac{81}{16} = \tfrac{729}{2}$$

Il existe donc au moins 6 valeurs entières de n pour lesquelles $72\left(\frac{3}{2}\right)^n$ a une valeur entière, soit $n = -2, -1, 0, 1, 2, 3$.
Puisque 6 est le plus grand choix de réponse, ça doit être la réponse (c'est-à-dire qu'il ne doit pas y avoir d'autres valeurs possibles de n).

On peut justifier cet énoncé en partant de $72\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{729}{2}$ et en remarquant que si n prend des valeurs de plus en plus grandes, cela a pour effet de toujours multiplier par $\frac{3}{2}$ et le numérateur est alors toujours impair, tandis que le dénominateur est toujours pair. Donc, $72\left(\frac{3}{2}\right)^n$ n'est jamais un entier lorsque $n > 3$. On obtient une conclusion semblable lorsque $n < -2$.
On peut justifier l'énoncé de façon plus formelle en écrivant :

$$72\left(\tfrac{3}{2}\right)^n = 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^n \cdot 2^{-n} = 3^2 3^n 2^3 2^{-n} = 3^{2+n} 2^{3-n}$$

Pour que ce produit soit un entier, il faut que 3^{2+n} et 2^{3-n} soient tous deux des entiers.
(Les expressions 3^{2+n} et 2^{3-n} peuvent avoir une valeur qui est un entier ou une fraction avec 1 comme numérateur et une puissance de 2 ou de 3 comme dénominateur. Si chacune a pour valeur une fraction, alors leur produit est une fraction inférieure à 1, ce qui n'est pas un entier. Si exactement une des expression a pour valeur une fraction, alors leur produit est une fraction avec une puissance de 2 au numérateur et une puissance de 3 au dénominateur, ou vice versa. Une telle fraction ne peut être un entier, car on ne peut « annuler » des facteurs du numérateur avec des facteurs du dénominateur.)
Donc $2 + n \geq 0$ (d'où $n \geq -2$) et $3 - n \geq 0$ (d'où $n \leq 3$).
Donc $-2 \leq n \leq 3$. Les 6 entiers de cet intervalle sont les 6 entiers nommés ci-dessus.

Réponse : (E)

21. On donne trois entiers impairs consécutifs qui ont une moyenne de 7.
Ces trois entiers doivent être 5, 7 et 9.
On peut le constater en prodédant de façon plus formelle. Puisque des entiers impairs consécutifs diffèrent l'un de l'autre de 2, soit $a - 2, a$ et $a + 2$ ces entiers.
Puisqu'ils ont une moyenne de 7, ils ont une somme de $3 \cdot 7$, ou 21.
Donc $(a - 2) + a + (a + 2) = 21$, d'où $3a = 21$, ou $a = 7$.
Lorsqu'on ajoute m, la moyenne des quatre entiers est égale à leur somme divisée par 4, ou $\dfrac{21 + m}{4}$.
Cette moyenne est un entier lorsque $21 + m$ est divisible par 4.
Puisque 21 est 1 de plus qu'un multiple de 4, alors la somme $21 + m$ est un multiple de 4 lorsque m est 1 de moins qu'un multiple de 4.
Les plus petits entiers m qui sont 1 de moins qu'un multiple de 4 sont 3, 7, 11, 15 et 19.
Puisque m est différent des trois premiers entiers, 5, 7 et 9, alors les trois plus petites valeurs possibles de m sont 3, 11 et 15.
Leur somme est égale à $3 + 11 + 15$, ou 29.

Réponse : (D)

22. Soit P, Q, R, S, T, U les six joueurs.
Chaque joueur joue deux parties contre chacun des cinq autres joueurs. Donc, chaque joueur joue 10 parties. Donc, chacun peut obtenir de 0 point à 10 points.
On montrera qu'un joueur doit obtenir $9\frac{1}{2}$ points pour s'assurer qu'il a plus de points que tout autre joueur.
Pour le faire, on montrera qu'il est possible que deux joueurs obtiennent chacun 9 points et que si un joueur obtient $9\frac{1}{2}$ ou 10 points, alors les autres joueurs ne peuvent obtenir plus de 9 points chacun.
Supposons que P et Q gagnent toutes les parties contre R, S, T et U et qu'ils font match nul chaque fois qu'ils jouent l'un contre l'autre.
Alors P et Q ont chacun 8 victoires, 2 matchs nuls et 0 défaite.
Chacun obtient donc $8 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 0$ points, ou 9 points.
Dans un tel cas, R, S, T et U ont chacun 4 défaites (2 contre P et 2 contre Q). Ils ont donc chacun un maximum de 6 points.
Donc, si un joueur obtient 9 points, il n'a pas nécessairement plus de points que tout autre joueur, car dans ce scénario, P et Q ont chacun 9 points.
Supposons que P obtient $9\frac{1}{2}$ ou 10 points.
Si P a 10 points, alors P a remporté chaque joute qu'il a jouées. Les autres joueurs ont alors perdu au moins 2 parties chacun et ils ont alors un maximum de 8 points.
Si P a $9\frac{1}{2}$ points, alors P doit avoir 9 victoires, 1 match nul et 0 défaite. (Avec $9\frac{1}{2}$ points, P a seulement perdu $\frac{1}{2}$ point. Il ne peut donc pas avoir subi une défaite et il a donc obtenu un match nul.)
Puisque P a 9 victoires, alors P a vaincu chaque autre joueur au moins une fois. (S'il y avait un joueur que P n'avait pas vaincu une seule fois, alors P aurait un maximum de 8 victoires.)
Puisque chaque autre joueur a au moins 1 défaite, alors chacun de ces joueurs a un maximum de 9 points.
Donc si P obtient $9\frac{1}{2}$ ou 10 points, alors P a plus de points que tout autre joueur.
Pour résumer, si un joueur obtient $9\frac{1}{2}$ ou 10 points, il est assuré d'avoir obtenu plus de points que tout autre joueur, tandis que s'il obtient 9 points, il est possible qu'un autre joueur ait le même nombre de points.
Donc, le nombre minimum de points qu'un joueur doit obtenir pour s'assurer qu'il a plus de points que tout autre joueur est $9\frac{1}{2}$.

Réponse : (D)

23. La minuterie allume l'éclairage au hasard à 19 h 00, 19 h 30, 20 h 00, 20 h 30 ou 21 h 00, dans chaque cas avec une probabilité de $\frac{1}{5}$.
On cherche d'abord la probabilité pour que l'éclairage s'allume à 19 h 00 et reste allumé pendant t heures $(4 < t < 5)$.
Si l'éclairage s'allume à 19 h 00 et reste allumé de 4 à 5 heures, alors il s'éteint entre 23 h 00 et 24 h 00.
Il s'agit d'un intervalle d'une heure. Puisque l'éclairage s'éteint au hasard dans un intervalle de 2 heures (entre 23 h 00 et 1 h 00), alors il y a une probabilité de $\frac{1}{2}$ pour qu'il s'éteigne entre 23 h 00 et 24 h 00.
Donc, la probabilité pour que l'éclairage s'allume à 19 h 00 et reste allumé pendant t heures $(4 < t < 5)$ est de $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{10}$.
De même, la probabilité pour que l'éclairage s'allume à 19 h 30 et s'éteigne entre 23 h 30 et 24 h 30 est de $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{10}$.
La probabilité pour que l'éclairage s'allume à 20 h 00 et s'éteigne entre 24 h 00 et 1 h 00 est aussi de $\frac{1}{10}$.

Si l'éclairage s'allume à 20 h 30 et reste allumé de 4 à 5 heures, il doit s'éteindre entre 0 h 30 et 1 h 00 (il ne peut s'éteindre après 1 h 00).
La probabilité pour que cela se produise est de $\frac{1}{5} \cdot \frac{1/2}{2}$, ou $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{20}$.
Si l'éclairage s'allume à 21 h 00, il ne peut rester allumé plus de 4 heures, puisqu'il doit s'éteindre au plus tard à 1 h 00.
La probabilité pour que l'éclairage reste allumé de 4 à 5 heures est donc de $3 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$, ou $\frac{7}{20}$.
(On peut ignorer la question de savoir si le fait que l'éclairage s'allume à 19 h 30 et s'éteint à précisément 23 h 00 a un effet sur le calcul de la probabilité. En effet, 23 h 30 est un seul point dans un intervalle contenant une infinité de points et cela n'a aucun effet sur la probabilité.)

Réponse : (E)

24. Le remplissage d'une région par des tuiles ou des polygones est appelé un *pavage*.
Puisqu'aucune tuile ne peut traverser la ligne TU, on considère le pavage des régions $PTUS$ et $TQRU$ séparément.
On continue en omettant les unités (mètres).
On détermine d'abord le nombre de pavages de la région $PTUS$ de dimensions 2×4.
Pour mieux décrire le travail, on divise le rectangle $PTUS$ en 8 carrés de dimensions 1×1 et on les nomme comme dans la Figure 1.

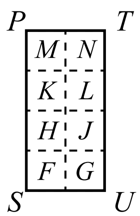


Figure 1

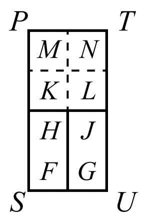


Figure 2

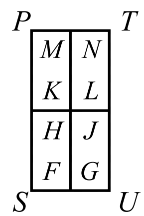


Figure 3

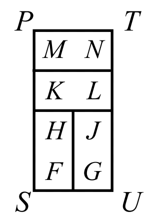


Figure 4

On considère le carré F. On doit le couvrir par une tuile horizontale (qui recouvre FG) ou une tuile verticale (qui recouvre FH).
Si F est recouvert d'une tuile verticale FH, alors G doit aussi être recouvert d'une tuile verticale GJ, puisque G est recouvert et sa tuile ne peut pas chevaucher la ligne TU.
On a alors la disposition de la Figure 2.
Le carré 2×2 peut alors être recouvert comme dans la Figure 3 et la Figure 4.
Jusqu'à maintenant, on a 2 façons possibles de paver $PTUS$.
Si F est recouvert d'une tuile horizontale FG, on se concentre sur H et J.
Soit que H et J sont recouverts d'une tuile horizontale HJ (ce qui laisse un carré 2×2 qui peut être recouvert de 2 façons comme ci-haut (voir les Figures 5 et 6)), ou H et J sont chacun recouverts d'une tuile verticale HK et JL, ce qui indique que MN est recouvert d'une tuile horizontale (voir la Figure 7).

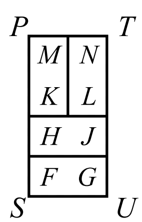


Figure 5

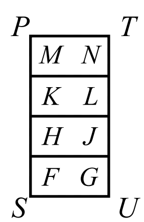


Figure 6

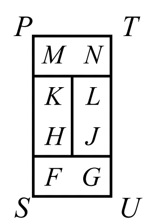


Figure 7

Donc si F est recouvert d'une tuile horizontale, il y a $(2 + 1)$ pavages, ou 3 pavages.
En tout, il y a $(2 + 3)$ pavages, ou 5 pavages possibles de la région $PTUS$ de dimensions 2×4.

On considère la région $TQRU$.
Soit t le nombre de pavages possibles de la région $TQRU$ de dimensions 4×4.
Pour chacun des 5 pavages de $PTUS$, il y a t pavages $TQRU$, ce qui veut dire qu'il y a $5t$ pavages de la région $PQRS$.

On divise la région $TQRU$ en carrés de dimensions 1×1 que l'on nomme comme dans la Figure 8. Soit V et W les milieurs respectifs de TQ et de UR.

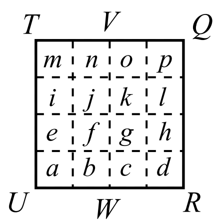


Figure 8

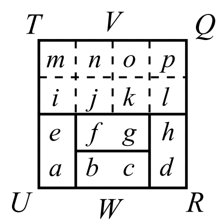


Figure 9

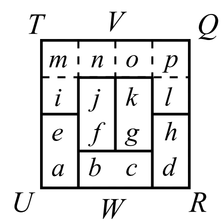


Figure 10

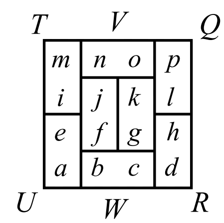


Figure 11

On considère deux cas—ou bien une tuile chevauche le segment VW ou non.
Si aucune tuile ne chevauche VW, alors $TVWU$ et $VQRW$ sont des régions de dimensions 2×4 et elles peuvent chacune être pavée de 5 façons comme pour $PTUS$.
Dans ce cas, le nombre de pavages possibles de $TQRU$ est égal à 5×5, ou 25.

Supposons qu'au moins une tuile chevauche VW.
Si bc est recouvert d'une tuile horizontale, alors ae et dh sont recouverts de tuiles verticales.
Dans ce cas, fg est recouvert d'une tuile horizontale (Figure 9), ou f et g sont chacun recouvert d'une tuile verticale (Figure 10).
Dans le premier cas (Figure 9), la région supérieure de dimensions 4×2 doit être recouverte et il y a 5 façons de le faire, comme on l'a vu.
Dans le deuxième cas (Figure 10), les tuiles qui restent doivent paraitre comme dans la Figure 11. Pourquoi ?
Donc si bc est recouvert d'une tuile horizontale, il y a $(5 + 1)$ pavages, ou 6 pavages.

Supposons que bc n'est pas recouvert d'une tuile horizontale, mais que fg l'est.
Alors ab et cd sont chacun recouverts d'une tuile horizontale, tandis que ei et hl sont chacun recouverts d'une tuile verticale. Donc, mn et op sont recouverts de tuiles de tuiles horizontales et jk doit alors être recouvert d'une tuile horizontale.

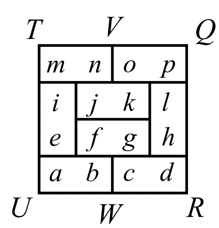


Figure 12

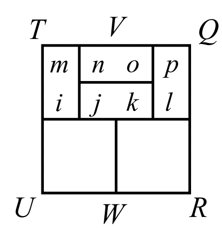


Figure 13

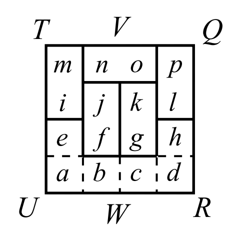


Figure 14

En d'autres mots, il n'y a qu'un pavage possible dans ce cas, soit celui de la Figure 12.

Supposons que bc et fg ne sont pas recouverts d'une tuile horizontale, mais que jk l'est.
Dans ce cas, chacun des deux carrés de dimensions 2×2 peut être pavé de façon indépendante de 2 façons. Il y a donc 4 façons de paver les deux carrés. (Ces pavages sont indépendants, puisque si ei ou hl est recouvert d'une tuile verticale, alors les trois autres petits carrés dans le carré correspondant de dimensions 2×2 ne peuvent être recouverts de tuiles de dimensions 1×2.)
De plus, im et lp doivent être recouverts de tuiles verticales, ce qui implique que no est recouvert d'une tuile horizontale, comme dans la Figure 13. Il n'y a donc qu'un pavage possible du rectangle supérieur.

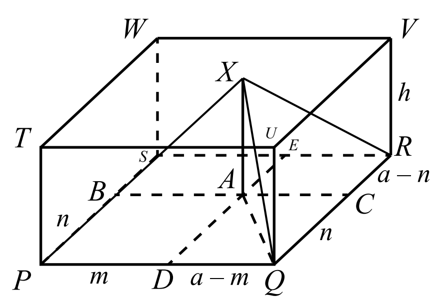
Il y a donc $2 \times 2 \times 1$ pavages, ou 4 pavages de $TQRU$ dans ce cas, puisque le reste du pavage est déterminé sans choix.

Supposons qu'aucun de bc, fg ou jk n'est recouvert d'une tuile horizontale, mais que no l'est. Alors im et lp sont recouverts de tuiles verticales, ce qui implique que fj et gk sont recouverts de tuiles verticales, ce qui donne la Figure 14.
Il est impossible de terminer ce pavage sans utiliser un tuile horizontale bc.
Il n'y a donc aucun pavage possible dans ce cas.

On a donc $t = 25 + 6 + 4 + 1$, ou $t = 36$, c'est-à-dire qu'il y a 36 pavages possibles de $TQRU$.
Le nombre de façons de paver le plafond $PQRS$, dans les conditions données, est donc égal à 5×36, ou 180.

Réponse : (A)

25. Soit a la longueur des côtés de la base carrée $PQRS$ et h la hauteur du prisme.
On cherche l'aire maximale possible du rectangle $PQUT$.
L'aire du rectangle $PQUT$ est égale à ah, puisque $PQ = a$ et $QU = h$.
Soit A le point sur $PQRS$ directement en dessous de X (XA est perpendiculaire au plan qui contient $PQRS$). On a donc $AX = h$.
On trace un segment de droite BC qui passe en A de manière que BC soit parallèle à PQ, B soit sur PS et C soit sur QR.
On trace un segment de droite DE qui passe en A de manière que DE soit parallèle à QR, D soit sur PQ et E soit sur SR.
Les segments BC et DE divisent le carré $PQRS$ en quatre rectangles.
Soit $PD = m$ et $PB = n$.
Donc $SE = m$, $QC = n$, $DQ = ER = a - m$ et $CR = BS = a - n$.



Le triangle XAQ est rectangle en A. Donc $QX^2 = AX^2 + AQ^2$.
Or, AQ est l'hypoténuse du triangle rectangle ADQ. Donc $AQ^2 = AD^2 + DQ^2$.
Donc $QX^2 = AX^2 + AD^2 + DQ^2$.
Puisque $QX = 10$, $AX = h$, $AD = CQ = n$ et $DQ = a - m$, alors $10^2 = h^2 + n^2 + (a - m)^2$.
De même, en utilisant $PX = 12$, on obtient $12^2 = h^2 + n^2 + m^2$ et en utilisant $RX = 8$, on obtient $8^2 = h^2 + (a - n)^2 + (a - m)^2$.
On soustrait $10^2 = h^2 + n^2 + (a - m)^2$ de $12^2 = h^2 + n^2 + m^2$, membre par membre, pour obtenir $144 - 100 = m^2 - (a - m)^2$, ou $44 = m^2 - (a^2 - 2am + m^2)$, d'où $44 = 2am - a^2$, ou $m = \dfrac{44 + a^2}{2a}$.

De même, on soustrait $8^2 = h^2 + (a - n)^2 + (a - m)^2$ de $10^2 = h^2 + n^2 + (a - m)^2$, membre par membre, pour obtenir $100 - 64 = n^2 - (a - n)^2$, ou $36 = n^2 - (a^2 - 2an + n^2)$, d'où $36 = 2an - a^2$, ou $n = \dfrac{36 + a^2}{2a}$.

On reporte $m = \dfrac{44 + a^2}{2a}$ et $n = \dfrac{36 + a^2}{2a}$ dans l'équation $12^2 = h^2 + n^2 + m^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} h^2 &= 144 - m^2 - n^2 \\ h^2 &= 144 - \left(\frac{44 + a^2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{36 + a^2}{2a}\right)^2 \end{aligned}$$

Or, on veut maximiser ah.
Puisque $ah > 0$, maximiser ah est équivalent à maximiser $(ah)^2 = a^2h^2$, ce qui est équivalent à maximiser $4a^2h^2$.
D'après le résultat ci-haut, on a :

$$\begin{aligned} 4a^2h^2 &= 4a^2\left(144 - \left(\frac{44 + a^2}{2a}\right)^2 - \left(\frac{36 + a^2}{2a}\right)^2\right) \\ &= 4a^2\left(144 - \frac{(44 + a^2)^2}{4a^2} - \frac{(36 + a^2)^2}{4a^2}\right) \\ &= 576a^2 - (44 + a^2)^2 - (36 + a^2)^2 \\ &= 576a^2 - (1936 + 88a^2 + a^4) - (1296 + 72a^2 + a^4) \\ &= -2a^4 + 416a^2 - 3232 \\ &= -2(a^4 - 208a^2 + 1616) \\ &= -2((a^2 - 104)^2 + 1616 - 104^2) \qquad \text{(on a complété le carré)} \\ &= -2(a^2 - 104)^2 - 2(1616 - 104^2) \\ &= -2(a^2 - 104)^2 + 18400 \end{aligned}$$

Puisque $(a^2 - 104)^2 \geq 0$, alors $4a^2h^2 \leq 18400$ (il y a égalité lorsque $a = \sqrt{104}$).
Donc $a^2h^2 \leq 4600$, d'où $ah \leq \sqrt{4600}$.
L'aire maximale possible de $PQUT$ est donc $\sqrt{4600}$, ou $10\sqrt{46}$, ou environ 67,823.
Cette réponse est plus près du choix de réponse 67,82.

Réponse : (B)