



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

# Concours Cayley

(10<sup>e</sup> année – Sec. IV)

le mardi 24 février 2015

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 25 février 2015

(Hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)



UNIVERSITY OF  
**WATERLOO**

Durée : 60 minutes

©2014 University of Waterloo

L'utilisation d'une calculatrice est permise, mais il est interdit d'utiliser un appareil ayant accès à Internet, pouvant communiquer avec d'autres appareils ou contenant des renseignements enregistrés au préalable. Par exemple, il est interdit d'utiliser un téléphone intelligent ou une tablette.

## Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur droite de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école et le nom de la ville.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats admissibles.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.  
Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.  
Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.
10. Vous ne pouvez pas participer la même année à plus d'un des concours Pascal, Cayley ou Fermat.

*Ne pas discuter en ligne des problèmes ou des solutions de ce concours dans les prochaines 48 h.*

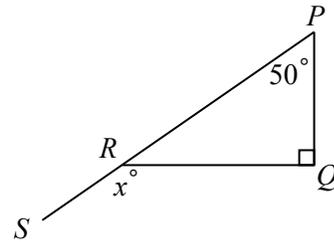
*Les élèves qui ont obtenu le plus grand nombre de points verront leur nom, le nom et l'endroit de leur école, leur niveau scolaire et l'écart de points où ils se situent, dans une liste publiée sur le site Web du CEMI au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca), Ces données peuvent être partagées avec d'autres organisations de mathématiques pour reconnaître le succès des élèves.*

Notation: Une réponse fautive *n'est pas pénalisée*.

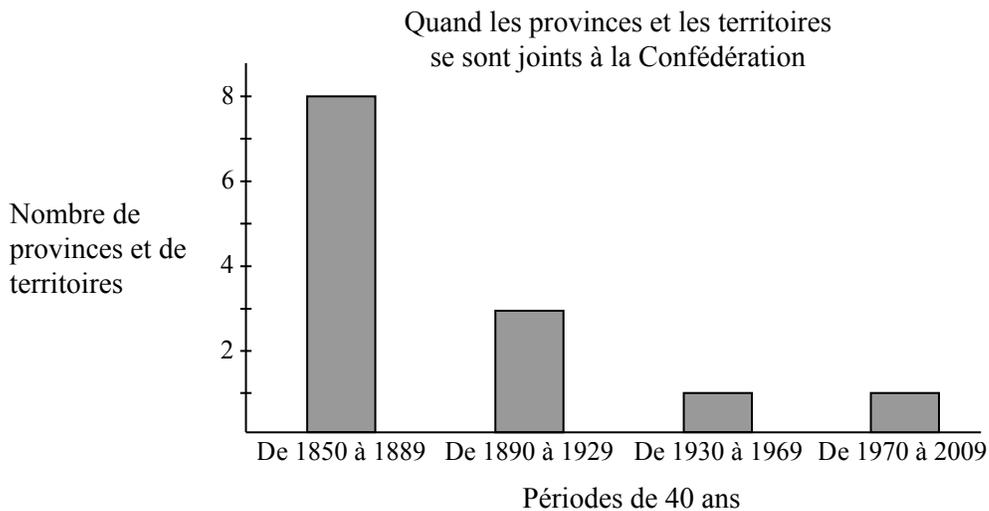
On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

**Partie A (5 points par bonne réponse)**

- Quelle est la valeur de  $2 \times 2015 - 2015$ ?  
(A) 2015      (B) 4030      (C) 6045      (D) 0      (E) -2015
- Quelle est la valeur de  $\sqrt{1} + \sqrt{9}$ ?  
(A) 1      (B) 2      (C) 3      (D) 4      (E) 5
- La base d'une boîte de forme rectangulaire mesure 2 cm sur 5 cm. La boîte a un volume de  $30 \text{ cm}^3$ . Quelle est la hauteur de la boîte?  
(A) 1 cm      (B) 2 cm      (C) 3 cm      (D) 4 cm      (E) 5 cm
- Dans la figure ci-contre, le point  $R$  est situé sur le segment  $PS$ . Quelle est la valeur de  $x$ ?  
(A) 120      (B) 130      (C) 135  
(D) 140      (E) 150



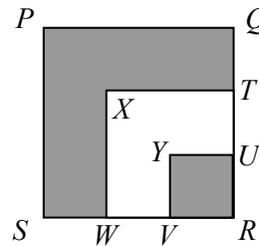
- Le diagramme à bandes suivant indique le nombre de provinces et de territoires qui se sont joints à la Confédération canadienne durant quatre périodes de 40 ans.



Si on choisit une province ou un territoire au hasard (il y en a 13), quelle est la probabilité pour qu'elle se soit jointe à la Confédération canadienne de 1890 à 1969?

- (A)  $\frac{12}{13}$       (B)  $\frac{4}{13}$       (C)  $\frac{5}{13}$       (D)  $\frac{3}{13}$       (E)  $\frac{2}{13}$
- Si  $a^2 = 9$ , quelle est la valeur de  $a^4$ ?  
(A) 27      (B) 81      (C) 243      (D) 729      (E) 2187

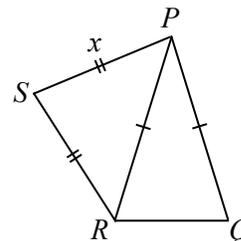
7. L'expression  $3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100}$  n'est pas égale à :
- (A)  $3\frac{14}{100}$       (B) 3,14      (C)  $3\frac{5}{110}$       (D)  $3\frac{7}{50}$       (E)  $\frac{157}{50}$
8. Valérie a la moitié de l'argent qu'il faut pour acheter un collier à sa mère. Sa soeur lui remet 30 \$. Valérie a maintenant les trois quarts de l'argent qu'il lui faut. Son père accepte de lui remettre le reste de ce qu'il lui faut. Combien son père lui donnera-t-il ?
- (A) 7,50 \$      (B) 15 \$      (C) 22,50 \$      (D) 30 \$      (E) 120 \$
9. Jean fait du jogging tous les 3 jours. Il court le lundi 5 janvier. Il court ensuite le 8 janvier. Quelle est la date suivante où il courra un lundi ?
- (A) Le 12 janvier      (B) Le 19 janvier      (C) Le 26 janvier  
(D) Le 2 février      (E) Le 9 février
10. Dans la figure ci-contre, le carré  $PQRS$  mesure  $3 \times 3$ . Les points  $T$  et  $U$  sont situés sur le côté  $QR$  de manière que  $QT = TU = UR = 1$ . Les points  $V$  et  $W$  sont situés sur le côté  $RS$  de manière que  $RV = VW = WS = 1$ . Les segments  $TX$  et  $UY$  sont perpendiculaires à  $QR$  et les segments  $VY$  et  $WX$  sont perpendiculaires à  $RS$ . Quel est le rapport de l'aire de la partie ombrée à l'aire de la partie non ombrée ?
- (A) 2 : 1      (B) 7 : 3      (C) 7 : 4  
(D) 5 : 4      (E) 3 : 1




---

**Partie B (6 points par bonne réponse)**

11. On définit l'opération  $\otimes$  comme suit :  $a \otimes b = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ . Quelle est la valeur de  $4 \otimes 8$  ?
- (A)  $\frac{1}{2}$       (B) 1      (C)  $\frac{5}{4}$       (D) 2      (E)  $\frac{5}{2}$
12. Les points  $(-1, q)$  et  $(-3, r)$  sont situés sur une droite parallèle à la droite d'équation  $y = \frac{3}{2}x + 1$ . Quelle est la valeur de  $r - q$  ?
- (A) 3      (B)  $\frac{4}{3}$       (C)  $-\frac{3}{4}$       (D)  $-\frac{4}{3}$       (E) -3
13. À l'école secondaire Paquin, 36 élèves font partie de l'équipe de baseball, de l'équipe de hockey ou des deux. Sachant que l'équipe de baseball compte 25 élèves et que l'équipe de hockey compte 19 élèves, combien d'élèves font partie des deux équipes ?
- (A) 7      (B) 8      (C) 9      (D) 10      (E) 11
14. Dans la figure ci-contre, le triangle  $PQR$  est isocèle ( $PQ = PR$ ) et le triangle  $PRS$  est isocèle ( $PS = SR = x$ ). De plus, le triangle  $PQR$  a un périmètre de 22, le triangle  $PRS$  a un périmètre de 22 et  $PQRS$  a un périmètre de 24. Quelle est la valeur de  $x$  ?
- (A) 7,5      (B) 6,5      (C) 7  
(D) 6      (E) 8



15. Soit  $n$  un entier strictement positif. L'expression  $n!$  (que l'on nomme « factorielle  $n$  ») représente le produit des entiers de 1 à  $n$ . Par exemple,  $4! = (1)(2)(3)(4)$ , d'où  $4! = 24$ . Le chiffre des unités de la somme  $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + 6! + 7! + 8! + 9! + 10!$  est :

(A) 1                      (B) 3                      (C) 5                      (D) 7                      (E) 9

16. Dans un carré magique, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont la même somme. Dans le carré magique ci-contre, la somme  $a + b + c$  est égale à :

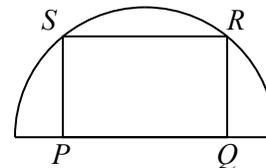
$a$	13	$b$
19	$c$	11
12	$d$	16

(A) 49                      (B) 54                      (C) 47  
(D) 50                      (E) 46

17. Pendant les 30 premières minutes d'une randonnée, Diane conduit sa voiture à une vitesse constante. Pendant les 30 minutes suivantes, elle conduit sa voiture à une vitesse constante qui est 20 km/h de plus que sa vitesse précédente. Elle parcourt 100 km en tout. Quelle était sa vitesse pendant les 30 premières minutes ?

(A) 80 km/h    (B) 90 km/h    (C) 100 km/h    (D) 110 km/h    (E) 120 km/h

18. Dans la figure ci-contre, le côté  $PQ$  du rectangle  $PQRS$  est situé sur le diamètre du demi-cercle, tandis que les sommets  $R$  et  $S$  sont situés sur le demi-cercle. Sachant que le demi-cercle a un diamètre de 20 et que  $PQ$  a une longueur de 16, quelle est la longueur de  $PS$  ?



(A) 6                      (B) 7                      (C) 8  
(D) 9                      (E) 10

19. Un caissier d'une banque a devant lui des piles de billets de banque. Les billets de chaque pile ont une valeur totale de 1000 \$. Chaque pile contient au moins un billet de 20 \$, au moins un billet de 50 \$ et aucun billet d'une autre valeur. Sachant qu'il n'y a pas deux piles ayant le même nombre de billets de 20 \$, quel est le nombre maximum de piles que le caissier peut avoir devant lui ?

(A) 9                      (B) 10                      (C) 11                      (D) 4                      (E) 8

20. Combien y a-t-il de valeurs entières de  $n$  pour lesquelles  $72 \left(\frac{3}{2}\right)^n$  a une valeur entière ?

(A) 2                      (B) 3                      (C) 4                      (D) 5                      (E) 6

### Partie C (8 points par bonne réponse)

21. Trois entiers impairs consécutifs ont une moyenne de 7. Lorsqu'on ajoute un quatrième entier strictement positif  $m$ , différent des trois autres, la moyenne des quatre entiers est un entier. Quelle est la somme des trois plus petites valeurs possibles de  $m$  ?

(A) 6                      (B) 9                      (C) 21                      (D) 29                      (E) 33

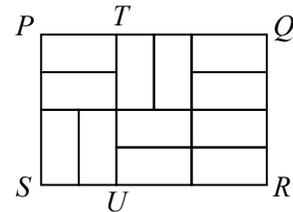
22. Six joueurs participent à un tournoi d'échecs. Chaque joueur joue exactement deux parties contre chaque autre joueur. Le gagnant d'une partie obtient 1 point et le perdant obtient 0 point ; dans le cas d'une partie nulle, chaque joueur obtient  $\frac{1}{2}$  point. Quel est le nombre minimum de points qu'un joueur doit obtenir pour s'assurer qu'il a plus de points que tout autre joueur ?

(A) 8            (B)  $8\frac{1}{2}$             (C) 9            (D)  $9\frac{1}{2}$             (E) 10

23. Dans son salon, Norma utilise une minuterie pour l'éclairage. Chaque soir, la minuterie allume l'éclairage au hasard à 19 h 00, 19 h 30, 20 h 00, 20 h 30 ou 21 h 00. Plus tard dans la soirée, la minuterie éteint l'éclairage au hasard à n'importe quelle heure de 23 h 00 à 1 h 00 du matin. Par exemple, l'éclairage pourrait s'allumer à exactement 19 h 30 et s'éteindre à n'importe quelle heure (il y a une infinité d'heures possibles) de 23 h 00 à 1 h 00 du matin. Un soir, l'éclairage est allumé pendant  $t$  heures. Quelle est la probabilité pour que  $4 < t < 5$  ?

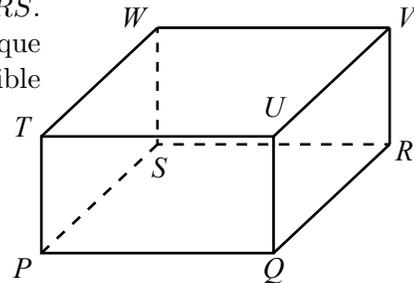
(A)  $\frac{1}{2}$             (B)  $\frac{1}{4}$             (C)  $\frac{2}{5}$             (D)  $\frac{3}{10}$             (E)  $\frac{7}{20}$

24. La figure ci-contre représente un plafond  $PQRS$  de forme rectangulaire mesurant 6 m sur 4 m. Le plafond doit être complètement recouvert de 12 tuiles rectangulaires mesurant 1 m sur 2 m. Une solive  $TU$  est située de manière que  $PT = SU = 2$  m. Cette solive ne peut être traversée par aucune tuile. Combien y a-t-il d'arrangements possibles des tuiles ?



(A) 180            (B) 190            (C) 185  
(D) 170            (E) 175

25. Un prisme droit  $PQRSWTUV$  a une base carrée  $PQRS$ . Le point  $X$  est situé sur la face  $TUVW$  de manière que  $PX = 12$ ,  $QX = 10$  et  $RX = 8$ . L'aire maximale possible du rectangle  $PQUT$  est plus près de :



(A) 67,84            (B) 67,82            (C) 67,90  
(D) 67,86            (E) 67,88



Le CENTRE d'ÉDUCATION en  
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE  
*cemc.uwaterloo.ca*

**Pour les élèves...**

Merci d'avoir participé au concours Cayley de 2015! Chaque année, plus de 200 000 élèves, provenant de 60 pays, s'inscrivent aux concours du CEMI.

Encouragez votre enseignante ou votre enseignant à vous inscrire au concours Galois qui aura lieu en avril.

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- plus d'information à propos du concours Galois
- des copies gratuites des concours précédents
- des vidéos et du matériel provenant des Cercles de mathématiques pour approfondir vos connaissances des mathématiques et vous préparer pour des concours à venir
- des renseignements sur les carrières et les applications des mathématiques et de l'informatique

**Pour les enseignants...**

Visitez notre site Web au [cemc.uwaterloo.ca](http://cemc.uwaterloo.ca) pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu en avril
- jeter un coup d'oeil sur nos cours gratuits en ligne pour les élèves de 11<sup>e</sup> et 12<sup>e</sup> année
- vous renseigner sur nos ateliers en face-à-face et nos ressources en ligne
- vous inscrire à notre Problème de la semaine en ligne
- vous renseigner sur notre programme de Maîtrise en mathématiques pour enseignants
- trouver les résultats de vos élèves dans les concours