Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2015

le mercredi 25 novembre 2015
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le jeudi 26 novembre 2015
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Si $\dfrac{8}{24} = \dfrac{4}{x+3}$, alors $8(x+3) = 24(4)$, ou $8x + 24 = 96$. Donc $8x = 72$, ou $x = 9$.

   On pourrait aussi exprimer les deux membres de l'équation avec un numérateur commun 4. Le membre de gauche devient ainsi $\dfrac{4}{12}$ et l'équation devient $\dfrac{4}{12} = \dfrac{4}{x+3}$. Puisque les numérateurs sont égaux, les dénominateurs le sont également. Donc $x + 3 = 12$, ou $x = 9$.

   Réponse : 9

2. On considère d'abord la colonne des unités de l'addition.
   La somme des chiffres de la colonne des unités, $3C$, doit donner le chiffre des unités 6 de la somme. Il n'y a qu'une possibilité, soit $C = 2$. (On peut le vérifier mentalement.)
   L'addition devient donc :

$$\begin{array}{rrrr} & & B & 2 \\ & A & B & 2 \\ + & A & B & 2 \\ \hline & 8 & 7 & 6 \end{array}$$

   On sait que la somme des chiffres de la colonne des unités n'a donné aucune retenue.
   On considère la colonne des dizaines.
   La somme des chiffres des dizaines, $3B$, doit donner le chiffre des dizaines 7 de la somme.
   Il n'y a qu'une possibilité, soit $B = 9$. L'addition devient donc :

$$\begin{array}{rrrr} & & 9 & 2 \\ & A & 9 & 2 \\ + & A & 9 & 2 \\ \hline & 8 & 7 & 6 \end{array}$$

   La somme des chiffres de la colonne des dizaines a donné une retenue de 2.
   On considère la colonne des centaines. La somme des chiffres de la colonne des centaines, plus la retenue 2, est égale à $2A + 2$. Elle doit donner le chiffre 8 de la somme.
   La somme des chiffres A et A doit donc donner le chiffre des unités 6. On a donc $A = 3$ ou $A = 8$. Or, $A = 8$ ferait en sorte que deux des nombres additionnés seraient 892, ce qui excède la somme 876. Donc $A = 3$.

   (On aurait pu traiter le problème de façon algébrique.
   L'addition devient $92 + (100A + 92) + (100A + 92) = 876$.
   On simplifie pour obtenir $200A + 276 = 876$, d'où $200A = 600$, ou $A = 3$.)

   On peut vérifier que $92 + 392 + 392 = 876$. Donc $A + B + C = 3 + 9 + 2$, ou $A + B + C = 14$.

   Réponse : 14

3. Puisque le toit mesure 5 m sur 5 m, il a une aire de 5^2 m^2, ou 25 m^2.
   Lorsque le toit reçoit 6 mm (ou 0,006 m) de pluie, le volume total de pluie tombée sur le toit est de $25 \cdot 0{,}006$ m^3, ou 0,15 m^3. (On peut imaginer que la pluie forme un prisme droit avec une base rectangulaire de 5 m sur 5 m et une hauteur de 6 mm.)
   Le bac a un diamètre de 0,5 m (et un rayon de 0,25 m) et une hauteur de 1 m. Il a donc un volume de $\pi \cdot 0{,}25^2 \cdot 1$ m^3, ou $0{,}0625\pi$ m^3.
   Le pourcentage du bac qui est rempli d'eau est égal à :

$$\frac{0{,}15}{0{,}0625\pi} \approx 0{,}7639 = \frac{76{,}39}{100} = 76{,}39\,\%$$

   Au dixième de un pour cent près, 76,4 % du bac est rempli d'eau.

   Réponse : 76,4 %

4. On utilise les lois des exposants pour développer les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\left(2\cdot 4^{x^2-3x}\right)^2 &= 2^{x-1}\\
2^2\cdot 4^{2(x^2-3x)} &= 2^{x-1}\\
2^2\cdot 4^{2x^2-6x} &= 2^{x-1}\\
2^2\cdot (2^2)^{2x^2-6x} &= 2^{x-1}\\
2^2\cdot 2^{2(2x^2-6x)} &= 2^{x-1}\\
\frac{2^2\cdot 2^{4x^2-12x}}{2^{x-1}} &= 1\\
2^{2+4x^2-12x-(x-1)} &= 1\\
2^{4x^2-13x+3} &= 1
\end{aligned}$$

Puisque $2^0 = 1$, cette dernière équation est vraie lorsque $4x^2 - 13x + 3 = 0$, ou $(4x-1)(x-3) = 0$.
Donc $x = \frac{1}{4}$ ou $x = 3$.
On peut reporter ces deux valeurs de x dans l'équation donnée pour vérifier qu'elles satisfont à l'équation.

Réponse : $\frac{1}{4}, 3$

5. On suppose qu'Anna répond « chat » t fois et qu'elle répond « chien » n fois.
Lorsqu'elle répond « chien », sa réponse est correcte 95 % du temps.
Lorsqu'elle répond « chat », sa réponse est correcte 90 % du temps.
Donc lorsqu'elle répond « chat », on lui a montré $0{,}9t$ images de chats et donc $t - 0{,}9t$ images de chiens, ou $0{,}1t$ images de chiens.
Lorsqu'elle répont « chien », on lui a montré $0{,}95n$ images de chiens et donc $n - 0{,}95n$ images de chats, ou $0{,}05n$ images de chats.
Le nombre total d'images de chats qu'on lui a montrées est donc égal à $0{,}9t + 0{,}05n$ et le nombre total d'images de chiens qu'on lui a montrées est donc égal à $0{,}1t + 0{,}95n$.
Or, le nombre total d'images de chats est égal au nombre total d'images de chiens.
Donc $0{,}9t + 0{,}05n = 0{,}1t + 0{,}95n$, d'où $0{,}8t = 0{,}9n$, ou $\dfrac{n}{t} = \dfrac{0{,}8}{0{,}9} = \dfrac{8}{9}$.

Le rapport du nombre de fois qu'elle répondu « chien » au nombre de fois qu'elle a répondu « chat » est donc de 8 : 9.

Réponse : 8 : 9

6. Puisque $X + Y = 45°$, alors $\tan(X+Y) = \tan 45° = 1$.

Or, $\tan(X+Y) = \dfrac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X \tan Y} = \dfrac{\dfrac{1}{m} + \dfrac{a}{n}}{1 - \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{a}{n}} = \dfrac{mn\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{a}{n}\right)}{mn\left(1 - \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{a}{n}\right)} = \dfrac{n+am}{mn-a}$.

On a donc $\dfrac{n+am}{mn-a} = 1$.
On veut déterminer le nombre d'entiers strictement positifs a, $a \le 50$, pour lesquels cette équation admet exactement 6 couples (m,n) d'entiers strictement positifs comme solutions.

On récrit l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{n+am}{mn-a} &= 1 \\ n+am &= mn-a \\ a &= mn-am-n \\ a+a &= mn-am-n+a \\ 2a &= m(n-a)-(n-a) \\ 2a &= (m-1)(n-a) \end{aligned}$$

On veut déterminer le nombre d'entiers strictement positifs a, $a \leq 50$, pour lesquels l'équation $(m-1)(n-a) = 2a$ admet exactement 6 couples (m, n) d'entiers strictement positifs comme solutions.
Puisque $a \neq 0$, alors $m-1 \neq 0$, d'où $m \neq 1$.
Puisque m est un entier strictement positif et que $m \neq 1$, alors $m \geq 2$. En d'autres mots, $m-1 > 0$.
Puisque $m-1 > 0$, $2a > 0$ et $2a = (m-1)(n-a)$, alors $n-a > 0$, ou $n > a$.

Or, une factorisation de $2a$ comme produit de deux entiers positifs correspond à un couple (m, n) d'entiers positifs qui sont une solution de $(m-1)(n-a) = 2a$.
En effet, une factorisation $2a = r \cdot s$ donne la solution $m-1 = r$ (ou $m = r+1$) et $n-a = s$ (ou $n = s+a$) et vice-versa.
Le problème est donc équivalent à la recherche du nombre d'entiers strictement positifs a, $a \leq 50$, pour lesquels $2a$ admet trois factorisations comme produits de deux entiers positifs, ou, ce qui est équivalent, pour lesquels $2a$ admet six diviseurs positifs.
Étant donné un entier d exprimé en factorisation première, $d = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_k^{c_k}$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ étant des nombres premiers et $c_1, c_2, \ldots, c_k$ étant des entiers strictement positifs, on sait que d admet $(c_1+1)(c_2+1)\cdots(c_k+1)$ diviseurs strictement positifs.
Pour que ce produit soit égal à 6, on doit avoir $d = p_1^5$ ou $d = p_1^2 p_2$ car on aurait alors $(c_1+1) = (5+1) = 6$ dans le 1^er^ cas ou $(c_1+1)(c_2+1) = (2+1)(1+1) = 6$ dans le 2^e^ cas. En effet, 6×1 et 3×2 sont les deux seules factorisations de 6 comme produits de deux entiers positifs.
Si $2a$ est de la forme p_1^5, alors $p_1 = 2$, car $2a$ est divisible par 2. On a donc $2a = 2^5 = 32$, ou $a = 16$.
Si $2a$ est de la forme $p_1^2 p_2$, alors $p_1 = 2$ ou $p_2 = 2$, car $2a$ est divisible par 2.
Si $p_1 = 2$, alors $2a = 4p_2$. Puisque $a \leq 50$, alors $2a \leq 100$, d'où $p_2 \leq 25$. Donc p_2 peut égaler $3, 5, 7,$ 11,13,17,19 ou 23, ce qui fait que a peut égaler $6, 10, 14, 22, 26, 34, 38$ ou 46. (On sait que dans ce cas, $p_2 \neq 2$.)
Si $p_2 = 2$, alors $2a = 2p_1^2$. Puisque $2a \leq 100$, alors $p_1^2 \leq 50$. Le nombre premier p_1 peut donc égaler 3, 5 ou 7, ce qui fait que a peut égaler 9, 25 ou 49. (On sait que dans ce cas, $p_1 \neq 2$.)
En tout, il y a 12 valeurs de a qui satisfont à la condition.

Réponse : 12

Partie B

1. (a) La droite d'équation $y = 2x + 4$ a pour ordonnée à l'origine 4.
Le point R, où la droite coupe l'axe des ordonnées, a donc pour coordonnées $(0, 4)$.
Puisque O a pour coordonnées $(0, 0)$, alors $OR = 4$.

(b) Le point Q est le point d'intersection de la droite d'équation $y = 2x + 4$ et de la droite verticale d'équation $x = p$.
Donc, Q a pour abscisse p. On reporte $x = p$ dans la première équation pour obtenir $y = 2p + 4$.
Donc, Q a pour coordonnées $(p, 2p + 4)$.

(c) Lorsque $p = 8$, P a pour coordonnées $(8, 0)$ et Q a pour coordonnées $(8, 20)$.
Le quadrilatère $OPQR$ est un trapèze avec des côtés parallèles OR et PQ. Il a pour hauteur la longueur de OP, puisque OP est perpendiculaire à OR et à PQ.
L'aire de $OPQR$ est donc égale à $\frac{1}{2}(OR + PQ) \cdot OP$, ou $\frac{1}{2}(4 + 20) \cdot 8$, ou 96.

(d) Le quadrilatère $OPQR$ est un trapèze avec des côtés parallèles OR et PQ. Il a pour hauteur la longueur de OP, puisque OP est perpendiculaire à OR et à PQ.
En fonction de p, l'aire de $OPQR$ est égale à :

$$\tfrac{1}{2}(OR + PQ) \cdot OP = \tfrac{1}{2}(4 + (2p + 4)) \cdot p = \tfrac{1}{2}(2p + 8)p = p(p + 4)$$

Puisque $OPQR$ a une aire de 77, alors $p(p + 4) = 77$, d'où $p^2 + 4p - 77 = 0$, ou $(p + 11)(p - 7) = 0$.
Puisque $p > 0$, alors $p = 7$.
On peut vérifier que lorsque $p = 7$, le quadrilatère $OPQR$ a une aire de 77.

2. (a) Si $f(r) = r$, alors $\dfrac{r}{r-1} = r$.
Puisque $r \neq 1$, alors $r = r(r - 1)$, d'où $r = r^2 - r$, ou $0 = r^2 - 2r$, ou $0 = r(r - 2)$.
Donc $r = 0$ ou $r = 2$.
On peut vérifier par substitution que chacune de ces valeurs de r vérifie l'équation donnée.

(b) Puisque $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, alors

$$f(f(x)) = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{x - (x - 1)} = \frac{x}{1} = x,$$

ce qu'il fallait démontrer.
(Dans la simplification précédente, on a multiplié le numérateur et le dénominateur par $x - 1$, ce qui est permis puisque $x \neq 1$.)

(c) Lorsque $x \neq -k$, $g(x) = \dfrac{2x}{x+k}$ est bien défini.

Lorsque $x \neq -k$ et $g(x) \neq -k$, $g(g(x)) = \dfrac{2\left(\dfrac{2x}{x+k}\right)}{\dfrac{2x}{x+k} + k}$ est bien défini.

Les équations suivantes sont équivalentes pour toutes les valeurs de x telles que $x \neq -k$ et

$g(x) \neq -k$:

$$\begin{aligned}
g(g(x)) &= x \\
\frac{2\left(\dfrac{2x}{x+k}\right)}{\dfrac{2x}{x+k}+k} &= x \\
\frac{4x}{2x+k(x+k)} &= x \qquad \text{(on a multiplié le numérateur et le dénominateur par } x+k\text{)} \\
4x &= x(2x+k(x+k)) \\
4x &= x(2x+kx+k^2) \\
4x &= (k+2)x^2+k^2x \\
0 &= (k+2)x^2+(k^2-4)x \\
0 &= (k+2)(x^2+(k-2)x)
\end{aligned}$$

Pour que le membre de droite soit égal à 0 pour toutes les valeurs de x, il faut que le facteur $(k+2)$ soit nul, c'est-à-dire que $k=-2$. (Pour les autres valeurs de k, l'équation $x^2+(k-2)x=0$ admet deux solutions seulement et ainsi l'équation $0=(k+2)(x^2+(k-2)x)$ n'est pas vérifiée par toutes les valeurs de x. Par exemple, si $k=1$, cette équation devient $0=3(x^2-x=0)$, ou $0=x(x-1)$, qui admet deux solutions, soit 0 et 1.)
Donc, il y a exactement une valeur de k, soit -2, pour laquelle $g(g(x))=x$ pour tous les nombres réels x tels que $x \neq -k$ et $g(x) \neq -k$.

(d) Lorsque $x \neq -\dfrac{c}{b}$, $h(x)=\dfrac{ax+b}{bx+c}$ est bien défini.

Lorsque $x \neq -\dfrac{c}{b}$ et $h(x)=\dfrac{ax+b}{bx+c} \neq -\dfrac{c}{b}$, $h(h(x))=\dfrac{a\left(\dfrac{ax+b}{bx+c}\right)+b}{b\left(\dfrac{ax+b}{bx+c}\right)+c}$ est bien défini.

Les équations suivantes sont équivalentes pour toutes les valeurs de x telles que $x \neq -\dfrac{c}{b}$ et $h(x) \neq -\dfrac{c}{b}$:

$$\begin{aligned}
h(h(x)) &= x \\
\frac{a\left(\dfrac{ax+b}{bx+c}\right)+b}{b\left(\dfrac{ax+b}{bx+c}\right)+c} &= x \\
\frac{a(ax+b)+b(bx+c)}{b(ax+b)+c(bx+c)} &= x \qquad \text{(on a multiplié le numérateur et le dénominateur par } bx+c\text{)} \\
a(ax+b)+b(bx+c) &= x(b(ax+b)+c(bx+c)) \\
(a^2+b^2)x+(ab+bc) &= (ab+bc)x^2+(b^2+c^2)x \\
0 &= b(a+c)x^2+(c^2-a^2)x-b(a+c)
\end{aligned}$$

Cette dernière équation est une équation du second degré. Puisqu'elle doit être vérifiée par une infinité de valeurs de x, ses coefficients doivent tous être nuls.
On doit donc avoit $b(a+c)=0$, $c^2-a^2=0$ et $b(a+c)=0$.
Puisque $b \neq 0$, alors $b(a+c)=0$ implique que $a+c=0$, ou $c=-a$.

Or on remarque que lorsque $c = -a$, on a aussi $c^2 - a^2 = 0$ et $b(a + c) = 0$.

Donc $h(h(x)) = x$ pour tous les nombres réels x tels que $x \neq -\frac{c}{b}$ et $h(x) \neq -\frac{c}{b}$ lorsque le triplet (a, b, c) est de la forme $(a, b, -a)$, a et b étant des nombres réels non nuls.

3. (a) Lorsque $a_n = n^2$, on a :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	$\cdots$
b_n	1										$\cdots$

Puisque $b_1 \leq a_2$, alors $b_2 = b_1 + a_2 = 1 + 4 = 5$.
Puisque $b_2 \leq a_3$, alors $b_3 = b_2 + a_3 = 5 + 9 = 14$.
Puisque $b_3 \leq a_4$, alors $b_4 = b_3 + a_4 = 14 + 16 = 30$.
Puisque $b_4 > a_5$, alors $b_5 = b_4 - a_5 = 30 - 25 = 5$.
Puisque $b_5 \leq a_6$, alors $b_6 = b_5 + a_6 = 5 + 36 = 41$.
Puisque $b_6 \leq a_7$, alors $b_7 = b_6 + a_7 = 41 + 49 = 90$.
Puisque $b_7 > a_8$, alors $b_8 = b_7 - a_8 = 90 - 64 = 26$.
Puisque $b_8 \leq a_9$, alors $b_9 = b_8 + a_9 = 26 + 81 = 107$.
Puisque $b_9 > a_{10}$, alors $b_{10} = b_9 - a_{10} = 107 - 100 = 7$.
On obtient donc le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	$\cdots$
b_n	1	5	14	30	5	41	90	26	107	7	$\cdots$

(b) Comme dans la partie (a), on calcule les premières valeurs de b_n pour obtenir :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	$\cdots$
a_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	$\cdots$
b_n	1	3	6	2	7	1	8	16	7	17	6	18	5	19	4	20	3	21	2	22	1	23	$\cdots$

On démontrera que lorsque k est un entier strictement positif avec $b_k = 1$, alors $b_{3k+3} = 1$ et $b_n \neq 1$ pour toutes les valeurs entières de n dans l'intervalle $k < n < 3k + 3$.
On remarque que cette condition est compatible avec les résultats du tableau.
Avant de démontrer la condition, on l'applique à notre situation pour obtenir $b_1 = 1$, $b_6 = 1$, $b_{21} = 1$, $b_{66} = 1$, $b_{201} = 1$, $b_{606} = 1$, $b_{1821} = 1$ et $b_{5466} = 1$, et il n'y a aucune autre valeur de b_n égale à 1 lorsque $n < 5466$.
(On a obtenu ces valeurs de b_n en calculant $6 = 3(1) + 3$, $21 = 3(6) + 3$, $66 = 3(21) + 3$, et ainsi de suite.)
Après la démonstration qui suit, on saura que les entiers strictement positifs n, avec $n < 2015$, pour lesquels $b_n = 1$ sont $1, 6, 21, 66, 201, 606, 1821$.

Supposons que $b_k = 1$.
Puisque $a_{k+1} = k + 1 > 1 = b_k$, alors $b_{k+1} = b_k + a_{k+1} = k + 2$.
Puisque $a_{k+2} = k + 2 = b_{k+1}$, alors $b_{k+2} = b_{k+1} + a_{k+2} = 2k + 4$.
On continue de la même façon pour obtenir $b_{k+2m-1} = k+3-m$ lorsque $m = 1, 2, \ldots, k+2$ et $b_{k+2m} = 2k + m + 3$ lorsque $m = 1, 2, \ldots, k + 1$.
On peut justifier ces énoncés en remarquant que chacun est vrai lorsque $m = 1$ et que :

- si $b_{k+2m} = 2k + m + 3$ pour une valeur de m dans l'intervalle $1 \leq m \leq k + 1$, alors puisque $a_{k+2m+1} = k + 2m + 1$ et $b_{k+2m} - a_{k+2m+1} = k - m + 2 > 0$ lorsque $m \leq k + 1$, alors
$$b_{k+2m+1} = b_{k+2m} - a_{k+2m+1} = k - m + 2,$$

que l'on peut écrire sous la forme $b_{k+2(m+1)-1} = k + 3 - (m + 1)$, ce qui correspond à la forme indiquée et

- si $b_{k+2m-1} = k + 3 - m$ pour une valeur de m dans l'intervalle $1 \leq m \leq k + 1$, alors puisque $a_{k+2m} = k + 2m$ et $b_{k+2m-1} - a_{k+2m} = 3 - 3m \leq 0$ lorsque $m \geq 1$, alors :

$$b_{k+2m} = b_{k+2m-1} + a_{k+2m} = (k + 3 - m) + (k + 2m) = 2k + m + 3,$$

ce qui correspond à la forme indiquée.

Ainsi pour ces valeurs de m, les termes b_n de la suite ont la forme indiquée.
Or on a $b_{k+2m} = 2k + m + 3 \neq 1$ lorsque $m = 1, 2, \ldots, k + 1$ et $b_{k+2m-1} = k + 3 - m = 1$ lorsque $m = k + 2$ seulement.
Puisque $k + 2(k + 2) - 1 = 3k + 3$, alors $b_{3k+3} = 1$ et aucune autre valeur de n dans l'intervalle $k < n < 3k + 3$ ne donne $b_n = 1$.

Donc, les entiers strictement positifs n ($n < 2015$) pour lesquels $b_n = 1$ sont 1, 6, 21, 66, 201, 606 et 1821.

(c) Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite éventuellement périodique.
Il existe donc des entiers strictement positifs r et p pour lesquels $a_{n+p} = a_n$ pour tout n ($n \geq r$).
Ainsi les termes de a_r à a_{r+p-1} sont répétés pour former les termes de a_{r+p} à a_{r+2p-1} et ceux-ci sont répétés pour former les termes de a_{r+2p} à a_{r+3p-1} et ainsi de suite.
En d'autres mots, la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ commence par $r - 1$ termes qui ne sont pas nécessairement répétés, suivis de p termes (de a_r à a_{r+p-1}) qui sont répétés à l'infini.
Soit M la valeur maximale des termes $a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, a_r, a_{r+1}, \ldots, a_{r+p-1}$.
Puisque les termes de la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sont des entiers strictement positifs, alors $M \geq 1$.
D'après ce qui précède, M est la valeur maximale de tous les termes de la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$
Donc, $a_n \leq M$ pour tous les entiers strictement positifs n.

On démontre ensuite que $b_n \leq 2M$ pour tous les entiers strictement positifs n.
On remarque d'abord que $b_1 = a_1 \leq M < 2M$.
On considère ensuite un terme b_k de la suite qui vérifie $b_k \leq 2M$.
Or b_{k+1} est égal à $b_k + a_{k+1}$ ou à $b_k - a_{k+1}$.
Si $b_k \leq M$, alors b_{k+1} est inférieur ou égal à $b_k + a_{k+1}$.
Puisque $b_k \leq M$ et $a_{k+1} \leq M$, alors $b_{k+1} \leq M + M = 2M$.
Si $M < b_k \leq 2M$, alors puisque $a_{k+1} \leq M$, on a $b_{k+1} = b_k - a_{k+1} < b_k \leq 2M$.
Dans chaque cas, si $b_k \leq 2M$, alors $b_{k+1} \leq 2M$.
Donc, $b_n \leq 2M$ pour tous les entiers strictement positifs n.

On considère maintenant les $2M+1$ couples de termes $(a_r, b_r), (a_{r+p}, b_{r+p}), \ldots, (a_{r+2Mp}, b_{r+2Mp})$.
Puisque $a_r = a_{r+p} = a_{r+2p} = a_{r+3p} = \cdots$, le premier terme de chaque couple est le même.
Puisque b_n est un entier strictement positif pour chaque valeur de n et puisque $b_m \leq 2M$, alors par le principe des tiroirs, au moins deux des termes $b_r, b_{r+p}, b_{r+2p}, \ldots, b_{r+2Mp}$ doivent être égaux.
(On a une liste de $2M + 1$ nombres, ayant au plus $2M$ valeurs possibles. Donc, au moins deux de ces nombres doivent être égaux.)
On suppose que $b_{r+sp} = b_{r+tp}$, s et t étant des entiers non négatifs quelconques avec $s < t$.
Chaque terme b_{k+1} est complètement déterminé par les nombres b_k et a_{k+1}. (Si $b_{k_1} = b_{k_2}$ et $a_{k_1+1} = a_{k_2+1}$, alors $b_{k_1+1} = b_{k_2+1}$.)
Puisque $a_{r+sp+1} = a_{r+tp+1}$ et $a_{r+sp+2} = a_{r+tp+2}$ et $a_{r+sp+3} = a_{r+tp+3}$ et ainsi de suite, alors $b_{r+sp+1} = b_{r+tp+1}$ et $b_{r+sp+2} = b_{r+tp+2}$ et ainsi de suite. (Puisque les termes correspondants

des deux suites sont égaux à un certain endroit, alors les termes qui suivent le seront également.)
De façon particulière, si $b_{r+sp} = b_{r+tp} > a_{r+sp+1} = a_{r+tp+1}$, alors

$$b_{r+sp+1} = b_{r+sp} - a_{r+sp+1} = b_{r+tp} - a_{r+tp+1} = b_{r+tp+1}$$

et si $b_{r+sp} = b_{r+tp} \leq a_{r+sp+1} = a_{r+tp+1}$, alors

$$b_{r+sp+1} = b_{r+sp} + a_{r+sp+1} = b_{r+tp} + a_{r+tp+1} = b_{r+tp+1}.$$

Cet argument est ainsi répété à chaque étape par la suite.
En d'autres mots, à partir de b_{r+sp} et b_{r+tp}, les termes correspondants sont égaux, ce qui indique que la suite $b_1, b_2, b_3, \ldots$ est éventuellement périodique. (On remarque que si $R = r + sp$ et $P = (t - s)p$, alors $b_N = b_{N+P}$ pour tous les entiers strictement positifs N, $N \geq R$.)